华东师范大学
函授教材

数学分析讲义

华东师范大学数学系
数学分析教研組編

（第一册）

华东师范大学出版社

华东师范大学函授教材

数学分析講义

华东师范大学数学系
数学分析教研組编

（第一册）

华东师范大学出版社

数学分析講义

（第一册）

华东师范大学数学系数学分析教研組編

（內部讀物 凭証发行）

*

华东师范大学出版社出版

（上海中山北路3663号）

上海市書刊出版業營業許可証出〇八八号

上海市印刷三厂印刷 新华書店上海发行所发行

*

开本 787×1092 公厘 1/27 印張 3 7/27 字数 73,000

1958年12月第1版

1958年12月第1次印刷

印数 1—7,580

統一書号：13135 ·13

定 价：(10)0.48元

这是数学分析课程的函授講义。內容分：基础；單变数函数的微分法与單变数函数的积分法；級数；多变数函数微分法；多变数函数积分法；微分方程初步等七部分。共分五册出版。

本書內容除照顧函授特点——通俗詳細而外，力求着重說明基本概念及关鍵性問題。因此，也可作为中学数学教师进修和数学爱好者自学参考之用。

本講义是由程其襄，呂法川，陈淑等同志合編

緒　論

恩格斯説过:“和所有其他科学一样,数学起源于人們的实际需要——如田亩的丈量,容器的測定,时間的計算以及力学的需要等等”。

随着社会的发展,人們对自然的斗爭愈尖銳,对数学的需要也就愈迫切,这样,数学就成为一切自然科学和技术科学的有力工具。常言道:“工欲善其事,必先利其器”,特别在我們要多快好省地加速建設社会主义的今天,从生产工具的改进到生产計划的制定,都不仅仅乎要求我們很好地掌握初等数学,还要求我們进一步掌握高等数学。

那些問題是初等数学(目前在中学里所学的数学)所不能解决而必須依靠高等数学的呢?

远的不談,單就上面恩格斯所举的問題来説吧,我們知道,要测定一块平面面积或容器容积时,只有当它們的形狀是非常有規則的时候(例如多边形,圓形)才能应用初等数学(几何)的方法来解决。可是,如果它們的形狀不是那么有規則的話(日常生活中所遇到的往往如此),那么,如何来計算这面积或容积,就有待于高等数学了。讓我們再来考慮一个蓄水池中的水,在水閘开放后,多少时間內放完的問題。假如水的放出速度(每小时放出水量)是固定不变的話,那么,显然只要拿这速度除一下池中原有的水量就成了。但实际上,这速度並不是固定不变的,它必然开头較大,随着压力的降低,而漸漸地小下去,面临着这种不断变化着的因素(速度),要計算池中水在什么时間內放完,我們在中学里所学的初等数学就无能为力,而又非借助于高等数学不可了。

从数学观点来研究上述类型的問題(有不断变化着的因素参加其中的問題),正是高等数学的一个主要分支——数学分析(包括微

分学及积分学)的任务。恩格斯曾說:

“微分学第一次使自然科学有可能在数学上不仅仅表明狀态,并且也表明过程,卽运动。”

数学分析对生产实踐的意义,讀者就上面所举的两个例子已可約略窺見一斑了。

另一方面,初等数学中有不小部分的內容,其理論基础都建立在数学分析上面(如无穷小数,指数,对数),或者須在数学分析中才能得到更深刻的理解(如弧長,面积)。因此,作为一个未来的中学数学教师,卽使他在教学上只用到初等数学,他也应該掌握如象数学分析这样的高等数学。何况随着文化革命的深入,一定部分的高等数学很快就將成为人們应有的普通常識。下面且就学习方法稍談一下。

1. 概念的明确(不含糊),論証的謹严(无漏洞)是数学的特色,讀者在学习中,不仅要充分予以注意,还要自己努力养成这种习惯。此外还要注意概念和定理的普遍性以及由此帶来的抽象性——这也是数学的特色,讀者要旣能从具体进到抽象,也能从抽象回到具体。

2. 每一个定义和定理最好能用自己的語言来加以陈述,而且不能停留在字面上的理解,而必須从內容实質上来把握它的涵义,对每一定义要能举出正面和反面的实例,对每一定理要能掌握証明的主要环节。

3. 定义定理固然重要——它們是我們的認識成果經过分析整理后的个別小結,但更重要的是貫串在整个数学分析中的思想方法,因此切不可死記定义、定理,做它們的奴隶,而要做他們的主人,好象是自己的劳动果实一般。

4. 在学习中要随时將新的知識和旧的知識互相联系,互相比較,看它們之間,异同如何?什么是什么的特例,什么是什么的类比。

5. 学习的目的,不仅要获得一定的知識,更重要的是养成一定的能力。什么能力呢?那就是解决实际問題的能力(包括計算的熟練技巧)。因此,除在平时实踐中随时注意应用所学而外,多做习題也就成为非常必要。

目　錄

第三章　連續函数

第四章　初等函数

第一章 函　数

“函数”是数学分析（甚至是整个高等数学）中最基本的一个概念。数学分析可以說就是研究函数的。因此，函授生必須通过这一章把函数概念尽量搞清楚。在講函数之前，我們扼要地复习一下有关实数和不等式的知識。由于实数概念是近代分析学的基础，我們將来反正还要詳細討論。目前只要有一个直观的認識卽可。至于不等式，因为很快便要大量用到，开头能好好复习一下是很有益的。

学习指示

1．熟悉用不等式表示实数集的方法。

2．初步明确“有限”，“无限”体現在实数集上的巨大区别。

3．体会函数概念的普遍性。在周圍事物中，尽多找出函数的具体例子，以加深对函数的多样性的認識。

4．从概念和具体例子上辨清量与数，数与函数，函数和它的表示之間的区別。

§1 **量与数**　我們所熟悉的：長度、重量、面积、体积、速度、时間等都是量。量的特性就是它可以被度量；卽一种量选取一个定量作为度量的單位时，就可以比較出大小来，这种比較的步驟我們叫它做度量。度量的結果便产生了数，可通度的量得有理数，不可通度的量得无理数，因此每一个量都有它的数。但每一个量的数是依賴于度量时所用的單位，用的單位大，得到的数就小，用的單位小，得到的数就大。有了数之后，量的比較可归結到数的比較上去。

在自然現象中以及在工程技术过程中往往遇到兩种不同的量：一种是在某一問題的过程中保持常値的量，我們称这种量为常量如

火車在行駛过程中乘客的人数以及裝載貨物的重量等均是常量。另一种量是在某一問題的过程中不停地变化，如一天中的温度，物体由高空落下的速度等均屬这种量，这种量我們称它为变量。在此必須記住一点，如果我們沒有說明一个量是在怎样的問題过程中討論时，一般說来，我們是不能知道这个量是常量还是变量。同一个量很可能在这一个問題过程中是常量，而在另一个問題过程中是变量。例如波义耳——查理定律:

$$P \cdot V = K \cdot T$$

其中 K 为常量，P 表压力，V 表体积，T 表絕对温度。在 V 固定的条件下，当 P 改变时，T 为变量，当 P 不变时，則 T 又为常量了。

一切量既可归到数，所以今后在抽象的研討中，我們总是用数来代替量，有时量与数根本就不加区别地混用。

§2 实数与直綫(数軸)上之点为一一对应 由度量的結果，得到了有理数与无理数，有理数与无理数統称为实数。

凡有理数都可用直綫上的点来表示，只須在直綫上任取一点 O 作为与数零相对应，該点 O 我們称它为原点或零点，在原点的右方任取一点 E 作为与数 1 相对应，这样就选定了長度的單位即綫段 $\overline{OE}$，从而可用單位長度自原点向右量 n 次，得到的点作为与数 n 相对应，自原点向左量 n 次得到的点作为与数 $-n$ 相对应，用这种方法便到了与所有整数相对应的各点，要得到与分数 $\pm\frac{p}{q}$ 所对应的点（p 与 q 为自然数），只須將單位長度分成 q 等分，然后取其中之一个等分的長度作單位，自原点向右量 p 次，就得与分数 $\frac{p}{q}$ 相对应的点，而向左量 p 次，便得与分数 $-\frac{p}{q}$ 相对应的点。这样在直綫上就得到了与所有有理数相对应的点，与有理数相对应的点，我們称它为有理点，它是有理数 $\pm\frac{p}{q}$ 的几何表示，其坐标为 $\pm\frac{p}{q}$。

直線上任意兩有理点之間，必含有一个有理点（由此可知任意兩有理点之間，总含有无限个有理点），事实上任二有理点 A 与 B，其坐标以 a 与 b 表示之，AB 的中点 C 之坐标 $\frac{a+b}{2}$ 是一个有理数，所以 C 是 A 与 B 之間的一个有理点，而 $\overline{AC}$ 与 $\overline{CB}$ 又各有其中点，且亦为有理点，再継續取各綫段之中点亦为有理点，如此可継續不斷的取下去，可得无限个有理点，所以在直綫上任意兩有理点之間有无限个有理点，这性質我們称它为直綫上有理点的稠密性。

在直綫上的有理点虽具有稠密的性質，但它还不能布滿整个直綫，卽还有非有理点的存在。事实上只須作这样的点，从原点向右量 $\sqrt{2}$（$\sqrt{2}$ 是以單位長度为边的正方形对角綫之長），所得之点为非有理点，因为 $\sqrt{2}$ 为非有理数。我們用反証法証明 $\sqrt{2}$ 为非有理数：假設 $\sqrt{2}$ 为有理数，那末 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$ 为旣約分数），由此 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，卽 $p^2=2q^2$。由此知 p 可被 2 整除，于是 $p=2r$，由 $p^2=2q^2$ 得 $(2r)^2=2q^2$ 卽 $4r^2=2q^2$ 所以 $2r^2=q^2$，由此知 q 亦可被 2 整除，从而得知 $\frac{p}{q}$ 为非旣約分数，这与假設 $\sqrt{2}$ 为有理数相矛盾，所以 $\sqrt{2}$ 为非有理数，因而所量得的点亦非有理点。这証明了直綫上除了有理点之外还存在着非有理点，实际上非有理点不仅存在且具有无限多，于此直綫上的点除了用有理数表示其坐标之外，还必須引进新的数，使之也与有理数作为有理点的坐标一样，使引进的新数作为非有理点的坐标，这种新数我們称它为无理数。从此直綫上的任一点，有且只有一实数与它相对应，反过来任一实数在直綫上亦有且只有一点与該实数相对应，这样实数的全体与直綫上点的全体建立了一一对应的关系，卽直綫上每一点都表示某一实数，反过来每一实数都表示直綫上某一点的坐标。

实数与直綫上的点旣可建立这种一一对应的关系，因此我們今

后將常常不加区别地用点 a 来表示数 a，或用数 a 来表示点 a。

§3 **不等式与絕对值** 不等式的性質：

1. 設 $a<b$，則 $a+c<b+c$（c 为任何实数）。
2. 設 $a<b$，$c<d$，則 $a+c<b+d$。
3. 設 $a<b$，$c>o$，則 $a\cdot c<b\cdot c$。
4. 設 $a<b$，$c<o$，則 $a\cdot c>b\cdot c$。
5. 設 $a<b$，則 $-a>-b$。
6. 設 $a<b$，a 与 b 为同号时，則 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$。

实数的絕对值。

所謂实数 a 的絕对值：就是当 $a\geqslant o$（一般，$a\geqslant b$ 表示 a 不小于 b 而是大于或等于 b 的意思）时將 a 本身称为 a 的絕对值，当 $a<o$ 时，把实数 $-a$ 称为 a 的絕对值，以 $|a|$ 来表示 a 的絕对值。卽

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant o \text{ 时}\\ -a, & \text{当 } a<o \text{ 时。}\end{cases}$$

由上定义可知

1. $|a|=|-a|$，$-|a|\leqslant a$，$a\leqslant|a|$；
2. $|a|<b$ 和 $-b<a<b$ 是等价的。

〔証〕$-b<a<b$ 是 $\begin{cases}-b<a\\ a<b\end{cases}$ 的連写，

因此我們只須証 $|a|<b$ 和 $\begin{cases}-b<a\\ a<b\end{cases}$ 等价。

由 $\begin{cases}-b<a\\ a<b\end{cases}$ 得 $|a|<b$：

因为 a 与 $-a$ 中必有一个等于 $|a|$，

因而由 $\begin{cases}a<b\\ -a<b\end{cases}$ 得 $|a|<b$。

另一方面，由 $|a|<b$ 得 $\begin{cases}a<b\\ -a<b\end{cases}$，

因为 $a \leqslant |a|$，$-a \leqslant |a|$，

所以 $\begin{cases} a<b \\ -a<b \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -b<a \\ a<b \end{cases}$。

同样可得 $|a| \leqslant b$ 和 $-b \leqslant a \leqslant b$ 是等价的。

3. $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$，对任何 a、b 均成立。

〔証〕 由 $\begin{cases} a \leqslant |a| \\ -a \leqslant |a| \end{cases}$ 及 $\begin{cases} b \leqslant |b| \\ -b \leqslant |b| \end{cases}$

得 $\begin{cases} a+b \leqslant |a| + |b| \\ -(a+b) \leqslant |a| + |b| \end{cases}$。

由 1 得知 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$。

由 $|a| = |a+b-b| \leqslant |a+b| + |b|$，

得 $|a| - |b| \leqslant |a+b|$。

將 a 与 b 对調又得 $|b| - |a| \leqslant |a+b|$。

$\begin{cases} |a| - |b| \leqslant |a+b| \\ -(|a| - |b|) \leqslant |a+b| \end{cases}$，

所以 $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b|$。

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$，当 $|b| \neq 0$ 时 $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$。

例：$(1+a)^n \geqslant 1 + a \cdot n$，　　（当 $a>0$ 时）。（Bernoulli 不等式）。

〔証〕用归納法：

当 $n=1$ 时，$(1+a)^n \geqslant 1+a \cdot n$ 成立；

假設 $n-1$ 时，$(1+a)^{n-1} \geqslant 1+a(n-1)$ 成立。

在 $(1+a)^{n-1} \geqslant 1+a(n-1)$ 兩端乘上 $(1+a)$，

因为 $a>0$，所以 $1+a>0$，

故得 $(1+a)^n \geqslant [1+a(n-1)](1+a)$

$$= 1+a \cdot n - a + a + a^2(n-1)$$

$$\geqslant 1 + a \cdot n。$$

（因为 $a^2(n-1) \geqslant 0$）

所以 $(1+a)^n \geqslant 1+a \cdot n$。

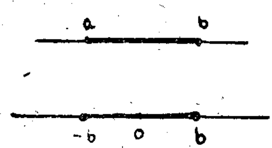
§4 **实数集** 自然数的全体成一集，有限个自然数亦成一集，平面上所有的点亦構成一集，集中每一个对象称为該集的元素，若用 a 表示集 M 的一元素，我們用 $a\in M$ 的記号来表示。一个集的元素全是实数时，該集称为实数集。

如 (a) 1, 3, 5。

(b) 全体自然数。

(c) 全体实数。

(d) 所有滿足 $a<x<b$ 的实数。特例 $|x|<b$。



(图 1)

(e) 所有滿足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数。特例：$|x|\leqslant b$。

一个只含有限个元素的集称为有限集。

一个含有无限个元素的集称为无限集。

有限的实数集必有最大数。

无限的实数集则不一定有最大数。如 (b) (c) (d)。

无限集中除了 (b) 和 (c) 外，对分析来說最重要的要算 (d) 和 (e) 这类的集，我們称这类集叫做区間，(d) 叫开区間，以 (a,b) 表之，(e) 叫做閉区間以 $[a,b]$ 表之，a 与 b 叫做区間的端点，閉区間包含它的兩个端点，开区間则不包含它的端点。如图 1 全部实数，全部大于 a 的实数，全部小于 b 的实数也可算作开区間，分别用 $(-\infty,\infty)$，(a,∞)，$(-\infty,b)$ 来表示它們。若一个区間的兩个端点之一包含于該区間的話，称半开区間以 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 的記号表之。

如果一个集內所有的数都不大于某一定数的話，这定数叫做該集的一个上界，而該集称为有上界，同理可知下界和有下界的意思。

如果一个集旣有上界又有下界，就称該集为有界，若集 M 为有界，则对其任一元素 $x\in M$，$|x|\leqslant c$，c 为某定数。

§5 **函数概念** 在我們周圍世界中，所有的自然現象和一切的工程技术过程中的量都是相互联系，相互制約着的，而不是彼此孤立的，科学研究的任务首先就应該去揭露存在于它們之間的那些联系和

規律，各个量之間的依从关系，于是在数学上便引入了函数的概念。

我們随时随地都会遇到，由于一些量的变化而引起另一些量的变化。

如 1. 一天中的温度是随时間而变化的，从 0 时到 24 时之內，每一时刻都有每一时刻的温度与它相对应，这表明温度这个量和时間这个量之間是相互联系着的。

2. 彈性物体的伸長度 x 在一定的限度內和作用力 F 成正比，

即 $F=kx$ （k 表伸長系数），

这就是虎克定律，也說明了量 x 与量 F 之間是緊密地相联系着的。它們之間每一 x 都有每一 x 的 F 与 x 相对应。

3. 在金屬樞軸受热的过程中有兩个量，温度以 t 表示，軸長用 l 表示，在 t 与 l 之間存在着一种依从关系，这种关系表現为：对于 t 的每一定值，卽有長度 l 的一定值与它相对应，l 的値每次均由 t 的値来确定，l 是以 t 的値为轉移的，为表示 l 与 t 之間的这种依从关系，我們通常称 l 是 t 的函数。

4. 我們学校中，每年入学新生中工农子弟占全体新生的比例数，与年分之間亦存在着一种依从关系，它表現为：对于每一年分都有一比例数与它相对应，比例数均由年分确定，比例数是以年分为轉移的，这个依从关系，我們通常称比例数是年分的函数。

从上面的例子中，一个量的値总有另一个量的某一个确定的値与它对应，象这样一个量联系着另一个量的現象，在我們日常生活，生产，科学技术中几乎到处皆是，我們現在就它們共同的性質給出函数的普遍定义。

給定某一个集 M，M 內每一个元素 x，总有某一个确定的元素 y 和它对应，我們称 y 是一个确定在集 M 上的 x 的函数。

y 的每一个値称为这函数的一个函数値，M 称为这函数的定义域，所有 y 的値組成的集称为函数値域，通常称 x 为自变量，y 为因变量，习惯上常用 x 表自变量，y 表因变量，当然自变量与因变量用其他字母表示亦完全可以，不必受此限制。

若自变量不止一个而有二个时，如在§1中所提到的波义耳——查里定律

$$PV=KT,$$

P 与 V 均为变量时，則 T 称为是两个变量 P、V 的一个二元函数。

若一个函数只是通过一个方程来表示出函数值与自变量的值之关系，就叫它做由这方程所定的隐函数。例如函数 $y=(1+x)^{\frac{5}{3}}$ 也可看作是由方程

$$y^3-(1+x)^5=0。$$

所定的自变量 x 的隐函数。从另一方面看，这同一方程也定了一个作为自变量 y 的隐函数 x——那就是 $x=y^{\frac{3}{5}}-1$ *。

从上述可知一个函数可由下列两个因素确定：

1．函数的定义域。

2．整个的对应关系，亦称函数关系。它可理解为一个法則，根据它每一自变量的值对应一个完全确定的函数值，这种对应关系或法則常用字母 f 来表示。

这样我們就可用 $y=f(x)$，$x\epsilon M$ 来表示定义域为 M，函数关系为 f 的函数，或 $f(x)$，$x\epsilon M$。如 $S=\pi x^2$，$x\epsilon(0,\infty)$ 或 $0<x<\infty$，当然定义域亦可以是閉区間或为半开区間。

不同的函数，用不同的字母表示如：$f(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 等。

注意二点：

1．在函数的定义中，要求一个 x 值只有一个 y 值与它对应，而并不要求一个 y 值只对应于一个 x 值，即使是所有 x 值只对应于一个 y 值亦是允許的，这种函数值是一个常数。这里 x 表自变量，y 表因

---

* $y=(1+x)^{\frac{5}{3}}$ 无非是就这方程，把 y 介出来的結果，同样 $x=y^{\frac{3}{5}}-1$ 是把 x 介出来的結果，因此把它們代入原方程时，自然适合，例如将 y 值代入，得 $(1+x)^{\frac{5}{3}\cdot 3}-(1+x)^5\equiv 0$

变量。

所謂函数的相等卽指：1. 兩函数的定义域相同。2. 对于在定义域內的每一个值，兩函数都有相同的函数值与它們对应。

§6 **函数的各种表示法** 为了使函数的概念更加具体，因此怎样建立函数关系和怎样表示函数的問題，就成为必須解决的問題。

1. 列表法：函数 $f(x)$ 可以用一張含有自变量 x 的值与函数 $f(x)$ 的对应值的表格来表示，如 M 为 1 至 5 的自然数，有下面的对应关系：

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	3	8	100	10.4

便表示定义在 M 上的一个函数

列表法就是將 x 值及其对应的 y 值一一列举来表示函数的方法。

例如对数表就是函数列表法的一个例子，这些正数就是自变数的值，而这些正数的对数就是对应的函数值。

列表法的优点：我們可以很快地找到与我們所查自变数相对应的函数值，可避免在函数研究中的麻煩計算，在試驗工作中常用此法。缺点：如果定义域是一个无限集，所列表便不可能概括全部函数值。

2. 解析法：兩个变量的对应关系，借助于公式或解析式直接指出，須对自变量施行运算（加，减，乘，除，乘方，开方，对数，三角）才能得出函数的对应值，我們称这种表示法为解析法。

如：1. $y=x^2-3x+4,(x>1)$； 2. $y=\frac{1}{1+x^2},(-1<x<1)$；

3. $y=\sqrt{x},(x\geqslant 0)$； 4. $y=\sin x+\cos x,(-\infty<x<\infty)$；

5. $y=\ln x+x,(x>0)$ 等等。

用分析法表示函数时，如果定义域剛好是所有使这分析式有意义的自变量的值（存在域），那么，这定义域也可不必指出。例如 3、