

修正課程標準適用

初中幾何教本

(下冊)

駱師曾編

開明書店印行

下 册 目 次

第三編 理解幾何學(續)

第 一 章

圓的基本定理

§ 254.	直線與圓	1
§ 255.	弧	1
§ 256.	圓心角,圓周角	2
§ 257.	弧度與角度	2
習題四十九		2
§ 258.	等圓心角對等弧定理	2
§ 259.	等弧對等圓心角定理	2
§ 260.	等弧對等弦定理	2
§ 261.	等弦對等弧定理	6
§ 262.	等弧證法	7
習題五十		7
§ 263.	垂徑平分弦弧定理	9
§ 264.	弦距圓心等遠定理	10
§ 265.	圓心距弦等遠定理	11
§ 266.	等弦證法	12
§ 267.	弦距圓心遠近定理	12
§ 268.	圓心距弦遠近定理	13
§ 269.	不等弦證法	14
習題五十一		15
§ 270.	弓形	16
§ 271.	圓周角定理	16

§ 272.	圓與多角形	18
§ 273.	內接四邊形對角定理	19
§ 274.	內接四邊形判別定理	19
習題五十二		22
§ 275.	切線定理	23
§ 276.	切線長	24
§ 277.	切線長定理	24
§ 278.	弦切角定理	25
§ 279.	弦交角定理	26
§ 280.	切割線交角定理	27
§ 281.	平行線截等弧定理	28
§ 282.	三圓關係	29
§ 283.	連心線	32
§ 284.	公弦	33
§ 285.	二圓相交定理	33
§ 286.	公切線	33
§ 287.	二圓相切定理	34
習題五十四		35

第 二 章

關於圓的作圖題與軌跡

§ 288.	圓過三點作圖題的證明	39
--------	------------	----

§ 289. 求圓心作圖題的證明	40
習題五十五	40
§ 290. 過圓上定點的切線作圖題的證明	41
§ 291. 過圓外定點的切線作圖題的證明	41
習題五十六	42
§ 292. 三角形內切圓作圖題	42
§ 293. 傍切圓	43
§ 294. 容定角弓形作圖題	44
§ 295. 公切線作圖題	44
習題五十七	46
§ 296. 三角形頂點軌跡定理	47
§ 297. 軌跡交截法	48
習題五十八	50

第三章

比例, 相似形

§ 298. 幾何圖形的度量	52
§ 299. 幾何圖形的比	52
§ 300. 二量的關係	53
§ 301. 比例	53
§ 302. 比例基本定理	54
§ 303. 積化比例定理	54
§ 304. 反比定理	54
§ 305. 更比定理	55
§ 306. 合比定理	55
§ 307. 分比定理	55
§ 308. 合分比定理	55

§ 309. 冪根比定理	56
§ 310. 和比定理	56
§ 311. 積比定理	56
§ 312. 倍比定理	57
習題五十九	57
§ 313. 內分外分	58
§ 314. 比例線段	58
§ 315. 三角形一邊平行線定理	59
§ 316. 三角形二邊分成比例線段定理	61
習題六十	62
§ 317. 依定比分定線段作圖題	63
§ 318. 第四比例項作圖題	64
§ 319. 三角形內角平分線定理	65
§ 320. 三角形外角平分線定理	66
習題六十一	67
§ 321. 相似形	69
習題六十二	70
§ 322. 相似三角形從互等角判別定理	72
§ 323. 相似三角形從各邊成比例判別定理	73
§ 324. 相似三角形從一角相等夾邊成比例判別定理	74
§ 325. 相似三角形高與邊成比例定理	76
習題六十三	77

§ 326. 比例與相似形的應用.....78

§ 327. 比例規..... 78

§ 328. 畫圖縮放儀器.....79

§ 329. 對角線尺.....79

習題六十四.....80

§ 330. 相似形周界定理.....82

§ 331. 相似形性質定理.....83

§ 332. 相似形判別定理.....84

§ 333. 相似形作圖題.....85

習題六十五.....86

§ 334. 相交二弦定理.....87

§ 335. 割線定理.....88

§ 336. 切割線定理.....89

習題六十六.....90

§ 337. 射影.....9

§ 338. 股與弦上射影關係定理.....91

§ 339. 高與兩股射影關係定理.....93

§ 340. 比例中項作圖題.....94

習題六十七.....94

第 四 章

畢氏定理及推廣

§ 341. 畢氏定理.....97

習題六十八.....98

§ 342. 畢氏推廣定理一(銳角對邊定理).....99

§ 343. 畢氏推廣定理二(鈍角對邊定理).....100

習題六十九.....101

§ 344. 三角形中線定理...103

§ 345. 三角形分角線與邊關係定理.....104

§ 346. 三角形外接圓直徑與高乘積定理.....105

習題七十.....106

第 五 章

直線形的面積

§ 347. 等積形.....109

§ 348. 等高二矩形面積比定理.....109

§ 349. 二矩形面積比定理 110

§ 350. 矩形面積定理.....111

習題七十一.....112

§ 351. 平行四邊形面積定理.....113

§ 352. 三角形面積定理...114

§ 353. 梯形面積定理.....115

§ 354. 畢氏定理別證.....116

習題七十二.....118

§ 355. 一角相等的三角形面積比定理.....120

§ 356. 相似三角形面積比定理.....121

§ 357. 相似多角形面積比定理.....122

習題七十三.....124

§ 358. 二正方形和的等積正方形作圖題.....125

- § 359. 二相似多角形和的
等積多角形作圖題 126
- § 360. 多角形變成等積三
角形作圖題……127
- § 361. 平行四邊形變成等
積正方形作圖題 …128
- 習題七十四 ………129

第六章

正多角形與圓的度量

- § 362. 正多角形外接圓定
理 ………133
- § 363. 正多角形內切圓定
理 ………134
- § 364. 圓內接正多角形定
理 ………135
- § 365. 圓外切正多角形定
理 ………136
- 習題七十五 ………138
- § 366. 正多角形相似定理 139
- § 367. 正多角形周界比定
理 ………140

- § 368. 正多角形面積定理 142
習題七十六 ………143
- § 369. 圓內接正方形作圖
題 ………143
- § 370. 圓內接正六邊形作
圖題 ………145
- § 371. 圓內接及外切正 n
邊形長的關係公式 146
- § 372. 圓內接正 n 邊形及
正 $2n$ 邊形邊長的關
係公式 ………148
- § 373. 同圓內接外切正多
角形的周界 ………150
- § 374. 圓周與內接外切正
多角形周界的比較 151
- 習題七十七 ………151
- § 375. 圓周相比定理 ………153
- § 376. 圓周率 ………154
- § 377. 圓周長定理 ………154
- § 378. 圓面積定理 ………154
- 習題七十八 ………155
- 總習題 ………153

第四編 數值三角

第一章

三角函數定義

- § 379. 三角法 ………169
- § 380. 三角函數 ………169
- § 381. 等角的三角函數不

- 變定理 ………170
- § 382. 三角函數的線段表
示 ………171
- 習題七十九 ………173
- § 383. 已知一銳角求三角
函數法 ………174

- § 384. 已知三角函數求銳角法176
- § 385. 銳角正弦餘弦的增減179
- § 386. 銳角正切正割的增減180
- § 387. 銳角餘切餘割的增減181
- 習題八十182

第 二 章

基本關係式,

三角函數表的用法

- § 388. 同角的三角函數相互關係183
- § 389. 三角函數的關係圖 184
- § 390. 三角函數的互換186
- 習題八十一188
- § 391. 簡單三角恆等式188
- 習題八十二190
- § 392. 餘角的三角函數191
- § 393. 45° 的三角函數192
- § 394. 60° 及 30° 的三角函數192
- § 395. 0° 的三角函數194
- § 396. 90° 的三角函數194
- 習題八十三195
- § 397. 三角函數真數表196
- § 398. 有銳角求函數值196
- § 399. 有函數值求銳角198
- § 400. 簡單三角方程199
- 習題八十四200

第 三 章

直角三角形解法

- § 401. 直角三角形解法202
- § 402. 已知一銳角與弦的解法202
- § 403. 已知一銳角與一股的解法203
- § 404. 已知弦與一股的解法204
- § 405. 已知二股的解法205
- 習題八十五206
- § 406. 等腰三角形解法208
- § 407. 正多角形解法209
- § 408. 屬於直角三角形解法的問題211
- 習題八十六212

第 四 章

簡易測量問題

- § 409. 測量術215
- § 410. 捲尺215
- § 411. 直立線直立面直立角215
- § 412. 水平線水平面水平角215
- § 413. 仰角俯角216
- § 414. 羅盤216
- § 415. 方位問題217
- 習題八十七219
- § 416. 經緯儀220
- § 417. 代用經緯儀221

§ 418 象限儀.....	221
§ 419. 高與距離問題.....	222
習題八十八	225
總習題	226

附 錄

三角函數表.....	233
中英名詞對照表.....	239

修正課程標準適用

初中幾何教本

下 冊

第三編 理解幾何學(續)

第一章 圓的基本定理

§ 254. 直線與圓 一直線與一圓只相遇於一點的,叫做切線;此相遇的一點,叫做切點.一直線與一圓相交於二點的,叫做割線.一線段的兩端在圓上的,叫做弦;故直徑便是過圓心的弦(如圖 401).

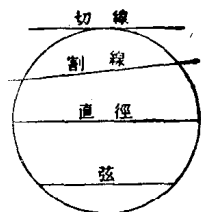


圖 401.

§ 255. 弧 一圓被一弦所分的二部分,部叫做弧;大的一部分叫做優弧,小的一部分叫做劣弧;普通說弧,都指劣弧.弧的記號是 \frown , 如圖 402. ACB 是劣弧,記作 \widehat{ACB} 或 \widehat{AB} ; ADB 是優弧,記作 \widehat{ADB} .

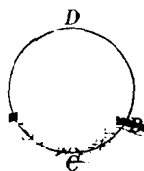


圖 402.

§ 256. 圓心角, 圓周角 二半徑所成的角, 叫做圓心角. 二弦相交於圓上一點, 所成的角, 叫做圓周角. 如圖 403, $\angle AOB$ 是圓心角, $\angle EDF$ 是圓周角.

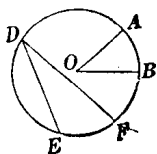


圖 403.

§ 257. 弧度與角度 將一圓分成 360 等分, 每一等分的弧與他所對的圓心角, 都叫做一度, 就是圓心角的度數, 與所對弧的度數相等, 故可用弧量角. 但角與弧的大小, 都指度數, 與半徑的大小無關. 若講到弧的長短, 就與半徑的大小有關, 半徑大的圓上一度弧, 必比半徑小的一度弧要長.

習題四十九

1. 什麼叫做圓?
2. 同圓或等圓的半徑, 有什麼關係? 直徑呢?
3. 半徑相等的圓有什麼關係?
4. 直徑將圓分成怎樣的兩部分?
5. 互相垂直的二直徑, 怎樣分圓?
6. 一圓可有兩個中心麼?
7. 點與圓心的距離, 大於半徑, 則點在那裏? 等於半徑呢? 小於半徑呢?
8. 割線與切線有什麼分別?
9. 割線與弦有什麼分別?
10. 直徑與弦有什麼分別?

11. 從圓外到圓可以畫幾種直線?
12. 優弧比半圓大呢還是小? 劣弧呢?
13. 圓心角與圓周角有什麼分別?
14. 弧的大小與半徑的大小, 有沒有關係? 弧的長短呢?
15. 弧的度數與所對圓心角的度數等不等?

§ 258. 等圓心角對等弧定理 在同圓或等圓內, 設二圓心角相等, 則所對的弧也相等.

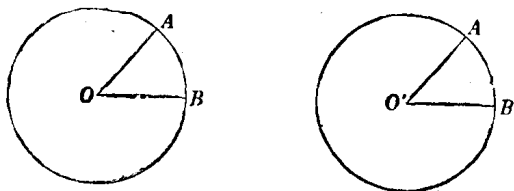


圖 404.

〔已知〕 等圓 $O, O', \angle O = \angle O'$.

〔求證〕 弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

〔解析〕 依上節弧度與角度定義, 此定理能成立很明. 倘要另行證明, 可用疊合證法.

〔證明〕

敘 述

- (1) 將圓 O' 疊在圓 O 上, 使 $O'B'$ 與 OB 重合.
- (2) $O'A'$ 與 OA 重合.

理 由

- (1) 移形公理及等半徑定理.
- (2) 已知 $\angle O = \angle O'$ 及等半徑定理.

(3) 弧 $A'B'$ 與弧 AB 重

(3) 圓的定義.

合.

(4) \therefore 弧 $A'B' =$ 弧 AB .

(4) 移形公理.

如在同圓內,只要將圓依圓心旋轉,使角邊重合.

大圓心角對大弧系 在同圓或等圓內,設二圓心角不等,則大圓心角所對的弧也大.

§ 259. 等弧對等圓心角定理 在同圓或等圓內,設二弧相等,則所對的圓心角也相等.

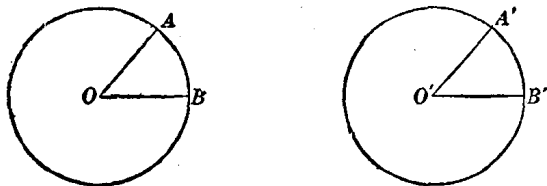


圖 405.

〔已知〕 等圓 O, O' , 弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

〔求證〕 $\angle O = \angle O'$.

〔解析〕 此是前節的逆定理,也可用疊合證法.

〔證 明〕

敘 述

(1) 將圓 O' 疊在圓 O 上.
使 $O'A'$ 落在 OA 上, A' 與 A
重合.

(2) 弧 $A'B'$ 落在弧 AB 上.

(3) B' 與 B 重合.

理 由

(1) 移形公理,及等半徑
定理.

(2) 已知圓 $O =$ 圓 O' .

(3) 已知弧 $AB =$ 弧 $A'B'$.

(4) $O'B'$ 與 OB 重合.

(4) 直線確定公理.

(5) $\therefore \angle O = \angle O'$.

(5) 移形公理.

大弧對大圓心角系 在同圓或等圓內,設二弧不等,則大弧所對的圓心角也大.

§ 260. 等弧對等弦定理 在同圓或等圓內,設二弧相等,則所對的弦也相等.

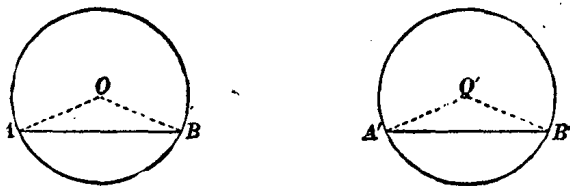


圖 406.

〔已知〕 等圓 O, O' , 弧 $AB = \text{弧 } A'B'$.

〔求證〕 $AB = A'B'$.

〔解析〕 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$, 先證明 $\angle O = \angle O'$, 再證明 $\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$, 即可證明 $AB = A'B'$.

〔證明〕

敘述

理由

(1) 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$.

(1) 直線確定公理.

(2) 弧 $AB = \text{弧 } A'B'$.

(2) 已知.

(3) $\angle O = \angle O'$.

(3) 等圓心角對等弧定理.

(4) $AO = A'O', BO = B'O'$.

(4) 等半徑定理.

(5) $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$.

(5) $s. a. s. = s. a. s.$

(6) $AB = A'B'$.

(6) 全等形對應邊.

大弧對大弦系 在同圓或等圓內, 設二弧不等, 則大弧所對的弦也大.

§ 261 **等弦對等弧定理** 在同圓或等圓內, 設二弦相等, 則所對的弧也相等.

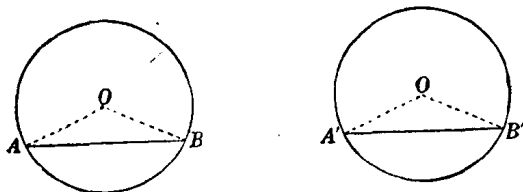


圖 407.

[已知] 等圓 O, O' , 弧 $AB = \text{弧 } A'B'$.

[求證] $AB = A'B'$.

[解析] 此是前節的逆定理, 先連結 $OA, OB, O'A', O'B'$, 證明 $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, 即可從 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ 證明弧 $AB = \text{弧 } A'B'$.

[證明]

敘述	理由
(1) 連結 $OA, OB, O'A', O'B'$.	(1) 直線確定公理.
(2) $AB = A'B'$.	(2) 已知.
(3) $OA = O'A', OB = O'B'$.	(3) 等半徑定理.
(4) $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$.	(4) $s. s. s. = s. s. s.$
(5) $\angle AOB = \angle A'O'B'$.	(5) 全等形對應角.
(6) \therefore 弧 $AB = \text{弧 } A'B'$.	(6) 等圓心角對等弧定理.

大弦對大弧系 在同圓或等圓內，設二弦不等，則大弦所對的弧也大。

§ 262. **等弧證法** 要證明同圓或等圓內的二弧相等，可證明此二弧所對的圓心角相等，或所對的弦相等。

習 題 五 十

1. 設 AB, CD 是同圓的二直徑，試證 $\text{弧 } AC = \text{弧 } BD$ 。
2. 如圖 408, O 是圓心, $\angle AOB = \angle COD$ 。

試證 $\text{弧 } ABC = \text{弧 } BCD$ 。

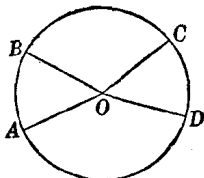


圖 408.

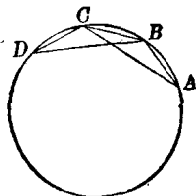


圖 409.

3. 如圖 409, 弦 $AB = \text{弦 } BC = \text{弦 } CD$ 。

試證 $\text{弦 } AC = \text{弦 } BD$ 。

4. 圓心角的平分線，必平分此角所對的弧。

5. 如圖 410, ABC 是正三角形, O 是圓心, 求 $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ 各是幾度?

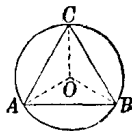


圖 410.

6. 將一圓分成六等分, 試證每一等分弧所對的弦, 必等於半徑(如圖 411, $AB=OA$).

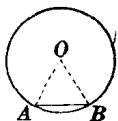


圖 411.

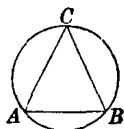


圖 412.

7. 如圖 412, $\angle A = \angle B$, 試證

弧 $AC =$ 弧 BC .

8. 如圖 413, AB 是直徑, OD 是半徑, AC 是弦, $\angle BOD = 2\angle A$, 試證 弧 $BD =$ 弧 BC .

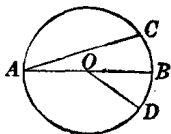


圖 413.

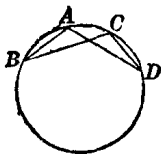


圖 414.

9. 如圖 414, 設相交二弦 $AD = BC$, 試證 $AB = CD$.

10. 如圖 415, 弧 AB 是弧 CD 的二倍, 則圓心角 AOB 等於 COD 的二倍, 弦 AB 小於 CD 的二倍.

[提示] E 是弧 AB 的中點, 連結 AE , OE , BE .

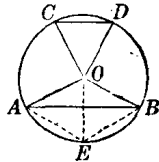


圖 415.

[注意] 弧與所對的圓心角成正比例, 與所對的弦不成正比例.

11. 如圖 416, P 是圓 O 上一點, 作直徑 PA , 弦 PB , 又作半徑 OC 平行於 PB . 試證 OC 平分弧 AB .

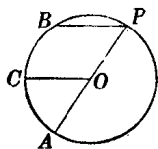


圖 416.

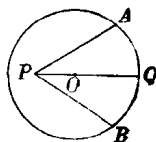


圖 417.

12. 如圖 417, P 與圓 O 上二點 A, B 等距離, 連結 PO 並延長至 Q , 試證 PQ 平分弧 AB .

13. 試證直徑是圓的最長弦.

14. 圓內二弦若互相平分, 則必是直徑.

§ 263. 垂徑平分弦弧定理 垂直於弦的直徑, 平分此弦與他所對的弧.

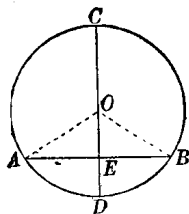


圖 418.

〔已知〕 圓 O 的直徑 CD 垂直於 AB .

〔求證〕 $AE = EB$, 弧 $AD =$ 弧 DB , 弧 $AC =$ 弧 CB .

〔解析〕 連結 OA, OB . 先證明 $\triangle AOE \cong \triangle BOE$, 即可證明 $AE = EB$. 又從 $\angle AOE = \angle BOE$, 可證明 弧 $AD =$ 弧 DB , 弧 $AC =$ 弧 CB .

〔證明〕

敘述

- (1) 連結 OA, OB .
- (2) $OE \perp AB$.
- (3) $\angle AEO = \angle BEO$
 $= \angle R$.
- (4) $OA = OB$.
- (5) $OE = OE$.
- (6) $\triangle AOE \cong \triangle BOE$.
- (7) $\therefore AE = EB$,
 $\angle AOE = \angle BOE$.
- (8) \therefore 弧 $AD =$ 弧 DB .
- (9) 弧 $DAC =$ 弧 DBC .
- (10) \therefore 弧 $AC =$ 弧 CB .

證明

- (1) 直線確定公理.
- (2) 已知.
- (3) 直角定義, 直角公理.
- (4) 等半徑定理.
- (5) 公用.
- (6) 直角 \triangle 全等定理二.
- (7) 全等形對應部分.
- (8) 等圓心角對等弧定理.
- (9) 直徑分圓定理.
- (10) 等量減法公理.

弦的垂直平分線系 弦的垂直平分線, 必通過圓心, 且平分他所對的弧.

過弦中點的半徑系 過弦中點的半徑, 必垂直於此弦.

§ 264. 弦距圓心等遠定理 在同圓或等圓內, 等弦距圓心等遠.

〔已知〕 圖 O 內, $AB = CD, OE \perp AB, OF \perp CD$.

〔求證〕 $OE = OF$.