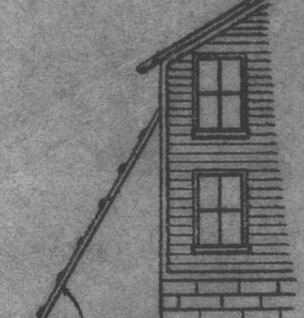
GRANVILLE
SMITH
MIKESH

平面三角學

邱調梅譯　曹敬康校訂



世界書局發行

中華民國三十五年十二月新十三版

葛氏平面三角學

實價國幣

外加運費匯費

原著者 Granville-Smith Mikesh

譯者 邱調梅

校訂者 曹敬康

發行人 李煜瀛

出版者 世界書局

發行所 世界書局

學習要點

者對此三表均應明瞭其應用，熟練其翻檢之方法。則遇題目中需用此種數値時，祇須在附錄中一翻卽得。此爲學習三角學基本之技能，學者不可不注意及之。

須熟記各種公式及恒等式　三角解析一章，爲三角學中最重要亦爲最有興趣之一章。在着手解析各種三角習題或證明各種恆等式時，必須應用各種公式及恆等式。此種公式及恆等式在本書第十章中均有詳細之表列，學者當熟讀牢記，並須明瞭其運用之方法，則在着手證明或解析三角式時方可得心應手，運用自如。而三角方程之題目，亦可迎刃而解矣！

須熟繪各種圖形及圖解　許多三角習題之解答，均須賴圖形以爲助。尤以證明某項定律時爲然。蓋其圖形不啻爲解答時之鎖鑰。祇須能繪出圖形，卽可獲得不少暗示，而此項定律之證明亦可由此種暗示而獲得不少容易。且有數種定理，可由繪出正確之圖形而獲得解答時之領悟。於是數學之推理及思考，亦容易獲得門徑矣！

以上爲學習三角學時之個人心得，讀者若能秉此學習，[illegible]有助於學習之進步焉！

增訂版序

在增訂葛氏平面三角學時，增訂者深感此葛氏課本之能普及於各校師生間.解釋之簡潔，例題之豐富，與應用題範圍之廣大由以致之.現所改訂者其目的乃在更改其注意點耳.在此增訂本中，於三角函數更爲注意.故從直角三角形中分離而另述之.並對函數體裁力求其簡明.在此解釋之後繼之爲應用，分載於第四章及第五章中.而第五章則更使用對數，使計算更屬簡易.再後一章爲三角法之分析.此章有數處改訂，學者須注意及之；其次三角恆等式與方程式亦經改訂.如此編列，則應用方面在三角法之分析之前即可研究矣.

本書之附錄仍爲四位數字表與原版同.所不同者爲增加表四與表五.此二表所載者爲正弦，餘弦，正切與餘切之眞數.此外更加入各表之用法.各表在計算中一律準確至四位有效數字，與原版同.惟再須注意者，即在所加入之二表中，其數值皆至四位有效數字，至如何求得四位有效數字之法，則亦有說明.

所有問題，與原版同，其角皆以度與分及度與度之小數表之.量角之法由教師選擇之.而諸表可供任何組問題之用.

P. F. Smith

J. S. Mikesh

目　錄

第一章　三角函數

第二章　基本關係式；化法方式

第三章 線定義及圖解

第四章 應用

第五章 對數之理論及應用

第六章 三角學之解析

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

第八章 公式摘要

平面三角學

第一章

三角函數

1. 三角法 在三角學中,吾人所欲研究之數量,謂之三角函數.本章之目的乃在說明此類函數之定義及其初步應用.

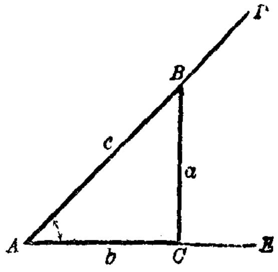
2. 變數;常數 凡一問題中之數量,非爲變數卽爲常數.故此二類數量之區別,必須精確了解.一數量在一問題中,可以任何數值表之者謂之變數.變數常以英文末尾字母 x, y, z 等表之.

一數量,其數值在一問題中爲固定不變者謂之常數,數字或絕對常數,在一切問題中,常保持其同一之值,如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ 等等.不定常數者僅在特定問題中時,其值爲固定.常數常以英文首數字母 a, b, c 等表之.

3. 函數 一變數之函數,爲一數量,其值依變數之值而定.一正方形之面積爲其邊長之函數,而一球形之體積,爲其直徑之函數.同理,三項式 x^2-7x-6 爲 x 之函數,因此式之值須依 x 之值而定.在三角函數中,變數爲角之度量,而此等函數之值,常依已知角之度量而定.現暫以度數表一角之量.以後吾人將論及角之第二種測量法.

4. 一銳角之三角函數 兩線相交成一角,其概念已詳具於初等平面幾何學中,玆先就銳角討論之.

設 EAD 爲一小於 $90°$ 之角，卽銳角.自任一邊上一點 B，作一線垂直於他邊，於是成一直角三角形，如 ABC. 今以大楷字母 A, B, C，表角之度量，小楷字母 a, b, c，表其相應對邊之長.* 在幾何學中，吾人已知此三角形之角與邊有相互之關係.三角法卽表示此等相互關係之實性，而用各邊之比以達此目的.此諸邊之比，謂之**三角函數**.一銳角(如 A)有六個三角函數，玆表明如下：



$\sin A$,	讀作	"A 之正弦 (sine)";
$\cos A$,	讀作	"A 之餘弦 (cosine)";
$\tan A$,	讀作	"A 之正切 (tangent)";
$\csc A$,	讀作	"A 之餘割 (cosecant)";
$\sec A$,	讀作	"A 之正割 (secant)";
$\cot A$,	讀作	"A 之餘切 (cotangent)".

此等三角函數(比)之定義如下(見上圖)：

$$(1)\ \sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{a}{c}\right); \qquad (4)\ \csc A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\frac{c}{a}\right);$$

$$(2)\ \cos A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{b}{c}\right); \qquad (5)\ \sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{c}{b}\right);$$

$$(3)\ \tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\frac{a}{b}\right); \qquad (6)\ \cot A=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\frac{b}{a}\right).$$

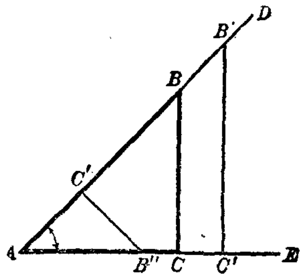
須注意者，任一函數之數值祇依 A 角之大小而定，而與所取 B 點之位置無關.

因，如設 B 爲 AD 上另一點，而 B'' 爲 AE 上任一點.作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD. 此等三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$ 必爲互等角三角形.因其俱爲直角三角形，而有一公共角 A 也.故彼等爲相似，而

* 直角三角形，如無其他說明，恆以 c 表斜邊，而以 C 表直角.

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

但此諸比式，均爲 A 之正弦。同理，吾人亦可證其他諸函數具此性質。凡此可表明吾人所擇之三角形，其大小可任意，因重要之點，祇在三角形各邊之相互關係，而與各邊之實在長度無關。



學者更須注意者，卽 A 角之大小有改變時，則第 2 頁上之六比，亦變其値。

此等函數(比)，在三角學研究中，最爲重要，如無透徹之了解，則進修非易，惟此等函數尙易記憶。學者祇須注意第一行三個函數各爲第二行三個函數之倒數可也。因

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

現將定義(1)至(6)應用於第 2 頁圖上之銳角 B，則對邊 $=AC=b$，鄰邊 $=BC=a$。故

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \csc B=\frac{c}{b};$$

$$\cos B=\frac{a}{c};\qquad \sec B=\frac{c}{a};$$

$$\tan B=\frac{b}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

與 A 角諸函數比較之，可知

$$\sin A=\cos B;\qquad \csc A=\sec B,$$

$$\cos A=\sin B;\qquad \sec A=\csc B;$$
$$\tan A=\cot B\qquad \cot A=\tan B.$$

因 $A+B=90°$(卽 A 與 B 互爲餘角),故上列諸結果,可簡述如下:

定理 一銳角之函數等於其餘角之餘函數(co-function).* 上述定理可書之如下:

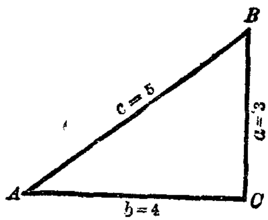
$$\sin A=\cos(90°-A);\qquad \csc A=\sec(90°-A);$$
$$\cos A=\sin(90°-A);\qquad \sec A=\csc(90°-A);$$
$$\tan A=\cot(90°-A);\qquad \cot A=\tan(90°-A).$$

例 1. 在一直角三角形中,$a=3$,$b=4$,求 A 角之諸函數.

【解】 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

應用第 2 頁 (1) 至 (6) 諸式,得

$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$
$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$
$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$

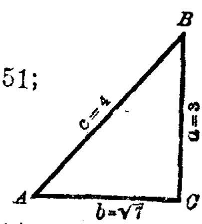


再求 B 角諸函數而比較其結果.

例 2. 在一直角三角形中,$a=3$,$c=4$. 求 B 角之諸函數.

【解】 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}=0.66;\quad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}=1.51;$$
$$\cos B=\frac{3}{4}=0.75;\quad \sec B=\frac{4}{3}=1.33;$$
$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}=0.88;\quad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=1.14.$$



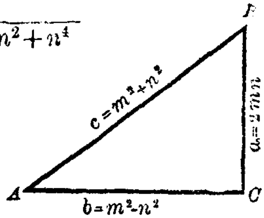
再求 A 角諸函數而比較其結果.

例 3. 在一直角三角形中,$a=2mn$,$b=m^2-n^2$,求 A 角之諸函

---

* 正弦與餘弦,正切與餘切,正割與餘割,均可互謂餘函數.

數.



【解】 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2$

$\sin A=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$; $\csc A=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$;

$\cos A=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$; $\sec A=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

$\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$; $\cot A=\dfrac{m^2-n^2}{2mn}$.

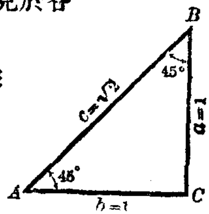
例 4. 在一直角三角形中,已知 $\sin A=\dfrac{4}{5}$, 及 $a=80$; 求 c.

【解】 從第 2 頁公式 (1) 中,得 $\sin A=\dfrac{a}{c}$.

以本題中之 $\sin A$ 及 a 之值代入,則得 $\dfrac{4}{5}=\dfrac{80}{c}$;

解之, 得 $c=100$. [答].

5. 45°,30°,60° 之函數值. 此等銳角常散見於各種三角學習題中,故須求其函數值而記憶之.



a. 求 45° 之各函數值. 作一等腰三角形 ABC, 則

$$\angle A=\angle B=45°.$$

因此處所重要者爲邊之關係, 而非其實長, 故可任意定各邊之長度,祇須使此直角三角形合於等腰之條件卽可.

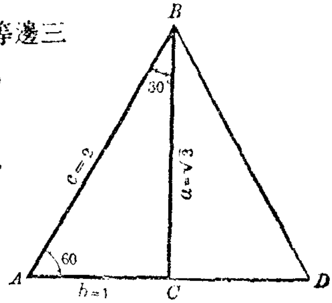
今設二等邊之長爲 1, 卽 $a=1$, $b=1$.

則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, 而得

$\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\csc 45°=\sqrt{2}$;

$\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sec 45°=\sqrt{2}$;

$\tan 45°=1$; $\cot 45°=1$.



b. **求30°及60°之函數值** 作一等邊三角形 ABD, 自 B 點作 BC 垂直於 AD, 則在三角形 ABC 中,

$$\angle A=60^\circ,\quad \angle ABC=30^\circ.$$

再以最短邊爲1, 即設 $b=1$. 於是 $c=AB=AD=2AC=2b=2$, 而

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

故

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};\qquad \sec 60^\circ=2;$$

$$\tan 60^\circ=\sqrt{3};\qquad \cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理,從同一三角形中,得

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2};\qquad \csc 30^\circ=2;$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};\qquad \cot 30^\circ=\sqrt{3}.$$

茲將其結果,列表如下:*

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

* 爲便於記憶起見,吾人可視第一(或 sine)行之各數爲 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 被 2 除而成.

第二(或 cosine)行內之各數,與第一行各數之順序相反.

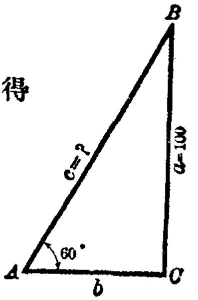
第三(或 tangent)行內之各數,乃以第二行各數,除第一行之各相當數而得.

學者應熟習此 45° 及 30°, 60° 之直角三角形．則即不記上表，亦可由心中想得此兩個直角三角形之圖形，而得其諸函數之值．

例　設一直角三角形之 $A=60^\circ$, $a=100$; 求 c.

【解】　因 A 角爲已知(故 A 角之任何函數亦爲已知)，而 A 之餘割中包含已知數 a 及未知數 c. 故可用此公式以求 c.

$$\csc A=\frac{c}{a}.\qquad\qquad \text{見第2頁之 (4)}$$



以 $a=100$ 及 $\csc A=\csc 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 代入上式，得

$$c=\frac{200\sqrt{3}}{3}=115.5.\quad [\text{答}]$$

B 之值爲何？試用上法以證 $b=57.7$.

習　題

下列各題皆限於直角三角形．答案之次序爲 sine, cosine, tangent.

1.　設 $a=8$, $b=15$; 求 A 角諸函數.

$$\text{答}\ \sin A=\frac{8}{17},\ \cos A=\frac{15}{17},\ \tan A=\frac{8}{15}\ \text{等}.$$

2.　設 $b=5$, $c=13$; 求 B 角諸函數.

3.　設 $a=0.6$, $b=0.8$; 求 B 角諸函數.

答　$\sin B=0.8$, $\cos B=0.6$, $\tan B=1.3$ 等.

4.　設 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 求 A 角諸函數.

5.　設 $a=5$, $c=7$; 求 B 角諸函數.

$$\text{答}\quad \frac{2\sqrt{6}}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{2\sqrt{6}}{5}\ \text{等}.$$

6.　設 $a=p$, $b=q$; 求 A 角諸函數.

7. 設 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 求 A 角諸函數.

答 $\dfrac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\dfrac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\dfrac{1}{n}\sqrt{mn}$ 等.

8. 設 $\sin A=\dfrac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a.

9. 設 $\cos A=0.44$, $c=30.5$; 求 b. 答 13.42.

10. 設 $\tan A=\dfrac{11}{3}$, $b=\dfrac{27}{11}$; 求 c.

11. 設 $\tan B=k$, $a=r$; 求 c. 答 $r\sqrt{k^2+1}$.

12. 若 $b=2a$, 求 A 角諸函數. 何故 a 與 b 均不見於答案中?

13. 一直角三角形之斜邊,為一腰之三倍. 求對此腰之角之諸函數. 何故此答案與此腰之長無關?

答 $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 等.

14. 設一直角三角形之一腰為16, 而對此腰之角之餘切為$\dfrac{3}{4}$. 則其他一邊之長為何?

15. 設 $A=30°$, $a=25$; 求 c, B, 及 b.

答 $c=50$, $B=60°$, $b=25\sqrt{3}$.

16. 設 $B=30°$, $c=48$; 求 b, A, 及 a.

17. 設 $B=45°$, $b=20$; 求 c, A, 及 a.

答 $c=20\sqrt{2}$, $A=45°$, $a=20$.

18. 若一腰為他腰之$\sqrt{3}$倍, 則此直角三角形之二銳角各為若干度?

19. 一直角三角形, 若其斜邊為一腰之$\sqrt{2}$倍. 則其銳角各為若干度?

答 45°, 45°.

20. 設 $\sec B=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 及 $c=480$, 求 B, A, a, 及 b.

21. 設 $A=30°$; 45°; 60°. 求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 之值. 答 1.

22. 試證 $\cos 60°=2\cos^2 30°-1$.