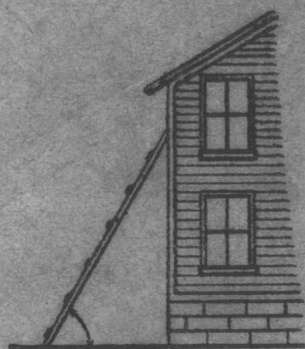


GRANVILLE
SMITH
MIKESH

平面三角學

邱調梅譯 曹敬康校訂



世界書局發行

中華民國三十五年十二月新十三版

葛氏平面三角學

實價國幣

外加運費匯費

版權所有
不准翻印

原著者

Granville-Smith

Mikesh

譯者

邱

調

梅

校訂者

曹

敬

康

發行人

李

煜

瀛

出版者

世

界

書

局

發行所

世

界

書

局

學習要點

者對此三表均應明瞭其應用，熟練其翻檢之方法。則遇題目中需用此種數值時，祇須在附錄中一翻即得。此為學習三角學基本之技能，學者不可不注意及之。

須熟記各種公式及恆等式 三角解析一章，為三角學中最重要亦為最有興趣之一章。在着手解析各種三角習題或證明各種恆等式時，必須應用各種公式及恆等式。此種公式及恆等式在本書第十章中均有詳細之表列，學者當熟讀牢記，並須明瞭其運用之方法，則在着手證明或解析三角式時方可得心應手，運用自如。而三角方程之題目，亦可迎刃而解矣！

須熟繪各種圖形及圖解 許多三角習題之解答，均須賴圖形以為助。尤以證明某項定律時為然。蓋其圖形不啻為解答時之鎖鑰。祇須能繪出圖形，即可獲得不少暗示，而此項定律之證明亦可由此種暗示而獲得不少容易。且有數種定理，可由繪出正確之圖形而獲得解答時之領悟。於是數學之推理及思考，亦容易獲得門徑矣！

以上為學習三角學時之個人心得，讀者若能秉此學習，**必能獲得進步**有助於學習之進步焉！

增訂版序

在增訂葛氏平面三角學時，增訂者深感此葛氏課本之能普及於各校師生間。解釋之簡潔，例題之豐富，與應用題範圍之廣大由以致之。現所改訂者其目的乃在更改其注意點耳。在此增訂本中，於三角函數更為注意，故從直角三角形中分離而另述之。並對函數體裁力求其簡明。在此解釋之後繼之為應用，分載於第四章及第五章中。而第五章則更使用對數，使計算更屬簡易。再後一章為三角法之分析。此章有數處改訂，學者須注意及之；其次三角恆等式與方程式亦經改訂。如此編列，則應用方面在三角法之分析之前即可研究矣。

本書之附錄仍為四位數字表與原版同。所不同者為增加表四與表五。此二表所載者為正弦，餘弦，正切與餘切之真數。此外更加入各表之用法。各表在計算中一律準確至四位有效數字，與原版同。惟再須注意者，即在所加入之二表中，其數值皆至四位有效數字，至如何求得四位有效數字之法，則亦有說明。

所有問題，與原版同，其角皆以度與分及度與度之小數表之。量角之法由教師選擇之。而諸表可供任何組問題之用。

P. F. Smith

J. S. Mikesch

目 錄

第一章 三角函數

節	頁
1. 三角法	1
2. 變數;常數	1
3. 函數	1
4. 一銳角之三角函數	1
5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數值	5
6. 作圖;量角器	9
7. 三角函數之數值表	9
8. 角之形成	10
9. 正角及負角	12
10. 任意值之角	12
11. 四象限	13
12. 平面上一點之直角坐標	14
13. 任意三角函數之定義	15
14. 三角函數之代數符號	17
15. 應用	17
16. 以一函數表其餘五個函數法	25

第二章 基本關係式;化法方式

17. 基本關係式	28
18. 以其餘五函數之一表一函數	30
19. 零之除法;無限大	34

20.	$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 之函數	35
21.	測角法	37
22.	弧度制	37
23.	化各三角函數爲銳角函數	43
24.	餘角之函數	43
25.	第二象限內諸角之化法方式	43
26.	第三象限內諸角之化法方式	47
27.	第四象限內諸角之化法方式	50
28.	負角函數之化法	53
29.	化任意角函數爲銳角函數之總法	54

第三章 線定義及圖解

30.	三角函數之線定義	59
31.	角變時函數值之變化	60
32.	函數之圖形	63
33.	三角函數之圖形	65
34.	三角函數之週期性	66
35.	用單位圓畫三角函數之圖形	68

第四章 應用

36.	本章之目的；近似值之計算	72
37.	以直角三角形爲依據之問題	74
38.	正弦與餘弦之數值表；補間法	80
39.	正切與餘切之數值表	82
40.	三角問題中常用之術語	83
41.	斜三角形之解法	88
42.	正弦定律	88
43.	當已知兩邊及一對角時之“兩意情形”	91
44.	正切定律	96

45. 餘弦定律.....	99
46. 以三角形之三邊表其半角之函數	103
47. 求斜三角形面積之公式	110
48. 結論	112

第五章 對數之理論及應用

49. 三角法中對數之需要	113
50. 對數之定理	116
51. 常用對數	119
52. 定常用對數指標之規則	120
53. 對數表	123
54. 求一數之對數法	123
55. 已知一對數求其真數法	127
56. 計算中對數之用法	128
57. 餘對數	130
58. 對數底之變換	133
59. 指數方程式	134
60. 三角函數之對數表	136
61. 表二之用法,其已知或所求角爲以度與分表之者.....	137
62. 求一角之函數對數,其角爲以度與分表之者.....	137
63. 已知一角之函數對數,求該角而以度與分表之者.....	139
64. 表三之用法,其已知或所求角爲以度與度之小數部分 表之者.....	144
65. 直角三角形解法中對數之應用	148
66. 斜三角形解法中對數之應用	155
67. 斜三角形求積法中對數之應用	173
68. 地積測量法	176
69. 距等圈航法	177
70. 平面航法	179

71. 中緯線航法	180
-----------------	-----

第六章 三角學之解析

72. 兩角和與較之函數	183
73. 兩角和之正弦與餘弦	183
74. 兩角較之正弦與餘弦	187
75. 兩角和與較之正切與餘切	189
76. 以一角之函數表其二倍角之函數	193
77. 倍角之函數	193
78. 以一角之半角函數表該角之函數	196
79. 以一角之餘弦表其半角函數	196
80. 函數之和與較	198
81. 三角恆等式	202
82. 三角方程式	208
83. 解三角方程式之提示	209
84. 當已知一函數後，一角之普遍公式	214
85. 反三角函數	217

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

86. 定理	224
87. 近於 0° 與 90° 正銳角之函數	225
88. 求近於 0° 之銳角函數之法則	226
89. 求近於 90° 之銳角函數之法則	226
90. 求近於 0° 與 90° 之角之函數對數之法則	228

第八章 公式摘要

平面三角公式一覽表：

直角三角形	236
函數間之基本關係式	236

正弦定律	237
正切定律	237
餘弦定律	237
以三角形之三邊表其半角函數	237
三角形之面積	237
兩角和與較之函數	238
二倍角之函數	238
以一角之半角函數表該角之函數	238
半角函數	238
函數之和與較	239

平面三角學

第一章

三角函數

1. 三角法 在三角學中，吾人所欲研究之數量，謂之三角函數。本章之目的乃在說明此類函數之定義及其初步應用。

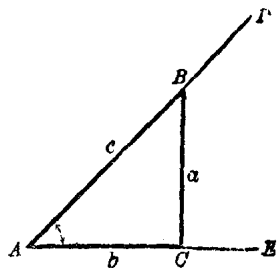
2. 變數；常數 凡一問題中之數量，非為變數即為常數。故此二類數量之區別，必須精確了解。一數量在一問題中，可以任何數值表之者謂之變數。變數常以英文末尾字母 x, y, z 等表之。

一數量，其數值在一問題中為固定不變者謂之常數，數字或絕對常數，在一切問題中，常保持其同一之值，如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ 等等。不定常數者僅在特定問題中時，其值為固定。常數常以英文首數字母 a, b, c 等表之。

3. 函數 一變數之函數，為一數量，其值依變數之值而定。一正方形之面積為其邊長之函數，而一球形之體積，為其直徑之函數。同理，三項式 $x^2 - 7x - 6$ 為 x 之函數，因此式之值須依 x 之值而定。在三角函數中，變數為角之度量，而此等函數之值，常依已知角之度量而定。現暫以度數表一角之量。以後吾人將論及角之第二種測量法。

4. 一銳角之三角函數 兩線相交成一角，其概念已詳具於初等平面幾何學中，茲先就銳角討論之。

設 $\angle EAD$ 爲一小於 90° 之角，即銳角。自任一邊上一點 B ，作一線垂直於他邊，於是成一直角三角形，如 ABC 。今以大楷字母 A, B, C ，表角之度量，小楷字母 a, b, c ，表其相應對邊之長。^{*} 在幾何學中，吾人已知此三角形之角與邊有相互之關係。三角法即表示此等相互關係之實性，而用各邊之比以達此目的。此諸邊之比，謂之三角函數。一銳角（如 A ）有六個三角函數，茲表明如下：



$\sin A$,	讀作	“ A 之正弦 (sine)”;
$\cos A$,	讀作	“ A 之餘弦 (cosine)”;
$\tan A$,	讀作	“ A 之正切 (tangent)”;
$\csc A$,	讀作	“ A 之餘割 (cosecant)”;
$\sec A$,	讀作	“ A 之正割 (secant)”;
$\cot A$,	讀作	“ A 之餘切 (cotangent)”.

此等三角函數（比）之定義如下（見上圖）：

- | | |
|---|---|
| (1) $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right)$; | (4) $\csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right)$; |
| (2) $\cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right)$; | (5) $\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{c}{b} \right)$; |
| (3) $\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{a}{b} \right)$; | (6) $\cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{a} \right)$. |

須注意者，任一函數之數值祇依 A 角之大小而定，而與所取 B 點之位置無關。

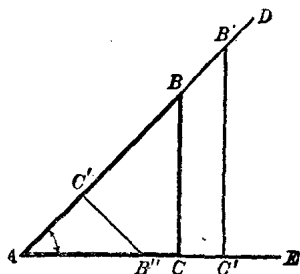
因，如設 B 爲 AD 上另一點，而 B' 爲 AE 上任一點。作 $B'C'$ 及 $B''C''$ 各垂直於 AE 及 AD 。此等三角形 AB ， $AB'C'$ ， $AB''C''$ 必爲互等角三角形，因其俱爲直角三角形，而有一公共角 A 也。故彼等爲相似，而

^{*} 直角三角形，如無其他說明，恆以 c 表斜邊 而以 C 表直角。

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

但此諸比式，均爲 A 之正弦。同理，吾人亦可證其他諸函數具此性質。凡此可表明吾人所擇之三角形，其大小可任意，因重要之點，祇在三角形各邊之相互關係，而與各邊之實在長度無關。

學者更須注意者，即 A 角之大小有改變時，則第 2 頁上之六比，亦變其值。



此等函數(比)，在三角學研究中，最爲重要，如無透徹之了解，則進修非易，惟此等函數尚易記憶。學者祇須注意第一行三個函數各爲第二行三個函數之倒數可也。因

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A};$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A};$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

現將定義(1)至(6)應用於第 2 頁圖上之銳角 B ，則對邊 $= AC = b$ ，鄰邊 $= BC = a$ 。故

$$\sin B = \frac{b}{c};$$

$$\csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c};$$

$$\sec B = \frac{c}{a};$$

$$\tan B = \frac{b}{a};$$

$$\cot B = \frac{a}{b}.$$

與 A 角諸函數比較之，可知

$$\sin A = \cos B;$$

$$\csc A = \sec B,$$

$$\cos A = \sin B;$$

$$\sec A = \csc B;$$

$$\tan A = \cot B$$

$$\cot A = \tan B.$$

因 $A+B=90^\circ$ (即 A 與 B 互為餘角), 故上列諸結果, 可簡述如下:

定理 一銳角之函數等於其餘角之餘函數 (co-function). * 上述定理

可書之如下:

$$\sin A = \cos(90^\circ - A);$$

$$\csc A = \sec(90^\circ - A);$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A);$$

$$\sec A = \csc(90^\circ - A);$$

$$\tan A = \cot(90^\circ - A);$$

$$\cot A = \tan(90^\circ - A).$$

例 1. 在一直角三角形中, $a=3$, $b=4$, 求 A 角之諸函數.

【解】 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

應用第 2 頁 (1) 至 (6) 諸式, 得

$$\sin A = \frac{3}{5};$$

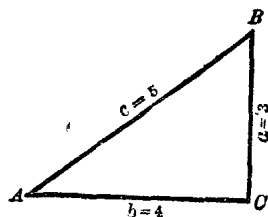
$$\csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5};$$

$$\sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4};$$

$$\cot A = \frac{4}{3}.$$



再求 B 角諸函數而比較其結果.

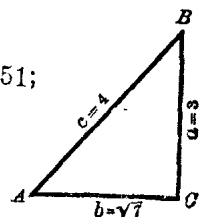
例 2. 在一直角三角形中, $a=3$, $c=4$. 求 B 角之諸函數.

【解】 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} = 1.51;$$

$$\cos B = \frac{3}{4} = 0.75; \quad \sec B = \frac{4}{3} = 1.33;$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.88; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = 1.14.$$



再求 A 角諸函數而比較其結果.

例 3. 在一直角三角形中, $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, 求 A 角之諸函

* 正弦與餘弦, 正切與餘切, 正割與餘割, 均可互謂餘函數.

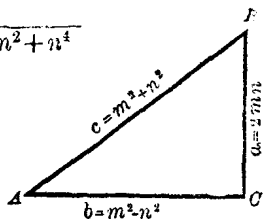
數。

$$\begin{aligned} \text{【解】 } c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4} \\ &= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2 \end{aligned}$$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$



例 4. 在一直角三角形中，已知 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，及 $a = 80$ ；求 c 。

【解】 從第 2 頁公式 (1) 中，得 $\sin A = \frac{a}{c}$ 。

以本題中之 $\sin A$ 及 a 之值代入，則得 $\frac{4}{5} = \frac{80}{c}$ ；

解之，得

$$c = 100. \quad [\text{答}].$$

5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數值。此等銳角常散見於各種三角學習題中，故須求其函數值而記憶之。

a. 求 45° 之各函數值。作一等腰三角形 ABC ，則

$$\angle A = \angle B = 45^\circ.$$

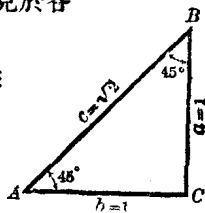
因此處所重要者為邊之關係，而非其實長，故可任意定各邊之長度，祇須使此直角三角形合於等腰之條件即可。今設二等邊之長為 1，即 $a = 1, b = 1$ 。

則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ，而得

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1; \quad \cot 45^\circ = 1.$$



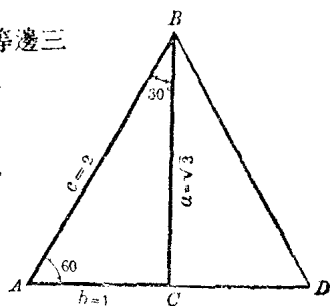
b. 求 30° 及 60° 之函數值 作一等邊三角形 ABD ，自 B 點作 BC 垂直於 AD ，則在三角形 AB 中，

$$\angle A = 60^\circ, \quad \angle ABC = 30^\circ.$$

再以最短邊為 1，即設 $b = 1$ 。於是

$$c = AB = AD = 2AC = 2b = 2, \text{ 而}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$



$$\text{故 } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理，從同一三角形中，得

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

茲將其結果，列表如下：*

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

* 爲便於記憶起見，吾人可視第一（或 sine）行之各數爲 $\sqrt{1}$ ， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ 被 2 除而成。

第二（或 cosino）行內之各數，與第一行各數之順序相反。

第三（或 tangent）行內之各數，乃以第二行各數，除第一行之各相當數而得。

學者應熟習此 45° 及 30° , 60° 之直角三角形。則即不記上表，亦可由心中想得此兩個直角三角形之圖形，而得其諸函數之值。

例 設一直角三角形之 $A=60^\circ$, $a=100$; 求 c 。

【解】 因 A 角為已知(故 A 角之任何函數亦為已知)，而 A 之餘割中包含已知數 a 及未知數 c 。故可用此公式以求 c 。

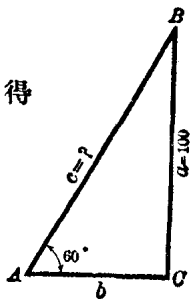
$$\csc A = \frac{c}{a}$$

見第2頁之 (4)

以 $a=100$ 及 $\csc A = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 代入上式，得

$$c = \frac{200\sqrt{3}}{3} = 115.5. \quad [\text{答}]$$

B 之值為何？試用上法以證 $b=57.7$ 。



習 題

下列各題皆限於直角三角形。答案之次序為 sine, cosine, tangent.

1. 設 $a=8$, $b=15$; 求 A 角諸函數。

答 $\sin A = \frac{8}{17}$, $\cos A = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$ 等。

2. 設 $b=5$, $c=13$; 求 B 角諸函數。

3. 設 $a=0.6$, $b=0.8$; 求 B 角諸函數。

答 $\sin B=0.8$, $\cos B=0.6$, $\tan B=1.3$ 等。

4. 設 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 求 A 角諸函數。

5. 設 $a=5$, $c=7$; 求 B 角諸函數。

答 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 等。

6. 設 $a=p$, $b=q$; 求 A 角諸函數。

7. 設 $a = \sqrt{m^2 + mn}$, $c = m + n$; 求 A 角諸函數.

答 $\frac{\sqrt{m^2 + mn}}{m + n}$, $\frac{\sqrt{mn + n^2}}{m + n}$, $\frac{1}{n}\sqrt{mn}$ 等.

8. 設 $\sin A = \frac{3}{5}$, $c = 200.5$; 求 a .

9. 設 $\cos A = 0.44$, $c = 30.5$; 求 b . 答 13.42.

10. 設 $\tan A = \frac{11}{3}$, $b = \frac{27}{11}$; 求 c .

11. 設 $\tan B = k$, $a = r$; 求 c . 答 $r\sqrt{k^2 + 1}$.

12. 若 $b = 2a$, 求 A 角諸函數. 何故 a 與 b 均不見於答案中?

13. 一直角三角形之斜邊, 爲一腰之三倍. 求對此腰之角之諸函數.
何故此答案與此腰之長無關?

答 $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 等.

14. 設一直角三角形之一腰爲 16, 而對此腰之角之餘切爲 $\frac{3}{4}$. 則其
他一邊之長爲何?

15. 設 $A = 30^\circ$, $a = 25$; 求 c , B , 及 b .

答 $c = 50$, $B = 60^\circ$, $b = 25\sqrt{3}$.

16. 設 $B = 30^\circ$, $c = 48$; 求 b , A , 及 a .

17. 設 $B = 45^\circ$, $b = 20$; 求 c , A , 及 a .

答 $c = 20\sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, $a = 20$.

18. 若一腰爲他腰之 $\sqrt{3}$ 倍, 則此直角三角形之二銳角各爲若干度?

19. 一直角三角形, 若其斜邊爲一腰之 $\sqrt{2}$ 倍. 則其銳角各爲若干度?

答 45° , 45° .

20. 設 $\sec B = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 及 $c = 480$, 求 B , A , a , 及 b .

21. 設 $A = 30^\circ$; 45° ; 60° . 求 $\sin^2 A + \cos^2 A$ 之值. 答 1.

22. 試證 $\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$.