

2005年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷

2005 年全国

MBA

联考应试解题技巧 与最后冲刺试卷 ·

数学 ★

主审 范培华
主编 童陈武剑



 经济科学出版社

2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷

2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷

数 学

主编 童武 陈剑

主审 范培华

经济科学出版社

责任编辑：刘怡斐

责任校对：王肖楠

版式设计：周国强

技术编辑：王世伟

2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷

数 学

童武 陈剑 主编

范培华 主审

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100036

总编室电话：88191217 发行部电话：88191540

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

天宇星印刷厂印刷

河北三河三佳装订厂装订

787×1092 16 开 10.25 印张 250000 字

2004 年 9 月第一版 2004 年 9 月第一次印刷

ISBN 7-5058-4444-X/F·3716 定价：20.00 元

(图书出现印装问题，本社负责调换)

(版权所有 翻印必究)

出版前言

随着中国加入 WTO, 我国经济以世人瞩目的速度持续发展。全球经济一体化的浪潮给我国各类企业带来了无限的机遇和挑战。同时, 经济的快速发展对我国企业的管理水平提出了更高的要求。这样, 培养新型企业管理人才和全面提高现有管理人员的整体水平, 已成为保证我国经济不断发展的迫切需要。

1990 年, 我国国务院学位委员会正式批准设立 MBA 学位和试办 MBA 教育, 并于 1991 年开始招生。MBA 作为一种专业学位, 明显不同于普通理论研究型研究生教育的特点。MBA 教育过程中注重学生的实践环节, 极其强调学生的能力与素质的培养, 通过大量的案例教学, 培养学生的战略眼光、创造性思维、团队合作精神、处理复杂问题的应变能力和决策能力, 以及开拓进取的强烈的事业心与社会责任感。

在 MBA 入学考试竞争日趋激烈的形式下, 为了满足广大 MBA 考生的迫切需求, 我们特组织了大量有丰富 MBA 辅导和培训教学经验的专家和教授, 花费大量的时间, 精心编写了这套《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷》丛书, 以便考生能在有限的时间内, 通过本丛书的学习和实战演练, 在 MBA 的考试中夺得高分, 迈进名校 MBA 的殿堂。

本套《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷》丛书包括《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷·数学》、《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷·写作》、《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷·逻辑》和《2005 年全国 MBA 联考应试解题技巧与最后冲刺试卷·英语》共 4 册。丛书紧扣最新考试大纲, 内容凝练, 题量充足, 解析方法精辟。在编写过程中, 根据作者多年的辅导经验, 诠释 MBA 考试的技巧, 让广大考生能够在有限的时间之内, 正确把握考试要求, 紧紧抓住考试的重点环节, 进行全真的试题模拟, 做到事半功倍。

本丛书独具以下六大优势特点:

一、权威预测: 本丛书是全国著名 MBA 培训学校的首席主讲专家主编, 由具有丰富教学经验的一线教授和专家加盟编写, 还有原 MBA 联考命题组成员和阅卷组组长亲自参与审定, 中国 MBA 网、著名 MBA 考前培训学校鼎力支持。集合清华大学、北京大学和中国人民大学的权威讯息浓缩而成。

二、最新预测: 本系列丛书紧扣最新《2005 年 MBA 联考考试大纲》进行编写, 题型和题量与 2005 年实际考试试卷一致, 特别是从 2003 年开始, 数学大纲规定的题型结构以及占分比例已经出现了较大的变化, 本系列模拟考题紧紧联系当前变化和最新形式与政策, 做到试卷命制的标准化; 英语试卷也根据考试的最新特点进行命制, 做到体现 MBA 英语考试包

含商务部分的特点,但是不过分渲染商务部分,不误导考生,严格按照分值比例进行试卷命制。

三、高效预测:每套试卷均由一线著名专家精选材料,题题推敲,优化设计命制完成,因此,它省去了一般模拟考试中常见的陈题、送分题以及凑数题,从而大大节省了考生最后复习阶段的宝贵复习时间,让考生进入2005年MBA联考考场时有更多“早已做过这道题”的兴奋。

四、解题精准性预测:许多考生缺乏实际临场经验,本系列丛书将精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,迅速提高考生快速、准确、灵活的解题能力,为MBA联考学子全程领航和理性分析,引领考生高效通过联考难关。

五、可操作性强:本丛书有答案和详细的解析,考生可以利用本丛书试题在仿真的环境下进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考,达到最佳的备考效果。本套试卷的每道题都经过认真筛选和编写,贴近真题,考生应该进行认真研习,弄懂吃透。

六、系统预测:“写作”中的“论证有效性分析”试题的命制的难度是很大的,要命制“论证有效性分析”的模拟试卷以及讲授这方面的考试内容,作者必须对美国GMAT考试有深入的研究和独到的见解,精通英语,深谙写作的命题规律和出题动态,因此,市面上有的模拟试题系列就缺少“写作”这一门,让考生得不到模拟实战的机会;有的命制了“论证有效性分析”的试题,所给的范文也是高中的“评论文”,对考生造成了严重的误导,本套《2005年全国MBA联考应试解题技巧与最后冲刺试卷 写作》中的“论证有效性分析”试题的命制完全符合大纲的规定,体现了本丛书的系统性和全面性。

由于组织者的经验和水平有限,不当之处在所难免,欢迎广大读者和专家批评指正。批评和建议可以发至丛书组委会信箱:sinotests@sina.com。

经济科学出版社

2004年8月

编者的话

2005年MBA联考数学大纲在2004年的基础上进行了小幅度的调整,2005年数学考试分值降为70分,考试内容在2004年的基础上作了如下调整:

1. 初等数学部分:等差数列和等比数列不考。
2. 微积分部分:一元函数微分学中的隐函数导数不考。
3. 概率论部分:0-1分布、泊松分布、均匀分布、指数分布不考,只考二项分布、正态分布。

综合能力的考试有3门科目,时间为3个小时,时间是比较紧张的,如何制定高效的复习计划呢?以下几点值得考生借鉴:

1. 明确MBA联考对知识点不同层次的要求。要准确把握哪些知识是要求了解的,哪些知识是要求理解的,哪些知识是要求掌握的,哪些知识是要求灵活运用,对这四个层次进行概括性的归纳,进而明确复习的重点。

2. 注重“三基”。考生应该以“三基”为主线,“三基”即:基本概念、基本原理和基本方法。对于数学部分的复习,考生首先应该掌握基本的概念,熟悉考点知识,紧扣大纲,抓住重点。

考生首先应该系统地掌握大纲规定的基础知识,对大纲规定的内容进行梳理,形成知识网络;其次在接触一定量的题型之后,头脑中留下的不是纷繁的题目,而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能,以及基本的数学思想和方法。不论是数学理论的建立,还是进行数学运算和逻辑推理,无一不是以明确而又清晰的概念为基础。数学基础知识是进一步提高解题速度的基础。如果基本的方法没有掌握,定理和公式不熟悉,速度就上不来,这样势必影响到综合题的解答。

3. 注重知识点之间的有机衔接。考生应该要重视对概念的复习,从不同的角度准确地把握住概念的内涵,注意相关概念的联系与区别,否则,解题时思维上就会出现疑惑与混乱,方法上也就会出现种种谬误。

4. 学会应用、培养能力、掌握技巧。复习时演练一定量的习题是非常必要的,它是提高高考成绩的重要手段,但也不要搞题海战术,更重要的是吃透大纲规定的基本考点,学会应用,提高分析问题和解决问题的能力。解题时既要考虑到解题的通性通法,又要分析它的特殊性,寻求最佳解决方法,提高解题能力和对新题型的适应能力。

5. 归纳总结再思考。归纳总结再思考是至关重要的学习方法,在解题的基础上认真总结,及时归纳,这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律,又能培养自己的探索和创新的能力。如果只是一味地做题,把做题的多少作为复习效果与努力程度的一个标准,而不注重及时地总结,那么考生所收到的实际复习成效是值得怀疑的。考生如果不注重及时的

总结和分析,对疑难问题不进行认真的分析和清理,那么下次碰到类似或者相同的问题还是束手无策。我国著名数学家苏步青教授说:“学习数学,要多做习题,边做边思考,先知其然,然后弄清其所以然。”

为了让考生能在考前进行实战模拟,我们精编了这本《2005年全国MBA联考应试解题技巧与最后冲刺试卷 数学》,其特点可以归结于以下几条:

1. 全面紧扣2005年MBA联考最新大纲,把握命题脉搏。《2005年全国MBA联考应试解题技巧与最后冲刺试卷 数学》根据最新MBA联考大纲进行编写,题型和题量与2005年实际考试试题一致。本系列模拟考场紧紧联系当前变化了的考试动态以及最新形式与政策,与最新形式与大纲完全一致。

2. 精辟阐明解题思路,每道模拟试题都有详细的解析。许多考生缺乏实际临场经验,本套模拟考场系列将精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,是考生进行考前模拟、检验自己水平和提高分析问题能力的模拟测试辅导用书之理想选择。

3. 启迪备考,极具操作性。《2005年全国MBA联考应考解题技巧与最后冲刺试卷 数学》的题型与真题完全相同,题目难度与真题相当,或者略高于真题,让考生经过复习后,能有一种高屋建瓴的感觉。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

由于时间仓促、组织者的经验和水平有限,不当之处在所难免,欢迎广大读者和专家批评指正。

编 者

2004年8月

目 录

第一部分 2005 年全国 MBA 联考数学应试指导 (1)

第一章 2005 年全国 MBA 联考数学解题技巧分析.....	(1)
第二章 初等数学例题精解与题型训练.....	(9)
第三章 微积分例题精解与题型训练	(19)
第四章 线性代数例题精解与题型训练	(38)
第五章 概率论例题精解与题型训练	(60)

第二部分 2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷..... (74)

2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷一	(74)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷二	(78)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷三	(82)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷四	(86)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷五	(90)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷六	(94)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷七	(98)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷八	(102)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷九	(106)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷十	(110)

第三部分 2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷答案与解析 (114)

2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷一答案与解析.....	(114)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷二答案与解析.....	(118)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷三答案与解析.....	(122)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷四答案与解析.....	(126)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷五答案与解析.....	(130)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷六答案与解析.....	(134)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷七答案与解析.....	(139)

2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷八答案与解析·····	(143)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷九答案与解析·····	(147)
2005 年全国 MBA 联考应试数学最后冲刺试卷十答案与解析·····	(150)

第一部分 2005 年全国 MBA 联考 数学应试指导

第一章 2005 年全国 MBA 联考数学解题技巧分析

2005 年 MBA 入学考试中的数学部分在 2004 年的基础上进行了小的调整,调整的范围和幅度不大,数学部分总共减少 7 题,合计 20 分,从而使分值变为 70 分。但是数学考试仍然是重头戏,具有举足轻重的地位,考生千万不可小视。

对于数学部分的复习,考生首先要掌握基本的概念,熟悉考点知识,紧扣大纲,抓住重点。考生应该以“三基”和“大纲”为主线,“三基”即:基本概念、基本原理和基本方法;《大纲》即《2005 年 MBA 数学考试大纲》。广大考生应该仔细研究 2005 年 MBA 入学考试数学《大纲》,对照《大纲》,明确考试的范围和要求,了解分值分布,进行有的放矢。请看下面这道题:

设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的函数,则:

- (A) $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数。
- (B) $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数。
- (C) $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数。
- (D) $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数。
- (E) (A)、(B)、(C)、(D) 均不正确。

要解决上面这道 4 分的问题,需要许多相关的数学基础知识,考生必须掌握:原函数的概念、不定积分与原函数之间的关系、不同的原函数之间的关系、定积分的换元积分公式、变上限定积分的解法、原函数的存在原理等。一个考试题往往涉及许多相关的知识,所以考试的综合性很强,并非考查单一知识点,而是考查考生对知识的综合运用能力。

数学考试与写作和逻辑考试合并为综合考试,在 3 个小时内完成,时间是很紧张的。考生如果在牢固掌握基础知识的基础上,能掌握一定的解题技巧,必将大大提高考生的解题速度。下面就一些比较典型的题型,介绍几种解题方法和技巧。当然,这些解题方法并非具有通用性,考生应该具体情况具体分析。

一、结合图形解题,一目了然

例 1. (1998 年) 要使方程 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围是_____。

(A) $-2 < m < -1$

(B) $-4 < m < -1$

(C) $-4 < m < -2$

(D) $-3 < m < 1$

【技巧分析】这里主要考查二次函数(方程)的性质。如果用一元二次方程根与系数的关系解题,比较烦琐,我们不妨结合图形解题。

解:如图1-1所示,设

$$f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2$$

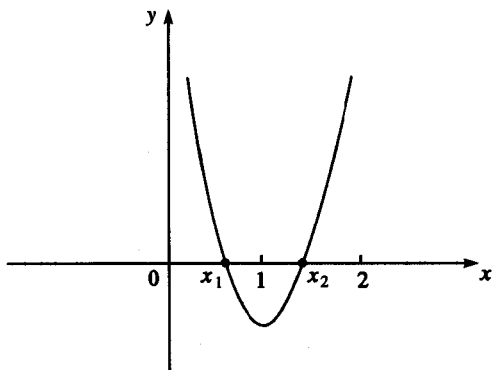


图 1-1

则 $f(x)$ 开口向上, 与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 两点, 有不等式组
$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

从而有:

$$m^2 - m - 2 > 0; \quad m^2 - 4 < 0; \quad m^2 + m > 0$$

答案: (A)。

例 2. 设 $\varphi(x)$ 是 x 到离 x 最近的整数的距离, 求 $\int_0^{100} \varphi(x) dx$ 。

【技巧分析】此题至少有两种解法。直接用积分的方法也能算出答案, 但是比较烦琐, 如果借助于图形, 答案就一目了然了。其实所求积分就是如图 1-2 所示的 100 个三角形面积之和。

解法 1: 如图 1-2 所示。

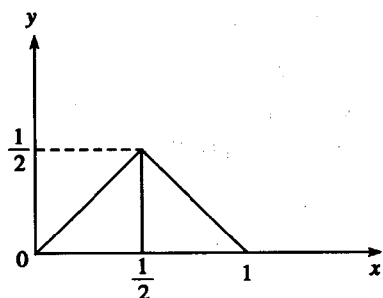


图 1-2

$$\int_0^{100} \varphi(x) dx = 100 \times 0.25 = 25$$

解法 2:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x-i, & i \leq x \leq i+0.5 \\ i+1-x, & i+0.5 \leq x < i+1 \end{cases}$$

$$\int_0^{100} \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{99} \int_i^{i+1} \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{99} \left[\int_i^{i+0.5} (x-i) dx + \int_{i+0.5}^{i+1} (i+1-x) dx \right] = 25$$

二、典型的比例问题，借助比例系数求解

例 3. (2002 年) 设 $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = 4:5:6$, 则使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值是_____。

(A) 24

(B) 36

(C) $\frac{74}{3}$

(D) $\frac{37}{2}$

【技巧分析】这是很典型的比例问题，一般的题是两个数值之间的比例问题，这里是三个数值之间的比例问题，按照 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 各自的比例直接计算此题，不如借助于比例系数来得快。

解：令

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = k$$

有

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4k} \\ y = \frac{1}{5k} \\ z = \frac{1}{6k} \end{cases}$$

根据题意有 $\frac{1}{4k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{6k} = 74$, 解得 $k = \frac{1}{120}$

所以

$$y = \frac{1}{5k} = \frac{1}{\frac{5}{120}} = 24$$

答案：(A)。

三、直观判断常数项

在判断 n 值给定的情况下，二项展开式是否存在常数项的问题时，用直接判断法比代入条件验证结论要简便得多，下面结合例题进行分析。

例 4. (条件充分性判断) $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 有常数项。

(1) $n=6$ 。

(2) $n=7$ 。

【技巧分析】二项展开式中，位于分母的指数为 $\frac{1}{3}$ ，位于分子的指数为 $\frac{1}{4}$ ，它们的比值为 $\frac{3}{4}$ ， $3+4=7$ ，只有当 $n=7$ 的整数倍时，展开式才存在常数项。所以条件(2)充分。如果将条件(1)和条件(2)代入算式则比较麻烦。答案为(B)。

四、等价变形，运用转换法

例5. 设实数 x, y 符合等式 $x^2 - 4xy + 4y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 6 = 0$ ，则 $x+y$ 的最大值为_____。

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $2\sqrt{3}$

(D) $3\sqrt{2}$

(E) $3\sqrt{3}$

【技巧分析】把 $x+y$ 视为一个整体来解题，有些麻烦，问题比较复杂。但是如果能将原等式进行等价变换，则会“柳暗花明”。

解：对原式作等价变形，有

$$\sqrt{3}(x+y) = 6 - (x-2y)^2$$

$$(x+y) = \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2$$

$$(x-2y)^2 \geq 0$$

又
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2y)^2 \geq 0$$

所以
$$x+y \leq \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

答案：(C)。

五、运用待定系数法求解

例6. 已知 $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4$ 是一个二次三项式的完全平方式，则 a, b 的值分别为_____。

(A) $a=13, b=-12$ 或者 $a=5, b=12$

(B) $a=6, b=1$

(C) $a=-6, b=4$

(D) $a=13, b=-12$

(E) (A)、(B)、(C)、(D) 均不正确

【技巧分析】此类题采用待定系数法就比较简单，直接根据未知的系数来推算答案是比较麻烦的。

解: 设原式 $= (x^2 + Ax + B)^2$ 有

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^4 + 2Ax^3 + (A^2 + 2B)x^2 + 2ABx + B^2$$

得

$$\begin{cases} 2A = -6 \\ A^2 + 2B = a \\ 2AB = b \\ B^2 = 4 \end{cases}$$

解得 $A = -3, B = \pm 2$

当 $B = -2$ 时, 有 $a = 5, b = 12$; $B = 2$ 时, 有 $a = 13, b = -12$

答案: (A)。

六、求不等式解集: “根排序法”

例 7. 不等式 $\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5} \leq 0$ 的解集是_____。

(A) $(-\infty, -5) \cup [1, 3]$

(B) $(-\infty, -5] \cup (1, 3)$

(C) $(-5, 3)$

(D) $(-\infty, 8)$

(E) (A)、(B)、(C)、(D) 均不正确

【技巧分析】直接对不等式求解显然很麻烦, 我们用“根排序法”会很轻松。

解: 对原不等式作同解变形

$$\begin{cases} (x-1)(x-3)(x+5) \leq 0 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

令 $(x-1)(x-3)(x+5) = 0$, 有 $x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 3$ 将 x_1, x_2, x_3 从左到右依大小进行排序, 得

$$\begin{array}{cccc} -5 & +1 & +3 & \\ - & + & - & + \end{array}$$

由上面的排序可得到答案: 不等式的解集是

$$(-\infty, -5) \cup [1, 3]$$

答案: (A)。

七、“特值代入法”, 准确而又高效的技巧

例 8. $C_n^1 + 3C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + 3^{n-1}C_n^n$ 的值为_____。

(A) $\frac{1}{3}(4^n - 1)$

(B) 4^n

(C) 3×4^n

(D) $\frac{4^n}{3} - 1$

【技巧分析】本题可用较为老实的方法计算出答案, 但是, 在考场上用“特值代入法”, 准确而又高效, 可以节省大量的时间, 请看下面两种解法, 很明显, 解法 2 是考生所愿意采纳的方法。

$$\begin{aligned}
 \text{解法 1: 原式} &= \frac{1}{3}(3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + 3^3 C_n^3 + \cdots + 3^n C_n^n) \\
 &= \frac{1}{3}[(3^0 C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \cdots + 3^n C_n^n) - 3^0 C_n^0] \\
 &= \frac{1}{3}[(1+3)^n - 1] = \frac{1}{3}(4^n - 1)
 \end{aligned}$$

答案: (A)。

解法 2: 用 $n=1$ 代入, 正好 (A) 选项为正确答案, 如果不放心, 用 $n=2$ 代入, 也立即可知, 只有 (A) 选项符合。

例 9. 若 $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ac$, $z = c^2 - ab$, a, b, c 是不完全相等的任意实数, 则 x, y, z _____。

(A) 至少有一个大于 0

(B) 都大于 0

(C) 至少有一个小于 0

(D) 都不小于 0

【技巧分析】像这种考题, 按照规矩的方法, 花一些时间可以求出答案, 大家可以比较下面两种解题方法, 当然解法 1 也比较简单, 但考生在紧张的状态下不一定想得到, 所以用解法 2 是高速而又保险的做法。

$$\text{解法 1: } x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2]$$

因为 a, b, c 不全相等, 所以有

$$x + y + z = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2] > 0$$

x, y, z 中至少有一个大于 0。

答案: (A)。

解法 2: 不妨令 $a=0, b=1, c=2$ 很快排除 (B)、(D)。再令 $a=1, b=0, c=-1$ 又排除 (C)。只有 (A) 选项正确。

$$\text{例 10. 设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^n = \underline{\hspace{2cm}}。$$

(A) $2^n A$

(B) $2^{n-1} A$

(C) $2^{n-2} A$

(D) 0

【技巧分析】老实地算, 仔细一点能算正确, 否则容易出错, 下面的解法 2 是省时又得分, 真简便。在考场上, 考生应该善于灵活运用这种“特值代入法”, 定然会大有裨益。

$$\text{解法 1: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$A^3 = 2A^2 = 2^2 A, \dots, A^n = 2^{n-1} A$ 所以归纳推理出一般规律; (B 选项正确)

解法 2: 不妨设 $n=1$, 很快排除 (A)、(C)、(D) 选项, 直接选择 (B) 选项, 5 秒钟内得出答案。

$$\text{例 11. 设 } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^n = \underline{\hspace{2cm}}。$$

- (A) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^n & 3n3^n \\ 0 & 3^n & 2n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} & 3^n n + 4n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 4n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【技巧分析】像这类题，在考场上就不要按部就班的计算了，要知道，找到 A^n 的规律，至少要花上 5 分钟，还不能保证正确率，用“特值代入法”，简洁、准确、高效。

解：令 $n=1$ ，代入 (A)、(B)、(C) 选项，立即可以排除 (A)、(B) 选项，(D) 选项不用代入，直接排除，10 秒钟也可得出答案，所以“特值代入法”在特定的情况下是相当有用的。

答案：(C)。

八、直接加减法：判断向量的线性相关性

例 12. 设 a_1, a_2, a_3 线性无关，则_____也线性无关。

- (A) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 - a_1$
- (B) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + 2a_2 + a_3$
- (C) $a_1 + 2a_2, 2a_2 + 3a_3, 3a_3 + a_1$
- (D) $a_1 + a_2 + a_3, 2a_1 + a_2 + 3a_3, 3a_1 + 2a_2 + 4a_3$

【技巧分析】可以通过计算矩阵行列式的值来判定向量组的线性相关性，但有的情况下，对其向量直接采用加减法很快可判定其向量组的相关性。

解法 1: (A): $a_1 + a_2 - (a_2 + a_3) + (a_3 - a_1) = 0$

相当于 $k_1(a_1 + a_2) + k_2(a_2 + a_3) + k_3(a_3 - a_1) = 0$

其中 $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1$

所以 (A) 选项立即排除。

(B): $a_1 + a_2 + a_2 + a_3 - (a_1 + 2a_2 + a_3) = 0$ 排除 (B) 选项。

(D): $a_1 + a_2 + a_3 + 2a_1 + a_2 + 3a_3 - (3a_1 + 2a_2 + 4a_3) = 0$ 排除 (D) 选项。

所以 (C) 选项正确。

解法 2: (A) 组 3 个向量对 a_1, a_2, a_3 的表示矩阵的行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 所以

(A) 组向量线性相关。

$$(B) \text{ 组: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(C) \text{ 组: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

$$(D) \text{ 组: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

只有 (C) 组向量线性无关, 正确选项应为 (C)。