數理化學習參攷叢書

三角習題詳解

俞樹德編

北京書店刊行

数理化學習參考叢書

三角習題詳解

俞樹德編

北京書店刊行

三角習題詳解

編　者　俞樹德
出版者　北京書店
發行者　北京書店
總店：北京琉璃廠九六號
電話：三局四九二五號
分　店　北京書店上海分店
上海福州路420弄崇讓里19號
電話：九四二七九號
經售處　全國各大書店

一九五三年六月十一版

30001—50000册

前　言

（一）本書參照中央人民政府教育部"普通中學數理化教材精簡提綱草案"編輯。適於具有初中三年級以上數學程度，有志學習三角學者自學、複習、參考之用。

（二）本書以平面三角學爲範圍，理論和應用兩方面並重。

（三）本書各習題，採自中外通行的高中三角學各課本及各大學入學試題，逐一詳解，學者能按步詳閱，不難澈底了解。

（四）本書憑編者個人數學經驗而編輯，難免有錯誤或欠妥的地方，希望讀者多多批評指敎！

目 次

三角習題詳解

一　角的度量

A. 量角法　度量角的單位有三種：

(1)**角度法** Degree measure　爲英國制，又稱六十分法，世界各國實用時均用之。單位爲一周角的$\frac{1}{360}$稱爲**度**，Degree，用(°)表之。每度的$\frac{1}{60}$爲**分**，Minute，用(′)表之。每分的$\frac{1}{60}$爲**秒**，Second，用(″)表之。則：$1rt.\angle=90°$，$1°=60'$，$1'=60''$.

(2)**弳法** Circular measure　又稱弧度法，理論數學中所通用。單位爲等於圓半徑長的弧所對的圓心角，稱爲**弳** Radian。則：$2st.\angle$(一周角)$=2\pi$弳，$st.\angle=\pi$弳，$rt.\angle=\frac{\pi}{2}$弳。(弳又稱本位角普通不用符號)。

(3)**百分法** Centesimal measure　爲法國制定，實際上應用很少。單位爲一直角的$\frac{1}{100}$，即一周角的$\frac{1}{400}$，稱爲**級**，Grade，或稱法度，用(g)表之。每級的$\frac{1}{100}$爲**法分**，用(`)表之。每法分的$\frac{1}{100}$爲**法秒**，用(``)表之。則：$1st.\angle=200g$，$1rt.\angle=100g$，$1g=100$`，$1$`$=100$``.

B. 換算法　各制大小單位互化可用進位數乘除而得，不贅述。上述三種單位換算，可用 $1\,rt.\angle=90^\circ=\frac{\pi}{2}$ 弳 $=100g$. 為標準而求得相互關係如下：

$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弳 $=0.01745333$ 弳；1 弳 $=\frac{180^\circ}{\pi}=57.2957^\circ=57^\circ17'45''$。　$1^\circ=\frac{10}{9}g$；　$1g=\frac{9^\circ}{10}$。1 弳 $=\frac{200}{\pi}g=63.662g$；　$1g=\frac{\pi}{200}$ 弳 $=0.015708$ 弳。

C. 弧長和扇形面積與弳的關係：

(1)**弧長**　設一圓半徑為 r，這圓周上一段弧長為 s，而所對的圓心角為 x 弳，則依弳法的定義可得 $x=\frac{s}{r}$；x, s, r, 三數任知其二，必可求得第三數。

(2)**扇形面積**　設一圓半徑為 r，圓周上一段弧長為 s，這弧與二端點的半徑圍成扇形面積為 A，圓心角為 x 弳，則依幾何定理可得：$A=\frac{1}{2}rs=\frac{1}{2}xr^2=\frac{1}{2x}s^2$。

習題一

1. 化 $34^\circ13'7''$ 為秒！

【解】$34^\circ13'7''=60''\times(60\times34+13)+7''=123187''$。【答】

2. 化 $87435''$ 為度分秒！

【解】
$$\begin{array}{r|l} 60 & 87435'' \\ \hline 60 & 1457' \cdots\cdots 15'' \\ \hline & 24^\circ \cdots\cdots 17' \end{array}$$

【答】$87435''=24^\circ17'15''$。

3. 化 $64^\circ17'24''$ 為度！

【解】$64^\circ17'24''=64^\circ+\frac{17^\circ}{60}+\frac{24^\circ}{3600}=64^\circ+0^\circ.29=64^\circ.29$。【答】

4. 化 $35g15'13''$ 爲級，及法分，法秒！

【解】
$$\left.\begin{aligned}35g15'13'' &= 35g+\frac{15}{100}g+\frac{13}{10000}g=35.1513g\\ &=100'\times 35+15'+\frac{13'}{100}=3515.13'\\ &=100''\times(100\times 35+15)+13''\\ &=351513''.\end{aligned}\right\}\text{【答】}$$

5. 化下列各角的弳爲角度：

(1) $\frac{\pi}{6}$，(2) $\frac{\pi}{4}$，(3) $\frac{\pi}{3}$，(4) $\frac{2\pi}{3}$，(5) $\frac{4\pi}{3}$，(6) $\frac{3\pi}{2}$，

(7) $\frac{5\pi}{12}$，(8) $\frac{14\pi}{3}$，(9) $\frac{\pi+2}{6}$，(10) 1.3，(11) $\frac{1}{2}$，(12) $\frac{5}{2}$.

【解】 (1) $\frac{\pi}{6}=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$； (2) $\frac{\pi}{4}=45^\circ$； (3) $\frac{\pi}{3}=60^\circ$；

(4) $\frac{2\pi}{3}=120^\circ$； (5) $\frac{4\pi}{3}=240^\circ$； (6) $\frac{3\pi}{2}=270^\circ$；

(7) $\frac{5\pi}{12}=75^\circ$ (8)；$\frac{14\pi}{3}=840^\circ$； (9) $\frac{\pi+2}{6}=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{\pi+2}{6}$

$=49^\circ\ 5'55''$； (10) 1.3 弳 $=\frac{180^\circ}{\pi}\times 1.3=74^\circ 29'4''$.

(11) $\frac{1}{2}$弳 $=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{1}{2}=28^\circ 38'52''$；(12) $\frac{5}{2}$ 弳 $=143^\circ 14'22''$.

6. 用弳表下列各角：

(1) a. 990°， b. 28°， c. 45.6°， d. $142^\circ 43.2'$，

e. $125^\circ 23'19''$。

(2) a. $60g$， b. $240g$， c. $68g43'$， d. $152g24'36''$.

【解】 (1) a. $990^\circ=\frac{\pi}{180}\times 990=\frac{11\pi}{2}=17.2788$(弳)；

b. $28^\circ=\frac{\pi}{180}\times 28=\frac{7\pi}{45}=0.4887$(弳)；

$c.\ 45.6^\circ=\frac{\pi}{180}\times 45.6=0.79587$ (弳);

$d.\ 142^\circ 43.2'=142^\circ.72=\frac{\pi}{180}\times 142.72=2.49094$(弳);

$e.\ 125^\circ 23'19''=125^\circ.3886=\frac{\pi}{180}\times 125.3886$

$=2.18845$(弳).

(2) $a.\ 60g=\frac{\pi}{200}\times 60=0.94248$(弳);

$b.\ 240g=\frac{\pi}{200}\times 240=3.76992$(弳);

$c.\ 68g43'=68.43g=\frac{\pi}{200}\times 68.43=1.075$(弳);

$d.\ 152g24'36''=152.2436g=\frac{\pi}{200}\times 152.2436$

$=2.39$(弳).

7. 化下列各角爲百分制!

(1) $a.\ \frac{4}{3}\pi$, $b.\ 1.4$, $c.\ \frac{3}{2}$, $d.\ \frac{5\pi}{12}$.

(2) $a.\ 210^\circ$, $b.\ 31^\circ.21$, $c.\ 63^\circ 18'$, $d.\ 42^\circ 40'12''$.

【解】(1) $a.\ \frac{4}{3}\pi=\frac{200}{\pi}g\times\frac{4}{3}\pi=\frac{800}{3}g=266\frac{2}{3}g.$

$b.\ 1.4=\frac{200}{\pi}g\times 1.4=89.1268g=89g12'68''.$

$c.\ \frac{3}{2}=\frac{200}{\pi}g\times\frac{3}{2}=95.493\ g=95g49'30''.$

$d.\ \frac{5\pi}{12}=\frac{200}{\pi}g\times\frac{5\pi}{12}=\frac{250}{3}g=83\frac{1}{3}g.$

(2) $a.\ 210^\circ=\frac{10}{9}g\times 210=\frac{700}{3}g=233\frac{1}{3}g.$

$b.\ 31^\circ.21=\frac{10}{9}g\times 31.21=\frac{312.1}{9}g=34.6778g$

$=34g67'78''.$

$c.\ 63^\circ 18'=63^\circ.3=\frac{10}{9}g\times 63.3=70\frac{1}{3}g.$

$$d.\ 42°40'12''=42°.67=\frac{10}{9}g\times 42.67=47.4111g$$
$$=47g41'11''.$$

8. 用角度、弳及百分法表出下列各角：
(1)四直角的十分之七；(2)二直角的五分之四；
(3)一直角的三分之二。

【解】 $(1)\frac{7}{10}\cdot 4rt.\angle=\frac{14}{5}rt.\angle=\frac{14}{5}\times 90°=252°$
$$=\frac{14}{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{5}(\text{弳})=\frac{14}{5}\times 100g=280g.$$
$(2)\frac{4}{5}\cdot 2rt.\angle=\frac{8}{5}rt.\angle=\frac{8}{5}\times 90°=144°$
$$=\frac{8}{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{4}{5}\pi(\text{弳})=\frac{8}{5}\times 100g=160g.$$
$(3)\frac{2}{3}rt.\angle=\frac{2}{3}\times 90°=60°=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}(\text{弳})$
$$=\frac{2}{3}\times 100g.=\frac{200}{3}g.=66\frac{2}{3}g.$$

9. 一圓半徑爲 25 尺，圓心角所對弧長爲 $37\frac{1}{2}$ 尺，求這角的弳及這扇形所包的面積！

【解】 由 $C(1)$*得：$x=\frac{37.5}{25}=1.5$ (弳).
由 $C(2)$ 得：$A=\frac{1}{2}\times 25\times 37.5=468.75$ (方尺). 【答】

10. 一圓半徑爲 4 尺，這圓上圓心角爲 80°，求所對弧的長！

【解】 由 $C(1)$ 得：$\frac{\pi}{180}\times 80=\frac{s}{4}$. $\therefore s=\frac{\pi}{180}\times 80\times 4$
$=5.585$ 尺. 【答】

〔註：即本章 $C(1)$ 的說明，以後仿此，在其他各章引用本章說明則加註章次，如：一 $C(1)$.〕

11. 一長 9.6 尺的弧，所對圓心角為 1.2 弳，求這圓半徑的長！

【解】由 C (1) 得：$1.2=\frac{9.6}{r}$. $\therefore r=\frac{9.6}{1.2}=8$ 尺。【答】

12. 一扇形地，弧長 24 尺，半徑長 15 尺，求圓心角及面積！

【解】由 C(1)得：$x=\frac{24}{15}=1.6$ (弳) $=\frac{180^\circ}{\pi}\times 1.6$

$=91^\circ.673.$

由 C(2)得：$A=\frac{1}{2}\times 15\times 24=180.$ (方尺)　【答】

13. 一圓半徑為 10 尺，這圓的兩半徑截取 5π 尺的弧，求這兩半徑的夾角及扇形的面積！

【解】由 C (1) 得：$x=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$(弳)$=90^\circ$.

由 C (2) 得：$A=\frac{1}{2}\times 10\times 5\pi=25\pi$ (方尺).　【答】

14. 鐘上分針轉 $1\frac{2}{3}$ 弳的角，問共需時幾分？

【解】$1\frac{2}{3}$弳$=\frac{180^\circ}{\pi}\times 1\frac{2}{3}=95^\circ.4928$；　而每分鐘分針轉 $\frac{360^\circ}{60}$ $=6^\circ$，則轉 $1\frac{2}{3}$弳需時$\frac{95^\circ.4928}{6^\circ}=15.9154$ 分。【答】

15. 在 39 分 $22\frac{1}{2}$ 秒內，鐘表上時針轉若干弳？

【解】時針每小時轉$\frac{\pi}{6}$弳，39 分 $22\frac{1}{2}$ 秒$=0.65625$ 時

則為：$\frac{\pi}{6}\times 0.65625=0.3436$ (弳).　【答】

二　銳角三角函數及應用

A. 三角函數的定義　設$\angle DAE$爲銳角，BC垂直於AE，成一直角三角形ABC，命A,B,C表各角，而$\angle C=rt.\angle$，a,b,c表各角對邊的長度，由幾何定理知$\angle BAC$固定時則不論B點在AD上何地位，各邊長a,b,c之比恆一定。（參照幾何習題詳解 p. 98 習題十一題 5）

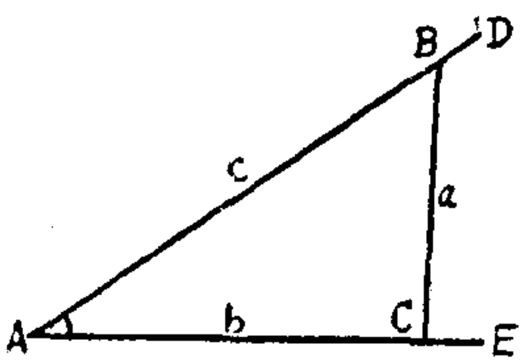

圖　1.

即邊長之比隨$\angle A$而變，所以邊長之比爲$\angle A$的函數，a,b,c之比有六種，即$\angle A$有六個三角函數。名稱、符號和定義如下：

名　　稱	符號及定義	名　　稱	符號及定義
正弦 sine	$\sin A=\frac{對邊}{斜邊}=\frac{a}{c}$	餘切 cotangent	$\cot A=\frac{底邊}{對邊}=\frac{b}{a}$
餘弦 cosine	$\cos A=\frac{底邊}{斜邊}=\frac{b}{c}$	正割 secant	$\sec A=\frac{斜邊}{底邊}=\frac{c}{b}$
正切 tangent	$\tan A=\frac{對邊}{底邊}=\frac{a}{b}$	餘割 cosecant	$\csc A=\frac{斜邊}{對邊}=\frac{c}{a}$

〔註：(1) *tan* 或作 *tg*，*csc.* 或作 *cosec*，*cot* 或作 *ctn.*〕

B. 函數間的基本關係。

(1) 倒數關係　由定義即知：$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}$

$=\frac{1}{\csc A}$；　同理：$\csc A=\frac{1}{\sin A}$；　$\cos A=\frac{1}{\sec A}$；

$sec\ A=\frac{1}{cos\ A}$; $tan\ A=\frac{1}{cot\ A}$; $cot\ A=\frac{1}{tan A}$。

(2)**餘角函數關係** 由圖 1. 及定義知 $\angle A$ 與 $\angle B$ 互爲餘角，而 $sin\ B=\frac{b}{c}$; $cos\ B=\frac{a}{c}$; $tan\ B=\frac{b}{a}$; $cot\ B=\frac{a}{b}$; $sec\ B=\frac{c}{a}$; $csc\ B=\frac{c}{b}$。與 $\angle A$ 函數比較，即知：$sin\ A=cos\ B$; $cos\ A=sin\ B$; $tan\ A=cot\ B$; $cot\ A=tan\ B$; $sec\ A=csc\ B$; $csc\ A=sec\ B$。故稱餘弦、餘切、餘割爲餘函數，而得定理：銳角任一函數等於餘角的餘函數。

習 題 二

1. 說明銳角三角函數的大小範圍及函數隨角變化增減的關係！

【解】(a) 範圍：如圖 1，$\angle C=rt.\angle$，則 c 不能小於 a 或 b，故 $sin\ A$，$cos\ A$ 必小於 1，$sec\ A$，$csc\ A$ 必大於 1；而 a 與 b 並無連帶關係，故 $cot\ A$，$tan\ A$ 可有任何值。

(b) 增減：如圖 1，設 B 點固定，即 c 長度固定。$\angle A$ 增大則 a 增長，而 b 減短；$\angle A$ 減小時則 a 減短 b 增長；設 C 點固定，即 b 長度固定，$\angle A$ 增大則 a 增長，減小，則 a 減短。故 $\angle A$ 增大時 $sin\ A$，$tan\ A$，$sec\ A$ 隨之增大；而 $cos\ A$，$cot\ A$，$csc\ A$ 反隨之減小。

2. 已知直角三角形的二邊 $a=6, b=8$，求 $\angle A$ 的各函數！

【解】由畢達哥拉氏定理得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{36+64}=10$.

則：$sin\ A=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$; $cos\ A=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$; $tan\ A=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$;

$$\cot A=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\quad \sec A=\frac{10}{8}=\frac{5}{4};\quad \csc A=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}.$$

3. 已知直角三角形的二邊 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, 求 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的各函數。

【解】 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2.$$

$$\sin A=\cos B=\frac{2mn}{m^2+n^2};\ \cos A=\sin B=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};$$

$$\tan A=\cot B=\frac{2mn}{m^2-n^2};\ \cot A=\tan B=\frac{m^2-n^2}{2mn};$$

$$\sec A=\csc B=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};\ \csc A=\sec B=\frac{n^2+n^2}{2mn}.$$

4. 已知 $a=\sqrt{m^2+n^2}$, $c=m+n$, 求 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的各函數!

【解】 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(m+n)^2-(m^2+n^2)}=\sqrt{2mn}.$

$$\sin A=\cos B=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n};\ \cos A=\sin B=\frac{\sqrt{2mn}}{m+n};$$

$$\tan A=\cot B=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{2mn}};\ \cot A=\tan B=\sqrt{\frac{2mn}{m^2+n^2}};$$

$$\sec A=\csc B=\frac{m+n}{\sqrt{2mn}};\quad \csc A=\sec B=\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

5. 已知一直角三角形內, $\sin A=\frac{4}{5}$, $a=72$, 求 c。

【解】 將 $\sin A=\frac{a}{c}$ 一式,分別以已知數代入,得 $\frac{4}{5}=\frac{72}{c}$,

$$\therefore\ c=72\times\frac{5}{4}=90.$$ 【答】

6. 已知 $\cos A=0.44$, $c=30.5$; 試求 b。

【解】 代入 $\cos A=\frac{b}{c}$, 得 $0.44=\frac{b}{30.5}$,

$$\therefore\ b=0.44\times30.5=13.42.$$ 【答】

7. 已知 $\tan A=\dfrac{11}{3}, b=\dfrac{27}{11}$ 試求 c。

【解】代入 $\tan A=\dfrac{a}{b}$，得 $\dfrac{11}{3}=\dfrac{11a}{27}$，$\therefore a=\dfrac{11}{3}\times\dfrac{27}{11}=9$。

由 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 得 $c=\sqrt{9^2+\left(\dfrac{27}{11}\right)^2}=\sqrt{81+\dfrac{729}{121}}$

$$=\sqrt{\frac{10530}{121}}=\frac{9}{11}\sqrt{130}.$$ 【答】

8. 試證：$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$。

【解】由定義 $\tan A=\dfrac{a}{b}$，$\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，得：

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\dfrac{a}{c}}{\dfrac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\tan A,\quad \therefore \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

9. 試證：$\tan A+\cot A=\sec A\cdot\csc A$。

【解】由定義得 $\tan A+\cot A=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$；

$$\sec A\cdot\csc A=\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c^2}{ab};$$

由畢氏定理知 $a^2+b^2=c^2$，

$$\therefore \tan A+\cot A=\sec A\cdot\csc A.$$

10. 試證：$\sin A\csc A+\cos A\sec A+\tan A\cot A=3.$

【解】由 B(1) 得：$\sin A\csc A+\cos A\sec A+\tan A\cot A$

$$=\sin A\cdot\frac{1}{\sin A}+\cos A\cdot\frac{1}{\cos A}+\tan A\ \frac{1}{\tan A}$$

$$=1+1+1=3.$$

C. 特别角的三角函數　$30°, 45°, 60°\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ 的各函數，爲問題中常見的，依據幾何學方法求得其