

研究生教学用书

非线性数值分析的理论与方法

THE THEORY AND METHODS FOR NONLINEAR NUMERICAL ANALYSIS

黄象鼎 曾钟钢 马亚南 编著



全国优秀出版社
武汉大学出版社

研究生教学用书

武汉大学研究生教学用书出版基金资助

非线性数值分析的理论与方法

THE THEORY AND
METHODS FOR NONLINEAR NUMERICAL ANALYSIS

黄象鼎 曾钟钢 马亚南 编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性数值分析的理论与方法/黄象鼎,曾钟钢,马亚南编著. —武汉: 武汉大学出版社, 2004. 9

研究生教学用书

ISBN 7-307-04244-4

I. 非… II. ①黄… ②曾… ③马… III. 非线性方程:代数方程—数值计算 IV. 0241.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 047916 号

责任编辑:顾素萍

责任校对:鄢春梅

版式设计:支 笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:武汉大学出版社印刷总厂

开本:787×980 1/16 印张:15.875 字数:281千字 插页:4

版次:2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

ISBN 7-307-04244-4/O·298 定价:19.00元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

随着科学技术的迅速发展及计算机应用的广泛普及,科学与工程计算已深入到许多学科领域,非线性数值分析的理论与方法日益受到数学、计算机科学、信息科学、物理及生命科学等领域的专家及广大科技工作者的重视。目前国内外对非线性科学的研究正处于蓬勃发展阶段,非线性数值分析的理论与方法正发挥着越来越重要的作用。武汉大学数学与统计学院将“非线性数值分析”作为本院硕士研究生的基础课程。该课程的特点是理论性强,实用面广,对培养、提高研究生的基本素质起相当重要的作用。武汉大学研究生院及武汉大学数学与统计学院对研究生教材建设十分重视,制定了“十五”教材建设规划,并积极付诸实施,本教材是其中之一。

本书是在原书《非线性数值分析》(武汉大学出版社,2000年)的基础上经较大的修改、增补而成的。其主要表现在:(1)剔除了原书的第6章而代之以现在的第6章;(2)将原书第1~3章讨论的有限维空间的问题推广到无穷维空间的情形(包括Banach空间的微分学、算子方程的解法等),同时对有限维空间的非线性方程求解也作了适当的增补;(3)增补了第4章中有关拓扑度方面的内容;(4)各章补配了习题。

书中有限维空间中的常向量、矩阵用黑体表示,带参数的向量或矩阵及无限维空间中的向量(即元素)用白体表示。

本教材的特点是:内容精练,取材新颖,图和例子丰富,吸收了近十年来这一领域研究的一些新成果。

本教材可作为计算数学及应用数学硕士研究生的教材,也可供基础数学、物理、计算机科学、信息及工程类的研究生与科技工作者学习、参考。

雷晋干教授对本教材的编写提出了宝贵的意见与建议,武汉大学研究生院、武汉大学数学与统计学院、武汉大学出版社对本书的编写与出版给予了大力支持,在此一并致谢。

由于作者水平所限,本书在内容取舍、叙述方面难免有不妥之处,诚望读者及同行批评指正。

作者

2004年7月

目 录

第 1 章 基本概念与若干理论基础	1
1.1 多元非线性方程组的两个实例	1
1.2 有限维非线性映像的微分学简介	4
1.3 Banach 空间的微分学	21
1.4 凸泛函, 梯度映像, 单调映像	27
1.5 非线性方程 (组) 的可解性	37
1.6 反函数定理与隐函数定理	44
习题	51
第 2 章 压缩条件下的迭代法	54
2.1 迭代法与不动点定理	54
2.2 迭代格式的构造	57
2.3 迭代法的收敛性与收敛阶	59
2.4 迭代投影法与投影迭代法	66
习题	77
第 3 章 牛顿法与拟牛顿法	79
3.1 牛顿法	79
3.2 牛顿法的若干变形	84
3.3 牛顿法的半局部收敛性	90
3.4 算子方程的牛顿法与投影牛顿法	100
3.5 拟牛顿法	105
习题	114
第 4 章 同伦延拓法	117
4.1 映像的同伦	117
4.2 萨德 (Sard) 定理	122

4.3	拓扑度理论简介	127
4.4	同伦延拓法的基本思想, 基本微分方程	136
4.5	路径跟踪过程的总体结构	141
4.6	计算切向量	142
4.7	牛顿迭代校正	148
4.8	路径跟踪步骤	152
4.9	两个数值例子	153
4.10	某些应用	158
	习题	170
第 5 章	带参数的非线性问题的解法	173
5.1	若干例子	173
5.2	带参数问题的逼近理论	176
5.3	简单分歧点的逼近	182
5.4	奇异点的计算方法	189
5.5	扩充系统的求解技巧	196
5.6	Hopf 分歧点的计算	203
	习题	208
第 6 章	不适定问题的数值解法简介	210
6.1	基本概念与不适定问题的例子	210
6.2	一般正则化方法概述	214
6.3	吉洪诺夫正则化	222
6.4	Landweber 迭代	234
6.5	投影法	238
	习题	240
	参考文献	241

(1.1). 另外, 非线性优化、数理经济学问题也常常归结为解非线性方程组 (1.1). 因此研究方程组 (1.1) 的解法具有重要的实际意义. 下面, 我们介绍导出方程组 (1.1) 的两个例子.

例 1.1 (非线性两点边值问题) 非线性两点边值问题的一般形式为

$$\begin{cases} u'' = f(t, u), & 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中, $f(t, u)$ 关于 u 是非线性的.

当 $f(t, u) = c \sin u + g(t)$ 时, (1.3) 描述了单摆的强迫振动.

当 $f(t, u) = -\lambda e^u$ (λ 为参数) 时, (1.3) 描述了正的恒温源所产生的温度扩散, 特别地, 它描述了电导体的焦耳(Joule)损耗. 这里, λ 表示直流电流强度的平方, e^u 表示恒温电阻.

对于 (1.3), 若假定 f 在集合

$$S = \{(t, u) | 0 \leq t \leq 1, -\infty < u < +\infty\}$$

上二次连续可微, 则我们可用差分法计算 (1.3) 的近似解. 取步长

$$h = \frac{1}{n+1}, \quad t_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, n+1,$$

则用二阶中心差商近似 $u''(t_j)$ 时, 便有

$$u''(t_j) \approx \frac{1}{h^2} [u(t_{j+1}) - 2u(t_j) + u(t_{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

这时, 得到 (1.3) 的离散化方程

$$\frac{1}{h^2} [u(t_{j+1}) - 2u(t_j) + u(t_{j-1})] = f(t_j, u(t_j)) + r(t_j, h), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

其中, $r(t_j, h)$ 是近似式 (1.4) 产生的误差, 当 u 满足一定光滑性条件时, 可得

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(t_j, h) = 0.$$

舍去 (1.5) 中误差项, 以 x_j 表示 $u(t_j)$ 的近似值, $j = 1, 2, \dots, n$, 则得 (1.5) 的近似方程组:

$$\begin{cases} x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1} = h^2 f(t_j, x_j), & j = 1, 2, \dots, n, \\ x_0 = \alpha, x_{n+1} = \beta. \end{cases} \quad (1.6)$$

如果引进 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

且设映像 $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 由下式定义:

$$\varphi(x) = h^2 \begin{pmatrix} f(t_1, x_1) - \frac{\alpha}{h^2} \\ f(t_2, x_2) \\ \vdots \\ f(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ f(t_n, x_n) - \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix},$$

则方程组(1.6)可写成

$$Ax + \varphi(x) = 0. \quad (1.7)$$

方程(1.7)就是方程(1.2)的形式, 其中

$$F(x) = Ax + \varphi(x).$$

例 1.2 考虑用投影法求解非线性积分方程:

$$u(t) = \int_0^1 k(t, s, u(s)) ds + g(t), \quad (1.8)$$

其中, $k(t, s, u)$ 关于变元连续. 取空间 $X = C[0, 1]$, 将区间 $[0, 1]$ $n-1$ 等分, 其节点记为 t_i ($i=1, 2, \dots, n$), 取 $e_i(t)$ 为

$$e_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq t \leq t_{i-1}; \\ \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, & \text{若 } t_{i-1} \leq t \leq t_i; \\ \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}, & \text{若 } t_i \leq t \leq t_{i+1}; \\ 0, & \text{若 } t_{i+1} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (i=2, 3, \dots, n-1);$$

$$e_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \geq t_2; \\ \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, & \text{若 } t_1 \leq t \leq t_2; \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, & \text{若 } t_{n-1} \leq t \leq t_n; \\ 0, & \text{若 } t \leq t_{n-1}. \end{cases}$$

注意, 这里由于是等分, 故

$$t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n} \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

由 $e_i(t)$ 的结构可知, $e_i(t)$ 是 $[0, 1]$ 上的分段线性函数, $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ 线性无关, 它们张成 n 维子空间 X_n .

令该积分方程的近似解为

$$u_n(s) = \sum_{i=1}^n c_i e_i(s), \quad (1.9)$$

其中, c_i 为待定系数.

对任一 $x \in X = C[0, 1]$, 它在 X_n 上的投影定义为

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n x(t_j) e_j(t), \quad (1.10)$$

即投影算子 $P_n: X \rightarrow X_n$ 是分段线性插值投影. 则(1.8)的投影方程为

$$u_n(t) = \int_0^1 P_n(k(t, s, u_n(s))) ds + P_n(g). \quad (1.11)$$

将(1.9)代入(1.11)便得到如下非线性方程组:

$$c_i - k_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = g(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.12)$$

其中,

$$k_i(c_1, c_2, \dots, c_n) = \int_0^1 k(t_i, s, u_n(s)) ds.$$

若用数值积分公式 $I_n(x) = \sum_{j=1}^n w_j x(t_j)$ 计算上述积分, 则(1.12)可化为

$$c_i - \sum_{j=1}^n w_j k(t_i, s_j, c_j) - g(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

这就化成了非线性方程组(1.1)的形式.

注: 关于投影算子的一般定义, 我们将在第二章中介绍.

1.2 有限维非线性映像的微分学简介

有限维映像 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 又称多元函数或向量值函数.

1.2.1 范数、凸集

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 我们知道, 下式定义了向量 x 的一种范数:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty), \quad (1.13)$$

其中, 常用的有如下三种向量范数:

$$1\text{-范数: } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$2\text{-范数: } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2};$$

$$\infty\text{-范数: } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

它们分别对应于 $p=1$, $p=2$, $p \rightarrow \infty$.

集合

$$S(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$$

称为范数 $\|x\|_p$ 所对应的单位球面. 图 1-1 绘出了几种不同范数所对应的单位球面(2 维情形).

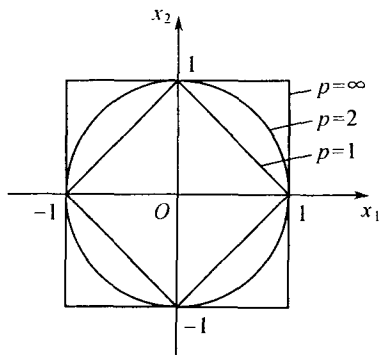


图 1-1 $\mathbf{R}^2$ 中单位球面

今后若不特别声明, 我们以 $\|x\|$ 表示向量 x 的某种范数. 由数值线性代数理论知, 有限维空间上任何两种范数都是等价的. 就是说, 若 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任何两种范数, 则存在常数 $c_2 \geq c_1 > 0$, 使得

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

集合

$$S(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

称为点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的 δ -邻域, 或称为以 x_0 为心、以 δ 为半径的开球. 而用

$$\bar{S}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

记为相应的闭球.

点 $x_0 \in D \subset \mathbf{R}^n$ 称为 D 的内点, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $S(x_0, \delta) \subset D$. 由 D 的内点组成的点集称为 D 的内部, 记为 $\text{int } D$. 用 $\bar{D}$ 记为 D 的闭包, 它是由 D 的所有点及其所有聚点构成的集合. 若 $D = \text{int } D$, 则称 D 为开集, 连通的开集称为区域.

集合 $D \subset \mathbf{R}^n$ 称为凸集, 如果 $\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in D.$$

易知, 闭单位球 $\bar{S}(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ 是凸集.

若 D 是凸集, 则用归纳法可证明, 对任意的正整数 m , 只要 $x_i \in D, \lambda_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, 就有 $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in D$, 这时我们也称 $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ 为向量 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的凸组合.

图 1-2 的(a)和(b)分别给出了凸集与非凸集的图示. 其中(b)的第 2 个图 $D = D_1 \cup D_2$, 即 D 表示两个不相交集 D_1, D_2 之并, 这时 D 显然不是凸集.

1.2.2 开映像与闭映像

设 D, E 分别为 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的非空子集, 映像 $F: D \rightarrow E$. 又设 S 为 D 的子集. 则 S 在 F 作用下的像记为

$$F(S) = \{F(x) \mid x \in S\}.$$

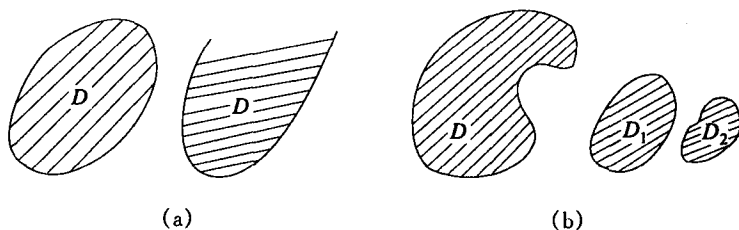


图 1-2

显然 $F(S)$ 是 E 中的集合. 又若 Ω 为 E 的子集, 称集合

$$F^{-1}(\Omega) = \{x \in D \mid F(x) \in \Omega\}$$

为 Ω 在 F 作用下的原像. 它是 D 中的集合.

称映像 $F: D \rightarrow E$ 是单射的 (即一一映像), 如果关系 $F(x) = F(x')$ 蕴含 $x = x'$; 称 F 为满射的, 如果对于每个 $y \in E$, 至少存在一个 $x \in D$ 使得 $F(x) = y$, 或者有 $F(D) = E$; 称 F 为双射的, 如果 F 既是单射的又是满射的.

对于 $\mathbf{R}^n$ 的子集 D , 称 $\mathbf{R}^n$ 中的每个开集与 D 的交集为 D 中的相对开集, 称 $\mathbf{R}^n$ 中的每个闭集与 D 的交集为 D 中的相对闭集. 值得注意的是, $\mathbf{R}^n$ 中的子集 D 的相对开集不一定是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, 它只是 $\mathbf{R}^n$ 中的某个开集与 D 的交集; 当然, 如果 D 本身为 $\mathbf{R}^n$ 的开集时, D 的每个相对开集也是 $\mathbf{R}^n$ 的开集. 同样, 不难理解相对闭集与闭集的差异.

设 D, E 分别为 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 中的子集. 对于映像 $F: D \rightarrow E$, 如果 D 的每个相对开集在 F 作用下的像都是 E 的相对开集, 则称 F 为开映像; 如果 D 的每个相对闭集在 F 作用下的像都是 E 的相对闭集, 则称 F 为闭映像.

1.2.3 连续性与可微性

设向量值函数 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 其中

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T,$$

这里 $f_i(x)$ 为 $F(x)$ 的第 i 个分量函数. $m = n$ 时为其特例. 若各分量函数为线性的, 即

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

此时记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = Ax + b. \quad (1.14)$$

记所有由 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的线性映像组成的集合为 $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 则上述矩阵 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 此时称由(1.14)定义的映像为仿射映像.

一般情况下, $f_i(x)$ 为非线性函数.

定义 1.1 设 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. 如果对任何固定的 $h \in \mathbf{R}^n$, 恒有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|F(x_0 + th) - F(x_0)\| = 0, \quad (1.15)$$

则称 F 在点 x_0 处是半连续的. 若有

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| = 0, \quad (1.16)$$

则称 F 在点 x_0 处是连续的.

由定义知 F 在 x_0 处连续蕴含着 F 在 x_0 处半连续.

F 在 x_0 处连续也可表述为: 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使得对任何 $x \in S(x_0, \delta) \subset D$, 有

$$\|F(x) - F(x_0)\| < \epsilon.$$

对于闭区域 $\bar{D}$ 的边界点 $\bar{x}$, 如果对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, \bar{x}) > 0$, 使得对任意的 $x \in S(\bar{x}, \delta) \cap D$, 有

$$\|F(x) - F(\bar{x})\| < \epsilon,$$

则称 F 在边界点 $\bar{x}$ 处连续.

若映像 F 在 D 内每一点都连续, 则称映像 F 在 D 上连续.

易见, F 在点 $x_0 \in D$ (或在 D 上) 连续的充要条件是, F 的每个分量函数 f_i 在点 $x_0 \in D$ (或在 D 上) 连续.

对于映像 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow E \subset \mathbf{R}^m$, F 在 D 上连续等价于 E 中的每个相对开集在 F 作用下的原像是 D 中的相对开集, 也等价于 E 中的每个相对闭集在 F 作用下的原像是 D 中的相对闭集. 特别地, 当 $D = \mathbf{R}^n$, $E = \mathbf{R}^m$ 时, 映像 $F: D \rightarrow E$ 在 $D (= \mathbf{R}^n)$ 上连续, 等价于 $E (= \mathbf{R}^m)$ 中的每个开集在 F 作用下的原像是 $D (= \mathbf{R}^n)$ 中的开集, 也等价于 $E (= \mathbf{R}^m)$ 中的每个闭集在 F 作用下的原像是 $D (= \mathbf{R}^n)$ 中的闭集.

注意, 开映像、闭映像、连续映像是三个互不蕴含的概念.

定义 1.2 称映像 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 于 D 的内点 x 处 G-可微 (Gâteaux 可微) 或 G-可导, 如果存在线性映像 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 使得对任何 $h \in \mathbf{R}^n$, $x + h \in D$, 有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|F(x + th) - F(x) - tAh\| = 0. \quad (1.17)$$

此时,称 A 为 F 在点 x 处的 G -导数,记为 $F'(x) = A$.

注 1 由有限维空间中范数的等价性知, (1.17) 中的极限不依赖于 $\mathbf{R}^m$ 中范数的取法. 即若 F 在点 x 处按 $\mathbf{R}^m$ 中的某一种范数是 G -可微的, 则它按 $\mathbf{R}^m$ 中任一种范数也是 G -可微的.

注 2 G -导数 A 是惟一的, 事实上, 若 A_1 与 A_2 都满足 (1.17), 则对任一 $h \in \mathbf{R}^n$ 及适当小的 $t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \|(A_1 - A_2)h\| &\leq t^{-1} \|F(x + th) - F(x) - tA_1h\| \\ &\quad + t^{-1} \|F(x + th) - F(x) - tA_2h\|. \end{aligned}$$

按定义, 右端在 $t \rightarrow 0$ 时极限为零, 故必有

$$\|(A_1 - A_2)h\| = 0.$$

又由于 h 是任意的, 因此有 $A_1 = A_2$.

注 3 G -导数是按指定方向定义的, 它是多元实值函数方向导数的推广. 因此, F 在 x 处 G -可微并不能保证 F 在 x 处连续. 比较定义 1.1 与定义 1.2 知, F 在 x 处 G -可微能保证 F 在 x 处半连续.

设 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $D_0 \subset \text{int } D$. 如果 F 对于 D_0 的每一点都 G -可微, 则称 F 在 D_0 上 G -可微. 注意, 这里要求 D_0 为 D 的内部是与定义 1.2 中要求 x 为 D 的内点相一致的. 当 F 在 D_0 上 G -可微时, 对每一 $x \in D_0$, $F'(x)$ 有定义, 且

$$F'(x) \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

从而 $F'(x)$ 定义了由 D_0 到 $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 的映像

$$F': D_0 \subset \mathbf{R}^n \rightarrow L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

此映像称为 F 的导映像. 值得注意的是, 映像 F 的定义域为 $D \subset \mathbf{R}^n$, 而对每一个 $x \in \text{int } D$, $F'(x)$ 却是定义在全空间 $\mathbf{R}^n$ 上的线性映像; 另外, 虽然映像 F 与其导映像 F' 都定义在 $D_0 \subset \mathbf{R}^n$ 上, 但其值域却属于完全不同的空间.

下面我们来求在给定坐标系下 G -导数的表达式, 即对任意给定的点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F'(x) = A$ 的表达式. 由于 $F'(x) \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 可记 $F'(x) = A = (a_{ij})_{m \times n}$, 取 $h = e_j$, 这里 $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, 其中 e_j 的第 j 个分量为 1, 其余分量均为零. 由 (1.17) 式, 应该有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} |f_i(x + te_j) - f_i(x) - ta_{ij}| = 0.$$

可见,

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \partial_j f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.18)$$

于是, $F'(x)$ 为 $F(x)$ 在点 x 处的雅可比 (Jacobi) 矩阵:

$$F'(x) = (\partial_{j_i} f_i(x)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \partial_2 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

需要指出的是, 由 F 在点 x 处的 Jacobi 矩阵存在, 也就是 F 在 x 处的所有偏导数存在, 并不能得出 F 在 x 处 G -可微.

例 1.3 若映像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 定义为

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{若 } x_2 = 0; \\ x_2, & \text{若 } x_1 = 0; \\ 1, & \text{其他,} \end{cases}$$

则偏导数 $\partial_1 f(0)$ 及 $\partial_2 f(0)$ 均存在, 但 f 在 $(0,0)$ 处没有 G -导数, 读者试证之.

当 $m=1$ 时, $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为定义于 $\mathbf{R}^n$ 中的实值函数 $F(x) \equiv f(x)$ (即通常数学分析中的多元函数), 此时

$$f'(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \cdots, \partial_n f(x)),$$

$f'(x)^T$ 称为 f 在 x 处的梯度:

$$\text{grad } f(x) = f'(x)^T.$$

定义 1.3 称映像 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 于内点 $x \in D$ 处 F -可微 (Fréchet 可微) 或 F -可导, 如果存在线性映像 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 使

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(x+h) - F(x) - Ah\| = 0, \quad (1.20)$$

此时称 A 为 F 在 x 处的 F -导数, 仍记为 $A = F'(x)$.

易见, 极限 (1.20) 蕴含极限 (1.17), 即若 F 在 x 处 F -可微, 则 F 在 x 处必 G -可微, 且此时 F -导数与 G -导数相等. 由此可知, G -导数的任何性质对 F -导数也成立. 特别地, F -导数是惟一的, 且它的具体表达式仍是雅可比矩阵 (1.19). 当然, 由 F 在 x 处 G -可微不一定推得出 F -可微, 稍后我们将给出这方面的例子.

(1.20) 式也可改写为

$$F(x+h) - F(x) = Ah + w(x, h), \quad (1.21)$$

其中, $w(x, h) \in \mathbf{R}^m$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(x, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

由定义 1.3 易知, F -可微是多元实值函数全微分概念的推广.

注 1 有的文献以更一般的方式 (即从一个微分概念入手) 引入可微性的有关概念. 兹介绍如下 (读者可将其与定义 1.2、定义 1.3 作比较):

设 $F: D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. 若对某一 $\bar{x} \in \text{int } D$ 及某 $h \in \mathbf{R}^n$, 有极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [F(\bar{x} + th) - F(\bar{x})] = DF(\bar{x}, h),$$

则说 F 在 $\bar{x}$ 处沿方向 h 有 Gâteaux 微分 (简称沿 h 方向 G-微分或弱微分) $DF(\bar{x}, h)$, 若 F 在 $\bar{x}$ 处沿任何方向都有 G-微分, 则说 F 在 $\bar{x}$ 处 Gâteaux 可微, 简称 G-可微或弱可微. 进一步, 如果 F 在 $\bar{x}$ 处 G-可微, 且 G-微分 $Df(\bar{x}, h)$ 关于 h 是线性的, 即它可表示成

$$DF(\bar{x}, h) = [DF(\bar{x})]h, \quad DF(\bar{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

这时, 称 $DF(\bar{x})$ 为 F 在 $\bar{x}$ 处的 G-导数. 可见定义 1.2 的 G-可微性指的是这种情形. 值得注意的是, 即便在 $\bar{x}$ 处沿所有 $h \in \mathbb{R}^n$ 的 G-微分都存在, 也不能保证 G-导数存在, 因为 G-微分关于 h 不一定是线性的. 但也应看到, G-微分关于 h 是齐次的, 即

$$DF(\bar{x}, th) = tDF(\bar{x}, h), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

下一节介绍一般 Banach 空间上的微分学时, 我们将举出有关的例子.

如果在 $\bar{x}$ 沿所有 h 的 G-微分都存在, 又有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(x+h) - F(x) - dF(\bar{x}, h)\| = 0,$$

则称 F 在 $\bar{x}$ 处有 Fréchet 微分 $dF(\bar{x}, h)$ (简称为 F-微分或强微分). 若 F-微分关于 h 线性, 即 $dF(\bar{x}, h)$ 可表示成 $[dF(\bar{x})]h$, 则称 $dF(\bar{x})$ 为 F 在 $\bar{x}$ 处的 F-导数, 这时与定义 1.3 一致.

注 2 一元函数微分法中很多运算法则可移到 G-导数与 F-导数. 特别地, 若 $F_1: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 与 $F_2: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 $x \in \text{int } D$ 都有 G-导数 (或 F-导数), 则对任何数 α 与 β , $\alpha F_1 + \beta F_2$ 在 x 也有 G-导数 (或 F-导数), 且

$$(\alpha F_1 + \beta F_2)'(x) = \alpha F_1'(x) + \beta F_2'(x).$$

此外, 若 F 是线性映像, 则 F 在 x 处的 G-导数或 F-导数均为其自身, 即有

$$F'(x) = F(x).$$

前面谈到, 由 F 在 x 处 G-可导只能推出 F 在 x 处半连续, 而不能断定 F 在 x 处连续, 但当 F 在 x 处 F-可导时, 则可推出 F 在 x 处连续. 即我们有

定理 1.1 若 $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 于点 x 处 F-可导, 则 F 在 x 处连续. 更确切地说, 存在 x 的闭球 $\bar{S}(x, \delta) \subset D$ 及常数 $C \geq 0$, 使得当 $\|h\| \leq \delta$ 时, 有

$$\|F(x+h) - F(x)\| \leq C \|h\|. \quad (1.22)$$

证 注意我们只在 D 的内点定义了可导性, 故 $x \in \text{int } D$, 从而有 $\delta_1 > 0$, 使得当 $\|h\| < \delta_1$ 时, $x+h \in D$. 于是, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 由 (1.20) 有 $0 < \delta \leq \delta_1$, 当 $\|h\| \leq \delta$ 时,

$$\|F(x+h) - F(x) - Ah\| \leq \epsilon \|h\|.$$

所以

$$\|F(x+h) - F(x)\| \leq \|A\| \|h\| + \varepsilon \|h\|.$$

取 $C = \|A\| + \varepsilon$, 便知(1.22)成立. $\square$

定理 1.1 指出了连续性是 F -可导的必要条件.

需要指出的是, 即使处处都存在偏导数的映像, 也未必是 F -可导的.

例 1.4 定义映像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{若 } x \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

则 F 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处存在偏导数, 但 F 在原点 $(0,0)$ 处不可导, 因 F 在原点不连续.

下面我们给出 F 在某点 F -可微的一个充分必要条件:

定理 1.2 映像 $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 $x \in \text{int } D$ 为 F -可微的充分必要条件是: 每个分量函数 $f_i(x)$ 在 x 处可微 ($i=1, 2, \dots, m$).

证 必要性. 设 F 在点 x 处 F -可微. 则有(1.21)式成立:

$$F(x+h) - F(x) = Ah + w(x, h),$$

其中, $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\|w(x, h)\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$). 考虑投影映射

$$\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow y_i \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

显然 $\pi_i \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. 记 $A_i = \pi_i A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $w_i = \pi_i \circ w$ ($i=1, 2, \dots, m$). 注意到 $\pi_i \circ F = f_i$, 于是将 π_i 作用到(1.21)式得

$$f_i(x+h) - f_i(x) = A_i h + w_i(x, h) \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (1.23)$$

由 $|w_i(x, h)| \leq \|w(x, h)\| \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), 根据实值函数可微性定义, 知 $f_i(x)$ 在 x 处可微.

充分性. 设 F 的分量函数 $f_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 在点 x 处可微, 此时(1.23)式成立, 定义 $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 如下:

$$Ah = (a_1 h, a_2 h, \dots, a_m h).$$

记 $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, 则由(1.23)可得(1.21)式. 由于

$$\|w(x, h)\| \leq C \sum_{i=1}^m |w_i(x, h)| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

这里 C 为某个大于零的常数, 故知 F 在 x 处 F -可微. $\square$

推论 1.1 若 $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在点 $x \in \text{int } D$ 的某邻域内存在偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$), 且这些偏导数在点 x 处连续, 则 F 在点 x 处 F -可微.