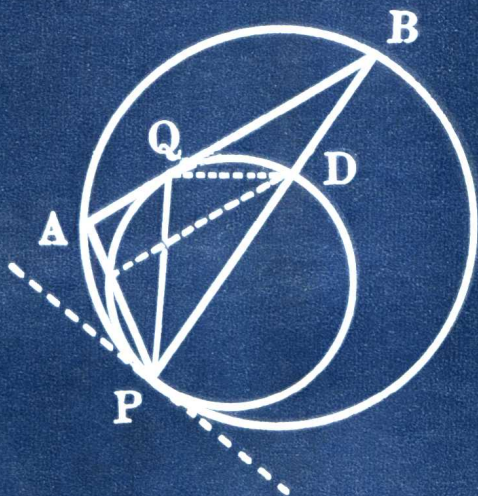


怎样证明平面几何题

石权 凤承 赵时 编 著



黑龙江科学技术出版社

怎样证明平面几何题

赵凤石 时承权 编著

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

封面设计 李忠民

怎样证明平面几何题

赵凤石 时承权 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部街28号)

绥化印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32·印张5 12/16·字数126.000千

1982年5月第1版·1982年5月第1次印刷

印数: 1—58.000

书号: 13217·031 定价: 0.56元

目 录

第一章 逻辑知识简介

第一节 概 念	(1)
一、概念的概述	(1)
二、概念的内涵与外延	(2)
三、概念间的关系	(3)
四、概念的定义	(6)
五、概念的分类	(9)
第二节 命 题	(13)
一、判断与命题	(13)
二、命题的四种形式及其相互关系	(13)
三、公理和定理	(15)
四、充分条件、必要条件和充要条件	(16)
第三节 证 明	(19)
一、证明的概述	(19)
二、证明的规则	(20)
三、证明的方法	(22)

第二章 怎样添设辅助线

第一节 辅助线的概述	(32)
第二节 常用辅助线引法简介	(33)
一、添辅助线造成全等三角形	(33)
二、添辅助线造成相似三角形	(33)

三、关于平行线的添置和运用	(34)
四、三角形或梯形的中位线	(34)
五、直角三角形斜边中线	(35)
六、有关圆的辅助线	(36)
七、辅助圆的使用	(38)

第三章 证题必备的基础

第一节 准确的理解概念和定理	(44)
第二节 加强基本技能训练	(45)

第四章 按结论归类的证明方法

第一节 证明线段相等	(52)
一、常用定理	(52)
二、常用证法	(53)
练 习 题	(72)
第二节 证明线段成比例或等积	(74)
一、常用定理	(74)
三、常用证法	(75)
练 习 题	(104)
第三节 证明线段的和差倍分	(107)
一、常用定理	(107)
二、常用证法	(107)
练 习 题	(117)
第四节 证明角相等	(119)
一、常用定理	(119)

二、常用证法	(127)
练 习 题	(129)
第五节 证明角的和差倍分	(129)
一、常用定理	(129)
二、常用证法	(129)
练 习 题	(134)
第六节 证明线段或角的不等	(135)
一、常用定理	(135)
二、常用证法	(136)
练 习 题	(142)
第七节 证明两直线平行或垂直	(143)
一、常用定理	(143)
二、常用证法	(144)
练 习 题	(151)
第八节 证明三点共线或三线共点	(152)
练 习 题	(158)
第九节 证明面积相等	(159)
一、常用定理	(159)
二、常用证法	(160)
练 习 题	(169)
第十节 定值问题	(170)
一、常用方法	(170)
二、证法举例	(171)
练 习 题	(179)

第一章 逻辑知识简介

本章介绍一点学习几何所必需的简单的形式逻辑知识。

“形式逻辑”所研究的内容是思维的初步规律及思维形式。思维是人类特有的高级心理活动，它是人类的大脑反映客观事物一般特性，以及客观事物之间的相互联系的一般过程。

思维总是经过一定的形式来表现的。思维的基本形式是概念、判断和推理，以及它们之间的联系。

第一节 概 念

一、概念的概述

一切概念，包括数学概念在内，都始于实践。人类在实践活动中，通过自己的感官对某个客观事物产生了初步的感觉和印象，这就掌握了事物的许多属性。然后，人们再通过大脑的思维活动，对感性材料进行加工，就可以找出事物的最基本属性，这样概念就形成了。不过，数学概念只是通过抽象事物的空间形式及数量关系方面的本质属性而得到的。

例如，人们在实践中接触到许多圆形的物体，发现它们的直径、周长、面积、在空间的位置虽然各不相同，但是它们的形状都具有共同的特征。这就是人们对圆的初步感觉和印象，它属于认识的感性阶段。通过继续的实践和大脑的思

维加工，发现不论什么样的圆都具有下列属性：圆上所有的点到一个定点的距离都等于定长；平面上凡是与该定点间的距离等于定长的点都在圆上。根据这些基本属性，人们就可以把圆和不是圆的曲线区别开来，从而形成了圆的概念：“平面上到一个定点的距离等于定长的点的集合”。

概念是反映并确定客观事物的本质属性的思维形式。判断和推理都是由概念组成的，所以概念是人类思维的最基本单位，是思维的“细胞”。

二、概念的内涵与外延

任何一个概念都有内涵与外延两个方面。

概念的内涵是指这个概念的本质属性的总和。概念的外延是指它所反映的客观事物的范围。概念的内涵是对概念的本质的描述，而外延则是对概念的量的描述。内涵与外延是构成概念的两个方面，它们是统一的，互相联系的，又是互相制约的。要正确地认识和掌握一个概念，就必须首先明确它的内涵与外延。

如“梯形”这个概念的内涵是：四边形的一组对边平行，而另一组对边不平行。它的外延是指具有上述属性的所有四边形（见图1）。

概念的内涵与外延是互相制约的。如果概念的内涵扩大，就会引起外延的缩小；反之，概念的内涵缩小，就会引起它的外延的扩大。如在“矩形”的内涵中，再增添“邻边相等”这个属性，就得一个新概念“正方形”，它的外延缩

小为矩形外延的一部分。反之，在“矩形”的内涵中，去掉“有一个角是直角”这个属性，就变为“平行四边形”了。它的外延扩大为所有的平行四边形。

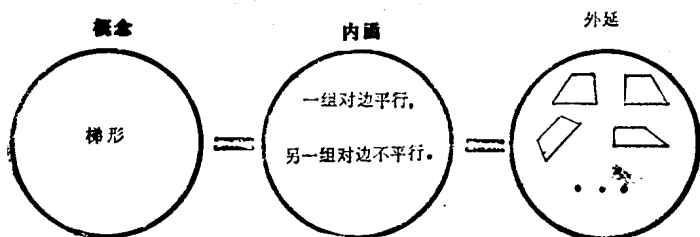


图 1

三、概念间的关系

1. 相容关系 如果两个概念的外延有公共部分，那么概念间的关系称为相容关系。相容关系又可分为同一关系、主从关系和交叉关系。

(1) **同一关系** 是指两个概念在外延上完全重合的关系（见图 2）。如“正整数”和“自然数”，“无限不循环小数”和“无理数”。凡是同一关系的两个概念，在判断或证明中可以互相代用。

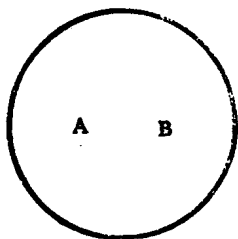


图 2

(2) **主从关系** 也叫种属关系，即一个外延较大的概念包含着另一个外延较小的概念的关系。这个外延较大的概念称为主概念（种概念），外延较小的概念称为从概念（属概念）。主概念包含从概念。如

“四边形与平行四边形”，“方程与一元二次方程”等都是主从关系。主从关系可用图 3 表示。

应当注意，不是任何两个概念都具有种属关系，如“函数”与“切线”就不具有这种关系。

种属关系不一定是全体与部分关系。如“年”与

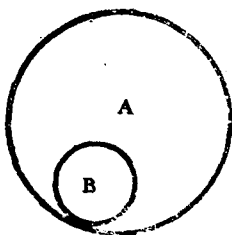


图 3

“月”，“对数”与“首数”之类的关系都是全体与部分的关系，而不是种属关系。我们不能说每一月都是一年，但是可以说分数是有理数。这是因为“分数”是“有理数”的一个属概念。当然，分数同时又是有理数的一部分。

概念的种和属是相对的，同一个概念对一个概念来说是种，而对另一个概念来说又是属了，如“平行四边形”是“菱形”的种，而是“四边形”的属。

(3) 交叉关系 也叫部分重合关系。即两个概念的外延有部分重合的关系。例如“正实数”与“有理数”，“等腰三角形”与“锐角三角形”都是交叉关系。可用图 4 表示。

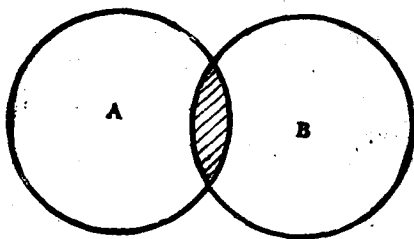


图 4

2. 不相容关系 如果两个概念的外延无公共部分，那么它们是不相容关系。

(1) 矛盾关系 如果两个概念在外延上互相排斥，而它们的外延总和等于它们的邻近的种概念的外延，那么这两个概念间的关系称为矛盾关系，如“有理数”与“无理数”，

“直角三角形”与“斜三角形”都是矛盾关系，可用图 5 表示。（ $\bar{A}$ 表示不是 A ）

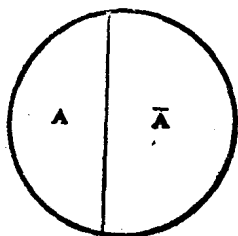


图 5

(2) 对立关系 是指两个概念在外延上互相排斥，而它们的外延的总和小于它们的邻近的种概念的外延。如“正实数”与“负实数”，“平行四边形”与

“梯形”等都是对立关系，可用图 6 表示。

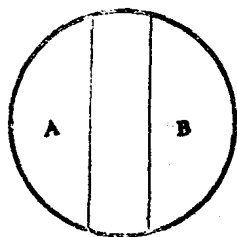


图 6

矛盾概念和对立概念共同之处是，它们都隶属于同一个种概念；相异之处是，两个对立概念之间有中间概念存在，而两个矛盾概念之间是没有中间概念的。

四、概念的定义

1. 概念定义的结构

我们已经知道概念的内涵是其本质属性的总和。给概念下定义，就是揭示它的本质属性，以便和别的概念区别开来。

定义是揭示概念内涵的一种逻辑方法。

概念的定义通常是由肯定判断来完成的。一般由两部分组成，一部分用来揭示概念的内涵，叫做定义概念；另一部分用来显示概念的外延，叫做被定义概念。定义的结构形式为“ A 叫做 B ”，或“ B 就是 A ”，其中 A 就是定义概念，而 B 是被定义概念。

2. 下定义的方法

(1) 属差法 就是把被定义概念的属差（与它的并列概念之间的本质属性的差别）加上它的最邻近的种概念。其公式为。

被定义概念 = 属差 + 邻近的种概念

如“只有一个未知数，且未知数的最高次数是二次的整式方程叫做一元二次方程”，其中“一元二次方程”是被定义概念，“只有一个未知数，且未知数的最高次数是二次”是属差，“整式方程”就是最邻近的种概念。

数学中大部分概念都是采用“属差法”下定义的。其优点在于，它明确指出了被定义概念的最邻近的种概念以及属差。这样就给我们理解和掌握概念带来了方便。但是，它不

是下定义的唯一方法，如圆的概念就不是用属差法下定义的。

(2) 发生定义法 它是用描述被定义概念的形成产生的方法来下定义的。例如“平面内一动点到一定点和到一条定直线的距离相等时，这个动点的轨迹叫做抛物线”。严格地说，发生定义法中也是有其最邻近的种概念和属差的。如上述抛物线的定义中，“轨迹”就是“抛物线”的种概念。所以发生定义法是属差法的一种特殊情形。

还有一些其它的定义方法，但是中学数学中应用不多，故不再介绍了。

3. 下定义必须遵守的规则：

(1) 定义必须相应相称 这个规则的含意是，被定义概念与定义概念两者的外延应当相等，如圆周角的定义：

“顶点在圆上，两边与圆相交的角叫做圆周角”。这里被定义概念“圆周角”和定义概念“顶点在圆上，两边与圆相交的角”的外延是一致的。

(2) 不允许“循环定义” 这个规则的含意是，不能用甲概念来定义乙概念，而同时又用乙概念来定义甲概念，如“ 90° 角叫做直角”和“直角的 $\frac{1}{90}$ 叫做 1° ”就是“循环定义”。

(3) 定义中只应包含概念的本质属性，如“平行四边形”有下面这些属性：①两组对边分别平行；②两组对边分别相等；③两组对角分别相等；④邻角互补；⑤对角线互相平分。我们在给“平行四边形”下定义时，只须用①项（或

②亦可)就够了,如果把其它属性都加进去就是画蛇添足了。

(4) 概念的定义中不允许包含未下定义概念。否则,本身的意义不明确,就不能成为定义。如给“平行四边形”下定义,就必须用“对边”“平行”“四边形”等前此概念,而这些概念必须有定义。

按照本款的规则,给前述三个概念下定义时,又必须使用更前的概念。如此前溯,必有穷期,一定有最前面的概念,这些概念就不能用以前的概念下定义了。如“点”、“直线”、“平面”、“集合”、“元素”等都是不定义概念,也叫原始概念。它们是从实践中抽象出来的基本概念,对它们只能描述,而不能严格定义。

(5) 下定义不能越等 用属差法下定义,必须使用被定义概念的最邻近的种概念。否则,这个定义就会不准确。如“有一个角是直角的四边形叫做矩形”,就是犯了越等的错误。因为“四边形”不是“矩形”的最邻近的种。

(6) 一般情况下定义不应当是否定的 给概念下定义,就是要揭示概念的内涵。正面的指出被定义概念的本质属性是容易明确的,而否定的定义就不能很好的完成这一任务。如我们用“不是有理数的数叫做无理数”这样的否定定义就不好。不是说这句话错了,而是这句话太隐晦,不明确。但是在不可避免时,也可以有例外,如“既不平行又不相交的两条直线叫做异面直线”,就是用否定的语气下定义的。

五、概念的分类

1. 什么叫分类

分类是揭示概念外延的一种逻辑方法。一般说来，概念的外延包含了许多对象，有时是无数个对象。我们想把它们一一列举出来不但不可可能，而且也没有必要。通常的办法是把它们再分为一些较小的类来研究，也就是把一个种概念划分成几个属概念来研究。

分类有三个要素：种概念（母项）、属概念（子项）和划分的依据。

若设母项为 A ，子项为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，一次划分后的一般形式为

$$A$$

A_1	A_2	$\dots$	A_i	$\dots$	A_n
-------	-------	---------	-------	---------	-------

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$$

如我们把三角形划分如下：

$$\text{三角形} \begin{cases} \text{直角三角形} \\ \text{斜三角形} \end{cases}$$

在这个划分里，母项是“三角形”；子项是“直角三角形”与“斜三角形”；分类的根据——三角形最大内角的数量。

2. 分类的主要种类

分类有一次划分和连续划分。

一次分类是对母项只划分一次。例如，把数列分为有穷数列和无穷数列，就是一次划分。

连续划分是把一次划分后所得各子项再进行划分，直到满足需要为止。如

$$\text{实数} \begin{cases} \text{有理数} \begin{cases} \text{整数} \begin{cases} \text{正整数} \\ \text{负整数} \\ \text{零} \end{cases} \\ \text{分数} \end{cases} \\ \text{无理数} \end{cases}$$

另外，还有一种分类方法，称为“二肢分类法”。它是将一个种概念划分为互相矛盾的两个属概念的方法。例如

$$\text{四边形} \begin{cases} \text{平行四边形} \\ \text{非平行四边形} \end{cases}$$

“二肢分类法”的优点，在于它既不会重复，也不会遗漏。即使不知道母项的全部外延时也可以分类。其缺点在于，被划分概念的外延有一部分未被明确揭示出来。

3. 分类的规则

(1) 分类应当是相应相称的（不重不漏）。即划分后，母项的外延应当与诸子项的外延的和相等。公式为

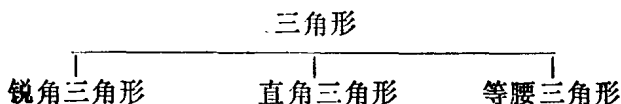
例如
$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$\text{实数} \begin{cases} \text{有理数} \\ \text{无理数} \end{cases}$$

如果我们把“四边形”划分成“平行四边形”和“梯形”就是错误的。因为四边形的外延中还包含“平行四边

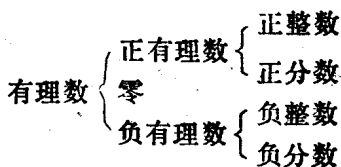
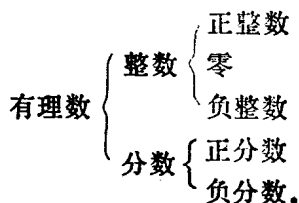
形”和“梯形”以外的其它四边形。这种错误叫子项过窄。当然子项过宽也是错误的。如把“有理小数”划分为“有限小数”及“无限小数”，就犯了子项过宽的错误。

(2) 每次划分应当按照同一个标准进行，不允许在一次划分中使用两个以上的根据。否则，就会引起混乱。例如



这个规则只是要求在同一个划分里应该使用一个标准，而不反对把一概念再用别的标准分类（指另外一次划分）。

如有理数按不同的根据就可以有下面两种分类：



这两种分类都是合理的。

(3) 分类后的各子项的外延必须互相排斥。即不允许将一个种概念划分为交叉的属概念。将“三角形”做如下分类就是不妥当的：