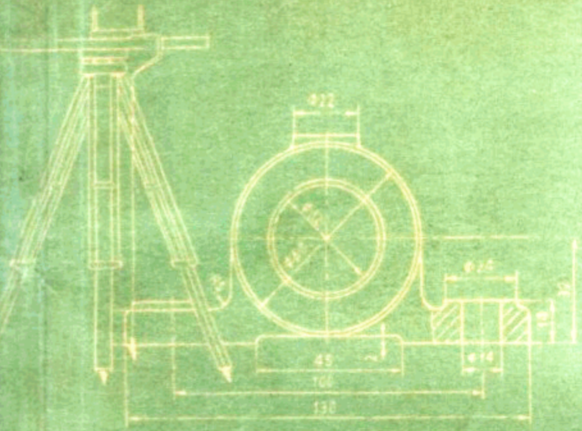

北京市中学课本

数学

SHUXUE

第五册

北京市中学课本

数　学

第 五 册

北京市教育局教材编写组编

*

北京人民出版社出版

北京市新华书店发行

北京印刷一厂印刷

*

1972 年 1 月第 1 版　　1978 年 1 月第 5 版

1978 年 1 月第 1 次印刷

书号：K7071·133　定价 0.54 元

毛主席语录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

目　　录

第二十二章　解斜三角形

第二十三章　抛物线、椭圆和双曲线

第二十四章　极坐标和参数方程

第二十五章　数列和极限

第二十六章　排列、组合和二项式定理

第二十七章　导数

第二十二章　解斜三角形

一　三角函数对数表和它的用法

1. 三角函数对数表

在生产斗争和科学实验中，经常遇到对已知角的三角函数进行乘、除等运算. 例如，在计算

$$68.74\sin 34°16',\quad \frac{325.1}{\cos 68°38'}$$

时，为了能够利用对数使计算简化，我们需要求得三角函数的对数，即需要求得 $\lg\sin 34°16'$, $\lg\cos 68°38'$ 等.

求已知角的三角函数的对数，可以先由三角函数表求得这个已知角的三角函数值，再由对数表求这个三角函数值的对数. 例如，求 $\lg\sin 34°16'$，可以先从三角函数表中求得

$$\sin 34°16' = 0.5630,$$

再由对数表求得

$$\lg 0.5630 = \bar{1}.7505,$$

因此，得到

$$\lg\sin 34°16' = \bar{1}.7505.$$

上面的方法需要查两次表，如果利用《三角函数对

数表》，就可以直接查得已知角的三角函数的对数.

用《数学用表》中的《三角函数对数表》，可以查得每相差 $1'$ 的各锐角的正弦、余弦、正切和余切的对数. 查法见表中的说明.

例 1 查表求下列各三角函数的对数:

(1) $\lg\sin 34°16'$； (2) $\lg\cos 68°38'$；

(3) $\lg \mathrm{tg} 5°48'$； (4) $\lg \mathrm{ctg} 21°59'$.

解: (1) $\lg\sin 34°16' = \bar{1}.7505$;

(2) $\lg\cos 68°38' = \bar{1}.5615$;

(3) $\lg \mathrm{tg}\, 5°48' = \bar{1}.0068$;

(4) $\lg \mathrm{ctg} 21°59' = 0.3940$.

反过来，利用该表还可以由一个锐角的三角函数的对数值，查得这个锐角.

例 2 查表求下列各式中的锐角 α:

(1) $\lg\sin\alpha = \bar{2}.9104$;

(2) $\lg\cos\alpha = \bar{1}.9169$;

(3) $\lg \mathrm{tg}\alpha = 0.0021$;

(4) $\lg \mathrm{ctg}\alpha = \bar{1}.9884$.

解: (1) $\alpha = 4°40'$； (2) $\alpha = 34°19'$；

(3) $\alpha = 45°8'$； (4) $\alpha = 45°46'$.

例 3 已知 $\lg\sin A = \bar{1}.9284$，求三角形的内角 A.

解: 查表求得适合 $\lg\sin A = \bar{1}.9284$ 的锐角 A 是

$58°$. 我们知道，正弦相同的角，它们的正弦的对数也相同，并且正弦的对数相同的角，它们的正弦也就相同. 在 $0°$ 和 $180°$ 间，与 $58°$ 的正弦相同的角，还有 $122°$. 因此，所求三角形的内角 A 是 $58°$ 或 $122°$.

2. 利用三角函数对数表进行计算

现在举例说明怎样利用三角函数对数表进行计算.

例 1 求 $b=\dfrac{978.5\sin 122°}{\sin 39°56'}$ 的值.

解: $b=\dfrac{978.5\sin 122°}{\sin 39°56'}=\dfrac{978.5\sin 58°}{\sin 39°56'}$.

两边取对数，得

$$\lg b=\lg 978.5+\lg\sin 58°-\lg\sin 39°56'.$$

$$\begin{array}{rl}
\lg 978.5 = 2.9905 & \\
\lg\sin 58° = \bar{1}.9284 & (+ \\
\hline
2.9189 & \\
\lg\sin 39°56' = \bar{1}.8075 & (- \\
\hline
\lg b = 3.1114 &
\end{array}$$

$\therefore$ $\qquad b=1292.$

注意：先列出计算的格式，再查表，然后进行计算.

例 2 利用对数计算:

$$x=\frac{25.87(\sin 52°30'+\sin 26°18')}{\cos 76°25'-\cos 13°47'}.$$

解: 应用三角函数的和差化积的公式，得到

$\sin 52°30'+\sin 26°18'=2\sin 39°24'\cos 13°6'$,

$\cos 76°25'-\cos 13°47'=-2\sin 45°6'\sin 31°19'$.

$$\therefore \qquad x=\frac{25.87\sin 39°24'\cos 13°6'}{-\sin 45°6'\sin 31°19'},$$

$$-x=\frac{25.87\sin 39°24'\cos 13°6'}{\sin 45°6'\sin 31°19'}.$$

两边取对数，得

$$\lg(-x)=\lg 25.87+\lg\sin 39°24'+\lg\cos 13°6' -(\lg\sin 45°6'+\lg\sin 31°19').$$

$$\begin{array}{rl}
\lg 25.87 = & 1.4128 \\
\lg\sin 39°24' = & \bar{1}.8026 \\
\lg\cos 13°6' = & \bar{1}.9885 \\
\hline
 & 1.2039 \quad (+
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\lg\sin 45°6' = & \bar{1}.8502 \\
\lg\sin 31°19' = & \bar{1}.7158 \\
\hline
 & \bar{1}.5660 \quad (+
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 1.2039 \\
 & \bar{1}.5660 \\
\hline
\lg(-x)= & 1.6379 \quad (-
\end{array}$$

$-x=43.44$,

$\therefore \qquad x = -43.44.$

练　习

1. 查表求下列各三角函数的对数值:

(1) $\lg\sin 11°26'$; (2) $\lg\cos 89°23'$; (3) $\lg\sin 36°57'$;

(4) $\lg\cos 66°8'$; (5) $\lg\mathrm{tg}\, 27°41'$; (6) $\lg\mathrm{ctg}\, 80°53'$;

(7) $\lg\mathrm{tg}\, 57°45'$; (8) $\lg\mathrm{ctg}\, 20°27'$.

2. 查表求下列各式里的锐角 α:

(1) $\lg\sin\alpha = \overline{1}.8524$; (2) $\lg\cos\alpha = \overline{2}.9301$;

(3) $\lg\sin\alpha = \overline{1}.4001$; (4) $\lg\cos\alpha = \overline{1}.0008$;

(5) $\lg\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{1}.9450$; (6) $\lg\mathrm{ctg}\,\alpha = 1.0367$;

(7) $\lg\mathrm{tg}\,\alpha = 2.0311$; (8) $\lg\mathrm{ctg}\,\alpha = \overline{1}.4230$.

3. 求适合于下列条件的 θ 角($0° < \theta < 180°$):

(1) $\lg\sin\theta = \overline{1}.6004$;

(2) $\lg\cos\theta = \overline{1}.7031$;

(3) $\lg\mathrm{tg}\,\theta = \overline{1}.8716$;

(4) $\lg\mathrm{ctg}\,\theta = 2.1215$.

4. 利用对数计算;

(1) $x = \cos 73°55' + \cos 42°11'$;

(2) $x = \dfrac{\sin 47°55' + \cos 38°17'}{\cos 26°25' - \cos 33°47'}$;

(3) $x = \sqrt[3]{21.72\cos 122°10'}$.

二　解斜三角形

毛主席教导我们:“每一事物的运动都和它的周围

其他事物互相联系着和互相影响着”．斜三角形和直角三角形是有联系的，只要我们从斜三角形的一个顶点向对边引一条垂线，就可以得到两个直角三角形．前面我们已经学过解直角三角形的方法，下面就从斜三角形与直角三角形这种联系中去研究和总结解斜三角形的方法．

1．正弦定理

正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等．

这个定理用式子来表示就是

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.}$$

证明：在 $\triangle ABC$ 中，过 C 点作 AB 的垂线交 AB 于 D(图 22-1)，则 $\triangle ABC$ 被分成两个直角三角形．

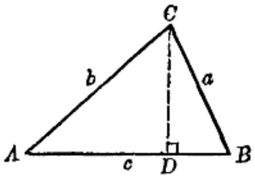

图　22-1

在直角三角形 ADC 中，

$$\sin A=\frac{CD}{b},$$

$\therefore\quad CD=b\sin A.\qquad (1)$

在直角三角形 BDC 中，$\sin B=\dfrac{CD}{a}$，

$$\therefore\qquad CD=a\sin B.\qquad (2)$$

比较(1)和(2)，得 $b\sin A = a\sin B$，就是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理，自 B 点作 AC 的垂线，可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

于是有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这个等式，对于钝角三角形和直角三角形也同样成立.

例1 在$\triangle ABC$中，已知$a=5$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$，不查表，求 C、b、c.

解：(1) $C=180^\circ-(A+B)$

$$=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ.$$

(2) 由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{5\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{5\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=5\sqrt{2}.$$

(3) 由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{5\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

$$\because \quad \sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \quad c = \frac{5 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

例 2 在河的两岸 A、B 间架一便桥（图 22-2），需要比较精确地测算 A、B 两点间的距离. 测量人员在岸边 A 点附近另取一点 C，并量出 AC 为 30 米，分别测出角 A 为 $75^\circ 12'$，角 C 为 $58^\circ 51'$. 求 AB 的长（精确到 0.1 米）.

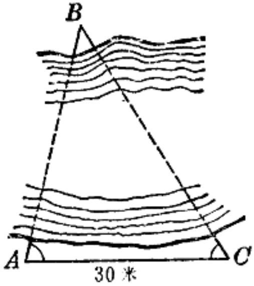

图 22-2

解: $B = 180^\circ - (75^\circ 12' + 58^\circ 51') = 45^\circ 57'$.

由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$，得

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B},$$

于是
$$AB = \frac{30 \sin 58^\circ 51'}{\sin 45^\circ 57'}.$$

两边取对数，得

$$\begin{aligned}\lg AB &= \lg 30 + \lg\ \sin 58°51' - \lg\ \sin 45°57' \\ &= 1.4771 + \overline{1}.9324 - \overline{1}.8566 \\ &= 1.5529.\end{aligned}$$

$\therefore \qquad AB = 35.72 \approx 35.7$(米).

答: AB 约长 35.7 米.

例 3 普通车床车头齿轮的结构如图 22-3 所示. 已知 A 轮节圆*直径为 $180mm$, B、C 轮的节圆直径均为 $120mm$, 角 A 为 $40°$. 求 A、C 两齿轮中心的距离(精确到 $0.1mm$).

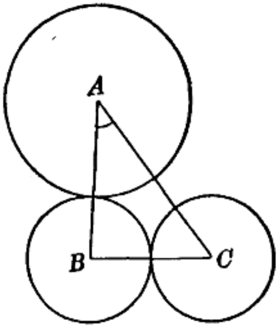

图 22-3

解: 因为 B 轮与 A、C 两轮的节圆分别外切, 所以

$$AB = 90 + 60 = 150,$$

$$BC = 60 + 60 = 120.$$

由正弦定理

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

得 $$\sin C = \frac{AB \sin A}{BC} = \frac{150 \sin 40°}{120} = \frac{5 \sin 40°}{4}.$$

---

* 两个互相啮合的齿轮转动时, 接触点在齿轮上形成一个圆, 这个圆叫做节圆. 互相啮合的两个齿轮的节圆是外切的.

两边取对数，得

$$\lg\sin C=\lg 5+\lg\sin 40^\circ-\lg 4$$
$$=0.6990+\bar{1}.8081-0.6021$$
$$=\bar{1}.9050.$$

$\therefore\quad C=53^\circ28'$ 或 $126^\circ32'$（$C=126^\circ32'$ 时，与实际问题不符，舍去）；

$$B=180^\circ-(40^\circ+53^\circ28')=86^\circ32'.$$

由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，得

$$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{120\sin 86^\circ32'}{\sin 40^\circ}.$$

两边取对数，得

$$\lg AC=\lg 120+\lg\sin 86^\circ32'-\lg\sin 40^\circ$$
$$=2.0792+\bar{1}.9992-\bar{1}.8081$$
$$=2.2703.$$

$$\therefore\qquad AC=186.3(mm).$$

答：A、C 两齿轮中心的距离是 $186.3mm$.

例 4 某气象站每天定时施放气球进行高空观测. 为了知道气球离地面的高度，两观测员在 A、B 两点同时同向测得气球的仰角 $\alpha=45^\circ$，$\beta=34^\circ36'$，且已知 A、B 两点相距 118 米（图 22-4）. 求气球离地面的高度（精确到 1 米）.

解：根据已知条件，在 $\triangle ABC$ 中，

$\angle ABC=\beta$

$=34°36'$，

又 $\angle DAC=\alpha=45°$，

$\therefore\ \angle ACB$

$=\alpha-\beta$

$=45°-34°36'$

$=10°24'$.

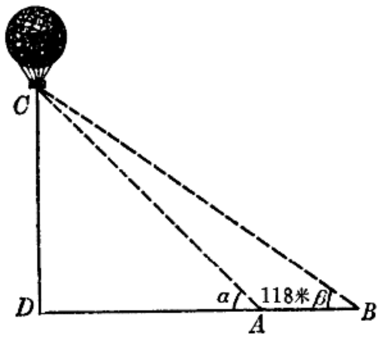

图 22-4

由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\angle ACB},$$

得 $$AC=\frac{AB\sin\beta}{\sin\angle ACB}=\frac{118\sin34°36'}{\sin10°24'}.$$

两边取对数，得

$$\lg AC=\lg118+\lg\sin34°36'-\lg\sin10°24'$$
$$=2.0719+\bar{1}.7542-\bar{1}.2565$$
$$=2.5696.$$

$\therefore\ AC=371.2$(米).

在直角三角形 ADC 中，

$$CD=AC\sin\alpha=371.2\sin45°=371.2\times0.7071$$
$$\approx262\text{(米)}.$$