

研究性学习

线性代数 DIY

XIANXING DAISHU

◎ 张炜卓 编著

东北师范大学出版社

线性代数 DIY

张伟卓 编著

东北师范大学出版社
长 春

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数 DIY/张炜卓编著. —长春: 东北师范大学出版社, 2004.5

ISBN 7 - 5602 - 1463 - 0

I. 线 ... II. 张 ... III. 线性代数—自学参考资料
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 019824 号

☐责任编辑: 李敬东 ☐责任校对: 沙铁成

☐封面设计: 张 然 ☐责任印制: 栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

电话: 0431—5687213

传真: 0431—5691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

广告许可证: 吉工商广字 2200004001001 号

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春市永昌福利印刷厂印装

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 148 mm×210 mm 印张: 5 字数: 120 千

印数: 0 001 ~ 3 100 册

ISBN 7 - 5602 - 1463 - 0/O·14 定价: 8.00 元

前 言

首先，我要向 *Principles and Practice of Mathematics* 一书的作者致以崇高的敬意，该书给我的观念带来了前所未有的震撼，从中我第一次发现数学可以这样教和学。本书写作中引用了 *Principles and Practice of Mathematics* 中的一些非常漂亮的例子，虽然安排和处理的方法不尽相同，但是不能不说这些例子构成了本书线性代数应用的基石。其次，必须提及的还有台湾朝阳科技大学洪朝贵先生的《线性代数讲义》，该书中不少睿智和极富个性的观念深刻影响了本书的写作。

《线性代数DIY》最初写作的动力来自以下三个方面：第一，参与国家高中新课程标准实验研究的思考与收获；第二，参与信息技术（特别是手持技术）与教学整合研究的经验与体会；第三，对“研究性学习”这种新的学习方式带来的机遇和挑战所作的一些探索。这三个方面也为我提出了各种各样的新问题，本书权且算作对这些问题的一点认识和尝试性的回答。当然，本书的写作也是出于实际的需要，因为无论是课程标准、教学模式的改革还是学习方式的改革、尝试都需要与之相适应的教学内容的改革，这也是难度最大的一个方面。另外，在现实的研究过程中，我时常感到迫切需要像本书这样的一些材料，哪怕作为研究的靶

子也好,能够供给一线的教师、学生去尝试,去研究,去批判.因此,本书另一个很直接的目的是希望提供符合时代特征、让师生易于接受、拿起来就能用的比较生动活泼的研究性学习材料.

本书在选材方面力图体现新课程标准的理念,在扩大读者知识面的前提下,介绍线性代数中一些入门的概念和方法,并且将重点放在中学生可以接受的部分,以避免与学生将在高校学习的重点相重复.这些内容主要是努力帮助学生了解现代生活中线性代数的作用,让他们亲身体验数学解决现实问题的威力,在学习和实践重要数学方法的同时培养他们对数学的兴趣.如此的安排实际上为学生日后在高校再次学习线性代数中较抽象部分奠定了坚实的基础.另外,本书尽量联系可及的数学内容,通过合理的关系带领学生游弋于广阔而紧密联系的数学世界,而且这些内容会吸引有兴趣的探索者深入前行,在不知不觉中达到研究性学习的设计效果.为此,本书在文中穿插了小的思考题和讨论内容,每一部分结尾还给出了精心设计的研究性学习课题.

本书设计的学法和教法其实非常自由,教师可以选择各种开放方式使用书中的全部或部分内容,学生更可以采取自学或在小组中采用研究的方式学习.

须要指出,本书的课程以技术手段为基础,有别于传统的数学读物.本书在对内容深化的前提下尽量发挥设备的优势解决那些对研究内容有意义的问题.随着内容的推进,读者在研究中使用恰当的技术将形成一种习惯(甚至注意不到技术的存在),并使数学成为读者第一关注点,使技术真正成为学习的推动力.以往占较大篇幅的某些数学操作这里成了直接的结果,目的是帮读者更专注于数学和应用本身.至于选用哪种技术手段可以根据读者的习惯决定,这里主要采用了TI-92+图形计算器作为研究平台.

本书首先是写给处于知识和观念日新月异时代的高中生,同

时，因为本书内容上与高校目前的线性代数教材有一定的互补性，所以也可以供大学生学习时作参考之用。还希望这本书可以给教师朋友们提供一点帮助和参考，将这门有趣的课程介绍给更多的学生。同时，希望这本书可以帮助广大读者了解一些实用数学知识，更好地为社会主义现代化建设服务。

由于时间仓促，个人水平有限，本书中的不当和错误还望读者批评和指正。

北京四中 张炜卓

2004 年 1 月

目 录

绪 论	1
第一节 谁? 是线性代数	11
第二节 运算, 开始吧	28
第三节 方程组, 初等变换	46
第四节 行列式, Cramer 法则	67
第五节 久违了, 乘法	78
第六节 可以吗? 逆矩阵	100
第七节 Eigen Vs. Eigen	119

绪 论

1. 绪论讲的是什么？
2. 这本书讲的是什么？
3. 这本书与其他叫作“线性代数”的书有何不同？
4. 本书的内容与课内教学有什么关系？
5. 这本书的讲法有什么特点？
6. 为什么作者认为书中的方法较好？
7. 这本书与“研究性学习”有什么关系？
8. 学习本书内容之前,读者要达到什么数学水平？
9. 这本书里使用了读者不熟悉的数学知识怎么办？
10. 学习中必须使用 TI-92+ 图形计算器吗？
11. 本书的内容是不是针对某种技术手段选择和组织的？
12. 书中的英文是怎么回事？
13. 作者认为学习这本书哪个部分带来的快乐最多？
14. 作者写到哪里最快乐？
15. 这本书的亮点有哪些？
16. 书中的知识与其应用哪个更重要？
17. 书中的思考题想不通怎么办？

18. 粗翻一下,好像这本书不太“数学”,为什么?
19. 作者认为读者学习后应达到什么标准?落实在什么地方?
20. 作者怎样评价这本书?
21. 作者对读者有什么建议?
22. 作者推荐了哪些参考书?
23. 作者对将来的数学课程有什么憧憬?
24. 怎样联系作者?
25. 数学是什么?

1. 绪论讲的是什么?

绪论主要是帮助读者初步认识本书、了解本书的一些特点和使用本书应注意的一些事项等.

当然,本书还会有很多其他问题,这些问题有的产生在读书之前(绪论主要回答这些问题),更多的问题产生在读书当中和读书之后.作者鼓励读者提出、研究、探讨、解决所有这些问题,也愿意分享读者的发现和快乐.(参见问题 24)

再告诉读者一个秘密:绪论虽然放在开头,却是本书最后完成的部分.

2. 这本书讲的是什么?

线性代数,是数学中一个非常基础的分支,应用相当广泛,从太空中的 GPS 卫星到城市的天气,从工业生产计划到研究谣言在人群中的传播,处处都有线性代数的身影,而且几乎所有理工学科都需要线性代数作为基础工具,如机械、EE 和计算机科学等.

重要的是作者并不想通过这本书给读者讲什么,而是希望读者跟随这本书自己去探索线性代数.具体地说,本书内容包括三个方面:一是数学对象——向量,矩阵;二是数学关系——线性的运算,函数,方程,模型;三是应用.

3. 这本书与其他叫作“线性代数”的书有何不同?

第一,层次有所不同.这本书比较浅显和具体,涉及的数学基础相对较少,特别适合高中生和数学爱好者使用.在选材上放弃了抽象程度比较高的欧氏空间、二次型等内容,而将主要篇幅放在线性变换的应用、特征理论的应用和线性代数的几何背景等方面.

第二,内容的组织有所不同.特别是几个核心例题贯穿全书,逐步深入,引人入胜.本书中理论与应用的讨论是交替进行的,有时省略一些复杂的性质证明而强调直观认识.另外,一些较深层次的性质与应用作为思考或研究性题目给出,读者可以通过完成这些题目得到现实有用的结果(如应用程序、实用方法等).

4. 本书的内容与课内教学有什么关系?

客气地说,是互相补充;严格地讲,本书的内容与现行高中大纲没什么关系(所以互补性最强).所以,作者希望这本书可以作为选修课或研究性学习的参考材料,事实上本书充当这一角色是完全胜任的.

从发展的角度看,本书前景非常乐观,即将在 2006 年推行的新课程标准中必修模块“矩阵与变换”是本书的一个子集,该标准体现的层次化理念也给这本书提供了广阔的舞台.更何况实行“研究性学习”课程对所有人都是一个新挑战,正需要这样一本有“研究特色”的教学资料.

5. 这本书的讲法有什么特点?

大量使用机器运算.最重要的是本书抽象理论讲得少了,更多的是在带头做.读者不仅要阅读书中提供的材料,还要不断思考、动手演算以及用机器进行实验等.作者希望读者通过动手动脑参与能够获得学习乐趣与成就感,所以,这本书才叫“线性代数 DIY (do it yourself) ”.

另外,在知识和应用推进的过程中,本书不追求理论完整和面面俱到,而是尽量作最大可能的关联与拓展,从多角度阐述所讲内容的地位和应用,在开拓读者视野的同时指出读者深入研究的方向.

6. 为什么作者认为书中的方法较好?

机器运算可以提高读者的学习效率,使其更专注于研究对象本身,且自己动手将在认知上获得更好的效果.书中适当的留白和大范围联系相关信息是为了给读者提供更广阔的探索空间,使用贴近生活的实例是为了展现数学的应用价值和勃勃生机.

7. 这本书与“研究性学习”有什么关系?

作者针对研究性学习和当今数学工具的特点编写了本书,因此,这本书对数学的研究性学习有明显的指向性和指导性.换句话说,作者心目中的数学学科研究性学习就应该像这样进行.

8. 学习本书内容之前,读者要达到什么数学水平?

应该说,目前的高二学生足以应付这本书里的内容;事实上,线性代数的核心内容并不需要四则运算之外的数学基础.不过书中涉及的丰富的应用实例可能会用到三角函数、解析几何、向量代数和图论等数学知识,所以,本书适合高中生自学或选修使用.

另外,由于书中大量使用 TI-92+ 图形计算器等作为运算支持,客观上需要读者对该设备或类似技术手段有一定了解.

9. 这本书里使用了读者不熟悉的数学知识怎么办?

这就如同英语阅读时碰到了生词,读者应根据各自情况处理.作者建议暂时接受那些不构成根本障碍的部分,再酌情参考相关的资料.

此处作者想提及杨振宁先生给当前中国学生的建议,即大家应更多地采用跨越式的学习方法,应该允许自己的知识体系中有

漏洞,这样你才可以尽早达到前沿,可以做事情,需要的时候再回来补这些漏洞.

10. 学习中必须使用 TI-92+ 图形计算器吗?

本书使用 TI-92+ 图形计算器的原因有二:第一,如问题 6 所述,作者希望将自己和读者从传统上烦琐的线性代数的演算中解放出来,将精力主要放在数学本身和数学应用的研究上;第二,这样的设备使许多过去无法实现的研究活动成为可能,充分调动了读者的参与精神,在做中学.

从整体上看,作者更愿意把本书视为一个大的上机实习项目.读者(特别是愿意讲授本书的教师)可不必拘泥于特定设备,任何有类似功能的软硬件系统都不成问题.其实本书的写作也不只使用这一种机器,有些其能力之外的功能还借助了其他的工具.无论读者使用什么工具支持,如果缺少了亲自动手操作和实验,那么本书的设计意图和优势就体现不出来了.

因此,作者建议最理想的学习方式应该是一手拿书一手操作手持设备或计算机,更多的时候甚至可以把书扔到一边全身心地投入到研究活动中.

11. 本书的内容是不是针对某种技术手段选择和组织的?

绝对不是.

第一,本书讨论的数学内容都是高中生能接受的范围,也是线性代数这个数学分支标准的和基础的研究内容.如果说某种设备带来了什么变化,作者认为主要是学习方式的进步,所以,本书提供了适应这种学习方式的改进型学习内容.

第二,书中内容完全可以用不同的技术手段辅助进行,事实上作者也在积极进行这方面的工作,为把这些内容设计成跨平台无障碍的课程而努力.

12. 书中的英文是怎么回事?

有人说,如果把一本英文数学书中的专业词汇去掉,剩下的就会是一本儿童读物. 数学专业词汇不大会在英语课里学到,却大量出现在各种科学书籍中(马克思不是认为任何科学都该应用数学吗). 这种情况不利于本书的读者深入学习(特别是在 Internet 上面),也影响读者进一步的发展,但是,本书的研究性内容需要读者搜集相关材料,所以,使用专业词汇就显得尤为重要.

13. 作者认为学习这本书哪个部分带来的快乐最多?

总的来说,作者觉得动手实验应该是最有趣的,特别是书中关于几何变换的内容,如果读者感兴趣愿意花时间研究可以做出很漂亮的结果. 另外,作者个人认为一些写作类型的研究项目也会让读者在搜集材料中得到意想不到的快乐.

14. 作者写到哪里最快乐?

第一次是写到 Gauss-Jordan 消元法代码调试通过的时候,继而就是正文终于写完的时候,因为终于所有的例题都有了交代,所有的悬念都落了地. 还有写到最后的时候,计算器提示电池必须尽快更换,好在作者已完成了前面的工作,这时的快乐是那种侥幸的窃喜.

另外,作者要谈谈写作中的痛苦. 动手写第五节之前作者呆坐苦想了两天,太多要写的内容,舍谁取谁?怎样把它们有机地联系在一起……一大堆问题就像那堆写作素材和参考资料一样困扰着作者,痛苦呀!不过作者也发现了心得:到林阴道上跑步是摆脱这种痛苦的良方.

作者在写作当中参加了一个研讨会,在会上了解到美国中学数学的教改情况后作者倍感压力,深思后更体会到本书这样的尝试在我们的教改中实在是必要的,也鞭策作者更好地完成自己

的写作.

15. 这本书的亮点有哪些?

第一节中对超定方程的超链接式讨论,第二节中线性代数与几何变换的实验活动,第三节中 Gauss - Jordan 消元法的算法实现,第四节中行列式的系列几何应用,第五节中矩阵乘法性质的迂回推证,第六节中对广义逆矩阵的讨论,第七节中大量利用 TI-92+ 图形计算器对各种例题、模型的求解.

本书中那些来源于现实生活的科学实例和著名模型也是熠熠生辉的.

16. 书中的知识与其应用哪个更重要?

知识的应用. 本书的知识部分主要包括概念和方法,概念上高校教材更为严谨准确,至于方法正是在本书大量的应用实例中体现和强化的.

另外,还有一点很重要,就是本书中体现的思想,如数形统一思想、算法思想和模型思想等. 读者应该在热情参与的同时冷静地体会这些思想.

17. 书中的思考题想不通怎么办?

建议读者自己努力解决. 通常这些思考题并不影响内容的进行,但往往它们是前后文的深化,有的本身就是核心内容或规律总结. 因此,对读者来说,解决它们也是本书设计的一部分收获.

这些思考题与所有数学问题一样,如果一时想不通并不要紧,可以将它们留到茶余饭后,时不时拿出来在脑子里转一转,等哪天在梦中豁然开朗,这才是数学带给我们的真正快乐.

18. 粗翻一下,好像这本书不太“数学”,为什么?

作者不同意说这本书不太“数学”. 因为这主要在于读者怎样看待数学,数学可以像高斯那样抽象漂亮,也可以像孙敬修那样平

易近人. 数学是“生机勃勃”的, 应用广泛的, 更是出没在日常生活各个角落的一门学科, 特别是对中学生, 我们应该介绍这样的数学.

如果说这本书不如数学论文那么严谨, 演绎和证明不那么完整, 作者承认.

19. 作者认为读者学习后应达到什么标准? 落实在什么地方?

这应该是同行的教师很关心的问题. 本书中每一节后面都给出了研究性学习的课题, 作者认为学生在学习过本书后选作其中任何一个题目都可以作为落实, 当然学生自选相关的题目进行研究也可以. 至于标准作者觉得读者通过本书的学习或研究会意识到线性代数以至整个数学确实有用, 并有意识自觉地运用书中介绍的知识与方法就很好了.

还有一点作者想达到目的是希望读者形成充分利用现代工具和设备意识, 培养适当的研究习惯.

20. 作者怎样评价这本书?

挺好, 还可以更好.

作者认为本书的写作是一种探索也是一次实践. “研究性学习”对广大教师确实是新事物, 不亲自体验和进行这种“研究性学习”是无法真正指导好学生的. 写作的过程对作者就是一次实实在在的研究性学习, 很多问题是作者第一次碰到, 很多想法也是第一次接触, 书中的很多实验和操作都是在写作的同时摸索着做的, 而且整个过程也给作者带来了研究的无尽快乐, 真诚地希望本书可以带给更多读者如此的快乐.

再说一句不要脸的话: 这是一本数学的快乐之书, 特别是对作者, 研究数学然后快乐着.

21. 作者对读者有什么建议?

建议读者不要太在意学习的进度, 要是书中哪里深深地吸引

了读者就尽情跟随读者的兴致动手研究,这才是研究性学习的真谛.以前作者也常常跟学生谈到学习的乐趣,不过那时候感受相当个人,谈起来有些苍白,有了这本书,作者几乎可以肯定,只要读者投入研究,就一定能体会到这种学习的乐趣.

另外,作者建议读者认真体会所谓的三条途径以及它们之间的联系,此三者是数学的三件法宝:逻辑演绎的代数方法(Algebraic),直观的图形方法(Graphic),数值方法(Numeric).这些方法在工具发达的今天已经成为解决实际问题时不可或缺的数学要素了,建议和鼓励读者尽可能地将这些方法运用到你研究的所有问题中去.

学习方法上还建议读者把从本书中学到的讲解给别人听,或组织研究成果(可以是阶段性的)报告会互相交流.

22. 作者推荐了哪些参考书?

1. COMAP 著. 数学的原理与实践. 申大维等译. 北京: 高等教育出版社, 1998

2. Bernard Kolman. 应用线性代数. 方世荣译. 台北: 晓园出版社, 1992

3. 归行茂等编. 线性代数的应用. 上海: 上海科学普及出版社, 1994

4. 随便一本介绍解析几何的书

5. 随便一本介绍线性代数理论的书

6. 随便一本介绍计算方法的书

7. TI-92 Guidebook & TI-92 Plus Module supplement

8. <http://www.cyut.edu.tw/ckhung/olbook/linalg/>

9. <http://www.go.ednet.ns.ca/larry/>

23. 作者对将来的数学课程有什么憧憬?

谈不上憧憬, 研制中的国家高中课程标准已经很现代了, 当然还会不断改进, 不过以下几个新特点应该是公认的: 按需分层提供更具个性化的课程; 扩大课程涵盖的知识面; 加强技术手段在课程中的比重; 培养学生更全面的能力; 强调数学在现实中的应用; 采用更活泼的形式调动学生参与; 适当体现数学的思维特性.

教育界有这样一句话: “不为使用技术而使用技术.” 作者完全同意. 这句话是讲手段应该服务于内容, 但是不妨从另一个角度理解这句话: 我们应该讲授与生产力和社会发展相适应的内容给学生. 发展的手段肯定会给人们提供更广阔的空间, 将许多不可能变成现实. 所以, 作者认为将来的数学课程应该也一定是与现代技术密切联系的.

24. 怎样联系作者?

E-mail: zhwzh@bj4hs.edu.cn

蜗牛函件: 北京四中数学组 张伟卓 100034

欢迎各种意见和建议, 特别是如果读者发现什么好的例子可以丰富本书或提升本书的水平万望赐教.

25. 数学是什么?

这算是本书的第一个也是最后一个思考题, 希望带给读者一片遐想的天空.