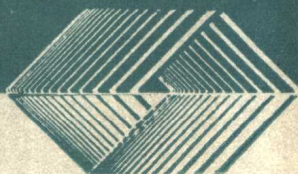


明安联 吴元恺 林学杰

# 经济数学

· 高等数学部份 ·



四川科学技术出版社

# 经 济 数 学

——高等数学部份——

明安联 吴元恺 林学杰

四川科学技术出版社

一九八七年·成都

责任编辑：赵 健 刘阳青

封面设计：曹辉绿

技术设计：刘阳青

## 经济数学

(高等数学部份)

明安联 吴元恺 林学杰

---

四川科学技术出版社出版

(成都盐道街三号)

四川省新华书店发行

四川省德阳市罗江印刷厂印刷

统一书号：4298·103

---

1987年8月第1版 开本787×1092 1/32

1987年8月第1次印刷 字数330千

印数1—7,400册 印张15.75

定 价：3.35元

ISBN 7-5364-0230-9/F·45

⑦

## 前 言

本书是为高等学校经济类专业编写的教材，供一年级大学生使用。内容的取材和份量，是按经济类专业目前的实际需要确定的。全书共分十章，内容包括一元及多元函数的微积分、无穷级数、微分方程和空间解析几何等。各章节之后都附有精选的习题，难度适中，针对性强。书末附有习题答案。

编写本书的指导思想，是培养学生解决实际问题的能力，使之能够熟练掌握基本的计算方法和技巧，并能把经济学中的基本概念和问题数学化。书中安排了适量的经济学方面的例题。

在编写过程中，力求做到数学概念的论述清楚、准确、易懂，并从几何和经济学角度给予解释，借以使读者深刻理解其本质和适用范围。在介绍计算方法时，强调做题步骤清晰，突出基本技巧，并指出每种计算方法的前提条件及适用范围等。

本书还可作为经济类专业自学考试及函授的教材或参考书。

在本书编写前的酝酿阶段，得到了西南财经大学有关方面的大力支持。此外，四川科学技术出版社也为作者提供了很多经济数学方面的资料，在此一并表示感谢。

编 者

1987年10月于成都

# 目 录

<b>第一章 函 数</b> .....	1
§1.1 集合与区间.....	1
§1.2 绝对值·不等式.....	5
习题1.1.....	6
§1.3 函数概念.....	6
§1.4 函数的表示法.....	8
§1.5 函数的性质.....	12
习题1.2.....	15
§1.6 反函数与复合函数.....	16
§1.7 初等函数.....	19
§1.8 经济学中的函数.....	23
习题1.3.....	27
<b>第二章 极限与连续</b> .....	29
§2.1 函数的极限.....	29
习题2.1.....	38
§2.2 极限的性质.....	40
习题2.2.....	56
§2.3 无穷小 无穷大.....	58
习题2.3.....	63
§2.4 连续函数.....	64
§2.5 函数的间断点.....	68

§2.6	连续函数的性质	70
§2.7	初等函数的连续性	72
	习题2.4	76
<b>第三章</b>	<b>导数与微分</b>	<b>78</b>
§3.1	导数概念	78
	习题3.1	85
§3.2	求导法则	87
	习题3.2	101
§3.3	导数的意义	103
	习题3.3	111
§3.4	高阶导数	112
	习题3.4	119
§3.5	微分	120
	习题3.5	131
<b>第四章</b>	<b>中值定理及导数的应用</b>	<b>132</b>
§4.1	微分中值定理	132
	习题4.1	136
§4.2	不定式的极限	137
	习题4.2	145
§4.3	泰勒(Taylor)公式	146
	习题4.3	150
§4.4	函数的单调性 极值与最值	150
	习题4.4	160
§4.5	函数图象的描绘	162

	习题4.5	170
§4.6	导数在经济学中的应用	171
	习题4.6	182
<b>第五章</b>	<b>不定积分</b>	<b>184</b>
§5.1	原函数与不定积分	184
§5.2	不定积分的性质及积分基本公式表	187
	习题5.1	193
§5.3	换元积分法	194
	习题5.2	208
§5.4	分部积分法	210
	习题5.3	213
§5.5	几种特殊类型函数的积分法	214
	习题5.4	222
<b>第六章</b>	<b>定积分及其应用</b>	<b>223</b>
§6.1	定积分概念	223
§6.2	定积分的性质	227
§6.3	牛顿——莱布尼兹公式	231
	习题6.1	236
§6.4	定积分的换元法	237
	习题6.2	242
§6.5	定积分的分部积分法	243
§6.6	定积分的近似计算	247
	习题6.3	252
§6.7	广义积分	253

习题6.4	258
§6.8 定积分的应用	259
习题6.5	270
<b>第七章 无穷级数</b>	<b>272</b>
§7.1 数项级数的概念及性质	272
习题7.1	278
§7.2 正项级数	279
习题7.2	286
§7.3 交错级数	288
§7.4 任意项级数	289
习题7.3	292
§7.5 幂级数	293
习题7.4	308
§7.6 泰勒级数	309
§7.7 级数在经济中的应用	315
习题7.5	318
<b>第八章 多元函数的微分学</b>	<b>320</b>
§8.1 空间解析几何简介	320
习题8.1	330
§8.2 二元函数的极限与连续性	331
习题8.2	338
§8.3 多元函数的偏导数	339
§8.4 多元函数的全微分	343
习题8.3	348



§8.5	复合函数的求导法则 .....	349
	习题8.4 .....	358
§8.6	隐函数的求导法则 .....	359
§8.7	高阶偏导数 .....	361
	习题8.5 .....	366
§8.8	多元函数的极值 .....	367
	习题8.6 .....	377
<b>第九章 重积分 .....</b>		<b>379</b>
§9.1	二重积分的概念及性质 .....	379
	习题9.1 .....	384
§9.2	二重积分的计算 .....	385
	习题9.2 .....	391
§9.3	利用极坐标计算二重积分 .....	392
	习题9.3 .....	399
§9.4	三重积分的概念及计算 .....	400
	习题9.4 .....	404
§9.5	柱面坐标与球面坐标 .....	405
	习题9.5 .....	409
§9.6	广义重积分 .....	410
	习题9.6 .....	414
<b>第十章 微分方程 .....</b>		<b>415</b>
§10.1	微分方程的基本概念 .....	415
§10.2	可分离变量的一阶方程 .....	419
	习题10.1 .....	423

§10.3	齐次一阶微分方程	425
§10.4	一阶线性微分方程	429
	习题10.2	436
§10.5	二阶线性方程的一般理论	437
§10.6	常系数二阶齐次线性方程	443
	习题10.3	445
§10.7	常系数二阶非齐次线性方程	446
	习题10.4	453
§10.8	特殊类型的高阶微分方程	454
	习题10.5	462
	<b>习题答案</b>	<b>463</b>

# 第一章 函 数

在自然科学和经济管理学中，可遇到各种各样的函数，对它们的研究，在理论上和应用上都有重要的意义。

## §1.1 集合与区间

**1. 集合概念** 集合是自然科学和社会科学中的一个最基本的概念。凡具有某种共同特性的事物的全体就组成一个集合。

例1 某工厂的一切汽车组成一个集合。

例2 某学校一年级的全体学生组成一个集合。

设 $A$ 是一个集合，则记号 $x \in A$ 表示 $x$ 是集合 $A$ 的一个元素（或成元），读作“ $x$ 属于 $A$ ”，记号 $x \notin A$ 表示 $x$ 不是 $A$ 的元素，读作“ $x$ 不属于 $A$ ”。如果集合 $A$ 的一切元素都是实数，则称 $A$ 是一个数集。

例3 介于1与9之间的偶数组成的数集记为

$$\{2, 4, 6, 8\}$$

例4 一切自然数组成的数集记为

$$\{n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

例5 一切偶数组成的数集记为

$$\{ 2n \mid n=0, \pm 1, \pm 2 \dots \}$$

**例6** 一切正数组成的数集  $A$  可表为

$$A = \{ x \mid x > 0 \}$$

**例7** 由单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  内部的点  $(x, y)$  组成的集合为

$$\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$$

**定义1** 设有集合  $A$  与  $B$ ，如果  $A$  中的每个元素都是  $B$  中的元素，则称  $A$  是  $B$  的**子集**，或称  $B$  包含  $A$ ，记为  $A \subset B$ ，或  $B \supset A$ 。

**例8** 设  $A$  是一切有理数组成的集合， $B$  是一切实数组成的集合，则  $A \subset B$ ，或者说，有理数集  $A$  是实数集  $B$  的一个子集。

**定义2** 由集合  $A$  与  $B$  的一切公共元素组成的集合称为  $A$  与  $B$  的**交集**，记为  $A \cap B$ 。

**例9** 设  $A$  是一切整数的集合， $B$  是一切正实数的集合，则  $A \cap B$  是一切自然数的集合。

**例10** 设  $A$  是甲储蓄所的一切储户组成的集合， $B$  是乙储蓄所的一切储户组成的集合，则  $A \cap B$  表示在甲、乙储蓄所都有存款的储户组成的集合。

**定理1** 设  $A \subset B$ ，则  $A \cap B = A$ 。

**例11** 设  $A$  是一切自然数组成的集合， $B$  是一切实数组成的集合，则  $A \cap B = A$ 。

**定义3** 由集合  $A$  与  $B$  的一切元素组成的集合称为  $A$  与  $B$  的**并集**，记为  $A \cup B$ ，换句话说，如果元素  $x \in A \cup B$ ，则  $x \in A$  或  $x \in B$ 。

**例12** 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , 则  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 。

**例13** 设  $A$  是一切负奇数组成的集合,  $B$  是一切正实数组成的集合, 则  $A \cup B$  是一切负奇数以及一切正实数组成的集合。

**例14** 设  $A$  是甲厂所有产品组成的集合,  $B$  是乙厂一切产品的集合, 则  $A \cup B$  表示由甲乙二厂的全部产品组成的集合。

**定理2** 如果  $A \subset B$ , 则  $A \cup B = B$

**例15** 设  $A$  是一切偶数组成之集,  $B$  是一切整数组成之集, 则  $A \cup B = B$

为方便起见, 我们引入空集合的概念。凡不含有任何元素的集合叫做空集, 记为  $\phi$ 。

**例16** 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$ , 则  $A \cap B = \phi$ 。

**例17** 设某厂的全部产品都是合格的, 则该厂的废品组成的集合是空集  $\phi$ 。

**定义4** 集合  $A$  减集合  $B$ , 记为  $A - B$ , 它表示由属于  $A$  但不属于  $B$  的一切元素组成的集合。

**例18** 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , 则  $A - B = \{1, 2\}$ 。

**例19** 设  $A$  是某厂的一切产品组成的集合,  $B$  是该厂的一切废次品组成的集合, 则  $A - B$  是该厂一切合格产品的集合。

**定义5** 如果  $B \subset A$ , 则  $A - B$  又称为  $B$  (关于集合  $A$ ) 的补

集，记为 $B'$ ，即 $B' = A - B (B \subset A)$ 。

**例20** 设 $A$ 是一切实数的集合，则一切有理数组成的集合 $B$ （关于实数集 $A$ ）的补集 $B'$ 是一切无理数组成的集合。

**例21** 设某厂全年生产的产品组成的集合为 $A$ ，上半年的产品组成之集为 $B$ ，则 $B$ （关于 $A$ ）的补集 $B'$ 为该厂下半年的产品组成之集。

**2. 区间** 高等数学中最常见的一类数集叫做区间。

**开区间**  $(a, b)$  它表示满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 $x$ 组成之集。在数轴上， $(a, b)$ 表示直线段 $ab$ （除去左、右端点 $x = a$ 、 $x = b$ ）之内的一切点组成的点集（见图1.1）。

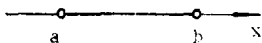


图 1.1

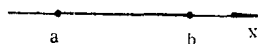


图 1.2

**闭区间**  $[a, b]$  表示满足 $a \leq x \leq b$ 的一切 $x$ 组成的数集，或线段 $ab$ 上的一切点组成的点集（见图1.2）。

此外，区间  $[a, b)$  是  $a \leq x < b$ ， $(a, b]$  是  $a < x \leq b$ ， $(a, +\infty)$  是  $a < x$ ， $[a, +\infty)$  是  $a \leq x$ ， $(-\infty, a)$  是  $x < a$ ， $(-\infty, a]$  是  $x \leq a$ 。

还有一种特殊的开区间叫做**邻域**，确切地说，设 $a$ 是任一给定的数， $\varepsilon$ 是任一正数，则开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 叫做点 $a$ 的 $\varepsilon$ 邻域（见图1.3）。

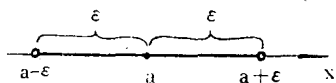


图 1.3

对于不同的正数 $\varepsilon$ ，同一

一个点 $a$ 有不同的邻域。例如，对 $\varepsilon=1$ 或 $\varepsilon=2$ ，点 $a$ 相应的邻域为 $(a-1, a+1)$ 或 $(a-2, a+2)$ 。

## §1.2 绝对值 不等式

实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 的定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

在数轴上， $|a|$ 表示点 $a$ 到原点 $o$ 的距离，而 $|a-b|$ 表示点 $a$ 与 $b$ 之间的距离。

从绝对值的定义容易看出 $|a| = \sqrt{a^2}$ ， $|a|^2 = a^2$ 以及 $-|a| \leq a \leq |a|$ 。

下面解释数学上的一种十分常见的符号。

设 $A$ 和 $B$ 是两个命题，则 $A \implies B$ 表示由 $A$ 可得到 $B$ ； $A \longleftarrow B$ 表示由 $B$ 可得到 $A$ ； $A \iff B$ 表示由 $A$ 可得到 $B$ ，同时又由 $B$ 可得到 $A$ ，有时，又把 $A \iff B$ 叫做 $B$ 是 $A$ 的**充要条件**，或 $A$ 与 $B$ 是**等价的**。

关于绝对值，有下列三个最本质的性质：

- (1)  $|a| = 0 \iff a = 0$
- (2)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- (3)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (三角不等式)

此外，还有下面一些常用的性质：

- (4)  $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
- (5)  $|a| - |b| \leq |a - b|$
- (6)  $|a/b| = |a|/|b|$  ( $b \neq 0$ )

$$(7) |a-b| < c \iff b-c < a < b+c$$

### 习 题 1.1

1. 设集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 1, 3, 4\}$   
求  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  和  $A - B$ .

2. 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $C = \{1, 5, 8, 10, 11\}$ , 求  $A \cup B \cup C$ ,  $A \cap B \cap C$  和  $(A - B) \cap C$ .

3. 确定  $\cos x = 0$  的一切根组成的集合  $A$ .

4. 证明:  $|a-b| \leq c \iff |a| \leq |b| + c$

5. 解不等式:

$$(1) |x-3| < 0.1 \qquad (2) |x+2| < 0.2$$

$$(3) 0 < |x-2| < 0.1 \qquad (4) |x| > 10$$

6. 把  $a$  的  $\varepsilon$  邻域画在数轴上:

$$(1) a = 0, \varepsilon = 0.1 \qquad (2) a = 1, \varepsilon = 0.1$$

$$(3) a = -1, \varepsilon = 1 \qquad (4) a = 2, \varepsilon = 3$$

7. 用数学归纳法证明:

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$$

## §1.3 函数概念

1. **常量和变量** 在一个问题(或过程)中, 如果某量保持不变, 则称为**常量**, 如果某量可以取得不同的值, 则该量叫**变量**。例如在自由落体问题中, 重力加速度  $g$  可以看成**常量**, 而物体下落的高度就是**变量**。在数学上, 变量的定义如



下：设 $D$ 是由某些数组成的集合，如果 $X$ 可以取得 $D$ 中的每一个数，则称 $X$ 是变量，其变化范围（或取值范围）就是数集 $D$ 。更一般的情况是，如果 $D$ 是某些元素组成的集合（不必是数集），而 $X$ 可以是 $D$ 中的任何一个元素，则 $X$ 叫做（广义的）变量。

## 2. 函数的定义

**定义6** 设 $D$ 是一个数集（或集合），如果有一个对应规则，使得对于 $D$ 内的每一个数（或元素） $x$ ，都有一个相应的实数 $y$ 与之对应，则称 $y$ 为（在 $D$ 内取值的）变量 $x$ 的**函数**。如果把上述对应规则记为 $f$ ，则函数 $y$ 可改写为 $f(x)$ ，即 $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。

上述定义中的 $D$ 叫做函数 $f(x)$ 的**定义域**， $x$ 叫做 $f(x)$ 的自变量，函数 $y$ 也叫做 $f(x)$ 的因变量。

**例1** 考查函数 $f(x) = 1/x^2$ （或 $y = 1/x^2$ ）。这时，自变量是 $x$ ，定义域 $D$ 为 $x \neq 0$ ，即 $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ，而对应规则 $f$ 就是公式 $1/x^2$ 本身。

对于不同的函数，我们用不同的记号 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $F(x)$ 、 $G(x)$ 等表示。

在函数概念中，最本质的因素是定义域和对应规则。两个函数相等，指的是它们的对应规则和定义域相同。

**例2** 函数 $f(x) = \sin x$ ， $x \in (-\infty, \infty)$ 与 $g(x) = x^2$ ， $x \in (-\infty, \infty)$ 是不同的，它们的定义域相同，但对应规则不同。

**例3** 函数 $f(x) = \cos x$ ， $x \in (-\infty, \infty)$ 与 $g(x) = \cos x$ ， $x \in (0, \pi)$ 是不相同的，它们的对应规则都是 $\cos x$ ，但他们的定义域不同。

设函数 $y = f(x)$ ， $x \in D$ ，对于 $D$ 中的任何一个确定值