明安联　吴元恺　林学杰

经济数学

·高等数学部份·

四川科学技术出版社

经 济 数 学

——高等数学部份——

明安联　吴元恺　林学杰

四 川 科 学 技 术 出 版 社

一 九 八 七 年 · 成都

责任编辑：赵 健 刘阳青
封面设计：曹辉绿
技术设计：刘阳青

经济数学

（高等数学部份）

明安联 吴元恺 林学杰

四川科学技术出版社出版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
统一书号：4298·103

1987年8月第1版 开本787×1092 1/32
1987年8月第1次印刷 字数330千
印数1—7,400册 印张15.75
定 价：3.35元
ISNB 7-5364-0230-9/F.45

⑦

前　　言

本书是为高等学校经济类专业编写的教材，供一年级大学生使用。内容的取材和份量，是按经济类各专业目前的实际需要确定的。全书共分十章，内容包括一元及多元函数的微积分、无穷级数、微分方程和空间解析几何等。各章节之后都附有精选的习题，难度适中，针对性强。书末附有习题答案。

编写本书的指导思想，是培养学生解决实际问题的能力，使之能够熟练掌握基本的计算方法和技巧，并能把经济学中的基本概念和问题数学化。书中安排了适量的经济学方面的例题。

在编写过程中，力求做到数学概念的论述清楚、准确、易懂，并从几何和经济学角度给予解释，借以使读者深刻理解其本质和适用范围。在介绍计算方法时，强调做题步骤清晰，突出基本技巧，并指出每种计算方法的前提条件及适用范围等。

本书还可作为经济类专业自学考试及函授的教材或参考书。

在本书编写前的酝酿阶段，得到了西南财经大学有关方面的大力支持。此外，四川科学技术出版社也为作者提供了很多经济数学方面的资料，在此一并表示感谢。

编　者

1987年10月于成都

目　　录

第一章　函　数

在自然科学和经济管理学中，可遇到各种各样的函数，对它们的研究，在理论上和应用上都有重要的意义。

§1.1　集合与区间

1．集合概念　集合是自然科学和社会科学中的一个最基本的概念。凡具有某种共同特性的事物的全体就组成一个**集合**。

例1　某工厂的一切汽车组成一个集合。

例2　某学校一年级的全体学生组成一个集合。

设A是一个集合，则记号$x\in A$表示x是集合A的一个**元素**（**或成元**），读作“x属于A”，记号$x\bar{\in}A$表示x不是A的元素，读作“x不属于A”。如果集合A的一切元素都是实数，则称A是一个数集。

例3　介于1与9之间的偶数组成的数集记为

$$\{2,4,6,8\}$$

例4　一切自然数组成的数集记为

$$\{n \mid n=1,2,3,\cdots\}$$

例5　一切偶数组成的数集记为

$$\{ 2n \mid n=0, \pm 1, \pm 2 \cdots \}$$

例6 一切正数组成的数集A可表为

$$A=\{ x \mid x>0 \}$$

例7 由单位圆$x^2+y^2=1$内部的点(x, y)组成的集合为

$$\{ (x, y) \mid x^2+y^2<1 \}$$

定义1 设有集合A与B，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的**子集**，或称B包含A，记为$A\subset B$，或$B\supset A$。

例8 设A是一切有理数组成的集合，B是一切实数组成的集合，则$A\subset B$，或者说，有理数集A是实数集B的一个子集。

定义2 由集合A与B的一切公共元素组成的集合称为A与B的**交集**，记为$A\cap B$。

例9 设A是一切整数的集合，B是一切正实数的集合，则$A\cap B$是一切自然数的集合。

例10 设A是甲储蓄所的一切储户组成的集合，B是乙储蓄所的一切储户组成的集合，则$A\cap B$表示在甲、乙储蓄所都有存款的储户组成的集合。

定理1 设$A\subset B$，则$A\cap B=A$。

例11 设A是一切自然数组成的集合，B是一切实数组成的集合，则$A\cap B=A$。

定义3 由集合A与B的一切元素组成的集合称为A与B的**并集**，记为$A\cup B$，换句话说，如果元素$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$。

例12 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6,7\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

例13 设A是一切负奇数组成的集合，B是一切正实数组成的集合，则$A\cup B$是一切负奇数以及一切正实数组成的集合。

例14 设A是甲厂所有产品组成的集合，B是乙厂一切产品的集合，则$A\cup B$表示由甲乙二厂的全部产品组成的集合。

定理2 如果$A\subset B$，则$A\cup B=B$

例15 设A是一切偶数组成之集，B是一切整数组成之集，则$A\cup B=B$

为方便起见，我们引入空集合的概念。凡不含有任何元素的集合叫做空集，记为ϕ。

例16 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，则$A\cap B=\phi$。

例17 设某厂的全部产品都是合格的，则该厂的废品组成的集合是空集ϕ。

定义4 集合A减集合B，记为$A-B$，它表示由属于A但不属于B的一切元素组成的集合。

例18 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则$A-B=\{1,2\}$。

例19 设A是某厂的一切产品组成的集合，B是该厂的一切废次品组成的集合，则$A-B$是该厂一切合格产品的集合。

定义5 如果$B\subset A$，则$A-B$又称为B(关于集合A)的补

集，记为B'，即$B' = A - B$（$B \subset A$）。

例20 设A是一切实数的集合，则一切有理数组成的集合B（关于实数集A）的补集B'是一切无理数组成的集合。

例21 设某厂全年生产的产品组成的集合为A，上半年的产品组成之集为B，则B（关于A）的补集B'为该厂下半年的产品组成之集。

2．区间 高等数学中最常见的一类数集叫做区间。

开区间(a, b) 它表示满足不等式$a < x < b$的一切实数x组成之集。在数轴上，(a, b)表示直线段ab（除去左、右端点$x = a$、$x = b$）之内的一切点组成的点集（见图1.1）。

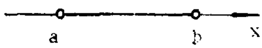

图 1.1

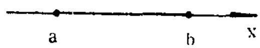

图 1.2

闭区间$[a, b]$ 表示满足$a \leqslant x \leqslant b$的一切$x$组成的数集，或线段$ab$上的一切点组成的点集（见图1.2）。

此外，区间$[a, b)$是$a \leqslant x < b$，$(a, b]$是$a < x \leqslant b$，$(a, +\infty)$是$a < x$，$[a, +\infty)$是$a \leqslant x$，$(-\infty, a)$是$x < a$，$(-\infty, a]$是$x \leqslant a$。

还有一种特殊的开区间叫做**邻域**，确切地说，设a是任一给定的数，ε是任一正数，则开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$叫做点a的$\varepsilon$邻域（见图1.3）。对于不同的正数$\varepsilon$，同一

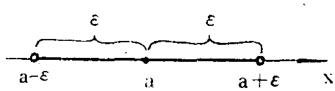

图 1.3

个点a有不同的邻域。例如，对$\varepsilon=1$或$\varepsilon=2$，点a相应的邻域为$(a-1, a+1)$或$(a-2, a+2)$。

§1.2 绝对值 不等式

实数a的绝对值$|a|$的定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

在数轴上，$|a|$表示点a到原点o的距离，而$|a-b|$表示点a与b之间的距离。

从绝对值的定义容易看出$|a|=\sqrt{a^2}$，$|a|^2=a^2$以及$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$。

下面解释数学上的一种十分常见的符号。

设A和B是两个命题，则$A\Longrightarrow B$表示由A可得到B；$A\Longleftarrow B$表示由B可得到A；$A\Longleftrightarrow B$表示由A可得到B，同时又由B可得到A，有时，又把$A\Longleftrightarrow B$叫做B是A的**充要条件**，或A与B是**等价的**。

关于绝对值，有下列三个最本质的性质：

(1) $|a|=0 \Longleftrightarrow a=0$

(2) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

(3) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ （三角不等式）

此外，还有下面一些常用的性质：

(4) $|a|\leqslant b \Longleftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b$

(5) $|a|-|b|\leqslant|a-b|$

(6) $|a/b|=|a|/|b|$ $(b\neq 0)$

(7) $|a-b|<c \Longleftrightarrow b-c<a<b+c$

习 题 1.1

1．设集合$A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{-1,1,3,4\}$求$A\cup B$、$A\cap B$和$A-B$。

2．设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$，$C=\{1,5,8,10,11\}$，求$A\cup B\cup C$、$A\cap B\cap C$和$(A-B)\cap C$。

3．确定$\cos x=0$的一切根组成的集合A。

4．证明：$|a-b|\leqslant c \Longrightarrow |a|\leqslant|b|+c$

5．解不等式：

(1) $|x-3|<0.1$　　(2) $|x+2|<0.2$

(3) $0<|x-2|<0.1$　　(4) $|x|>10$

6．把a的ε邻域画在数轴上：

(1) $a=0$，$\varepsilon=0.1$　　(2) $a=1$，$\varepsilon=0.1$

(3) $a=-1$，$\varepsilon=1$　　(4) $a=2$，$\varepsilon=3$

7．用数学归纳法证明：

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdots|a_n|$$

§1.3 函 数 概 念

1．常量和变量　在一个问题(或过程)中，如果某量保持不变，则称为**常量**，如果某量可以取得不同的值，则该量叫**变量**。例如在自由落体问题中，重力加速度g可以看成常量，而物体下落的高度就是变量。在数学上，变量的定义如

下：设D是由某些数组成的集合，如果X可以取得D中的每一个数，则称X是变量，其变化范围（或取值范围）就是数集D。更一般的情况是，如果D是某些元素组成的集合（不必是数集），而X可以是D中的任何一个元素，则X叫做（广义的）变量。

2．函数的定义

定义6 设D是一个数集（或集合），如果有一个对应规则，使得对于D内的每一个数（或元素）x，都有一个相应的实数y与之对应，则称y为（在D内取值的）变量x的**函数**。如果把上述对应规则记为f，则函数y可改写为$f(x)$，即$y=f(x)$，$x\in D$。

上述定义中的D叫做函数$f(x)$的**定义域**，x叫做$f(x)$的自变量，函数y也叫做$f(x)$的因变量。

例1 考查函数$f(x)=1/x^2$（或$y=1/x^2$）。这时，自变量是x，定义域D为$x\neq 0$，即$D=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$，而对应规则$f$就是公式$1/x^2$本身。

对于不同的函数，我们用不同的记号$f(x)$、$g(x)$、$F(x)$、$G(x)$等表示。

在函数概念中，最本质的因素是定义域和对应规则。两个函数相等，指的是它们的对应规则和定义域相同。

例2 函数$f(x)=\sin x$，$x\in(-\infty,\infty)$与$g(x)=x^2$，$x\in(-\infty,\infty)$是不同的，它们的定义域相同，但对应规则不同。

例3 函数$f(x)=\cos x$，$x\in(-\infty,\infty)$与$g(x)=\cos x$，$x\in[0,\pi]$是不相同的，它们的对应规则都是$\cos x$，但他们的定义域不同。

设函数$y=f(x)$，$x\in D$，对于D中的任何一个确定值