随机过程习题集

周荫清　李春升　陈杰　编著

清华大学出版社

随机过程习题集

周荫清　李春升　陈杰　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

全书共7章，内容包括随机过程的基本概念、随机过程的线性变换、窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程、马尔可夫过程和估计理论。

每章分为三部分：内容提要、例题和练习题。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的主要内容作了较深入的概括。针对各章的重要课题全书选编了约180道例题和180道练习题。书末附有部分练习题的答案。

本书层次清楚，概念清晰，语言通俗易懂，可供学习随机过程理论的工科大学生使用，亦可供有关科技人员学习随机过程理论时参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程习题集/周荫清，李春升，陈杰编著. —北京：清华大学出版社，2004.9
ISBN 7-302-09086-6

Ⅰ. 随… Ⅱ. ①周… ②李… ③陈… Ⅲ. 随机过程—高等学校—习题 Ⅳ. 0211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072240 号

出 版 者：清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社 总 机：010-62770175
地　　址：北京清华大学学研大厦
邮　　编：100084
客户服务：010-62776969
组稿编辑：陈国新
文稿编辑：魏艳春
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　**印张**：15.5　**字数**：351千字
版　　次：2004年9月第1版　2004年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-09086-6/TN・202
印　　数：1～3000
定　　价：22.00元

前言

FOREWORD

随机过程理论是现代概率论中的一个重要分支，已广泛应用于通信、雷达、导航、自动控制、生物物理、系统工程、空间技术等多种工程科学技术中，并在其中显示出十分重要的作用。目前随机过程理论已经成为工科院校的一门重要基础理论课程。

在学习随机过程理论时，为了透彻理解随机过程的基本理论，掌握随机过程的分析方法，做习题是必不可缺的环节。为此，我们在编写《随机过程导论》一书的同时编写了本书。

全书共 7 章。第 1 章和第 2 章分别介绍随机过程的基本概念及其线性系统的分析方法；第 3～6 章分别介绍窄带随机过程、高斯随机过程、泊松随机过程和马尔可夫随机过程；第 7 章为估计理论，它是随机过程应用的一个方面，也是目前随机过程应用比较广泛的一个领域。

书中每章由内容提要、例题和练习题三部分组成。内容提要部分对每章的基本内容以及读者应该掌握的重点作了较深入的概括。针对各章的重要课题本书选编了适量的例题，并用例题的形式体现各章的基本内容与具体要求，而且从概念、推演、证明及应用四个方面对随机过程中的典型问题进行剖析，帮助读者深入理解基本概念，开拓思路，提高分析问题和解决问题的能力。需要指出的是，例题部分的解法不是惟一的，也许读者会有更好的解法。做习题是学习随机过程理论的重要环节，因此，书中列出了一定量的练习题。练习题的编排遵循由浅入深的原则，凡是难度大一些的题目都标上星号“*”。书末附有部分练习题的答案。亲自求解本书中的习题，对于学好随机过程的基本理论是十分有益的，这将会大大提高读者解决实际问题的能力。

本书收入的例题和习题是作者近几年来在为北京航空航天大学电子信息工程学院本科生和研究生开设“随机过程理论”课程期间，从国内外有关书籍中经过精心挑选、反复推敲和设计而逐渐积累起来的。多数题目的选择意在培养学生分析问题和解决问题的综合能力，少数较难的例题和习题则用以开拓和深化随机过程理论，拓展应用方面的内容，同时也可开阔读者视野。

本书在 1987 年出版的《随机过程习题集》的基础上对内容重新进行了重要的修订、扩充和加工。本书第 1～6 章的内容提要部分及第 7 章由周荫清编写；第 1～6 章的例题和练习题由李春升编写；全书修订、扩充和加工由陈杰完成。最后，由周荫清统编全书。

参加编写和修订工作的还有徐华平、刘慧、文竹、刘利国、魏杰、孙兵和温东超，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现错误和不妥之处，恳请读者批评、指正。

编　者

于北京航空航天大学

2003 年 12 月

目录

CONTENTS

随机过程的基本概念

第1章

CHAPTER 1

1.1 内容提要

1.1.1 随机过程的描述

1. 随机过程的定义

设$E=\{e\}$是样本空间，若对每一时刻$t\in T$都有定义在E上的随机变量$X(e,t)$，则称一簇随机变量$\{X(e,t),e\in E,t\in T\}$为随机过程。通常简化为$\{X(t),t\in T\}$。

2. 统计描述

随机过程在时刻t的概率分布函数为

$$F_X(x,t)\overset{\text{def}}{=\!=}P\{X(t)\leqslant x\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(t)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x}$$

并且有

$$F_X(x,t)=\int_{-\infty}^{x}p_X(y,t)\mathrm{d}y$$

相应的特征函数为

$$\phi_X(v,t)\overset{\text{def}}{=\!=}E\{\exp[\mathrm{j}X(t)v]\}$$

随机过程的联合概率分布函数为

$$F_n(x_1,\cdots,x_n;\ t_1,\cdots,t_n)\overset{\text{def}}{=\!=}P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}$$

其联合概率密度为

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

相应的特征函数为

$$\phi_n(v_1,t_1;\ v_2,t_2;\ \cdots;\ v_n,t_n)\overset{\text{def}}{=\!=}E\left\{\exp\left[\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}X(t_k)v_k\right]\right\}$$

3. 一般分类

随机过程一般分为以下四类：

(1) 连续随机过程　状态连续、时间参数连续的随机过程称为连续随机过程；
(2) 离散随机过程　状态离散、时间参数连续的随机过程称为离散随机过程；
(3) 连续随机序列　状态连续、时间参数离散的随机过程称为连续随机序列；
(4) 离散随机序列　状态离散、时间参数离散的随机过程称为离散随机序列。

1.1.2 随机过程的数字特征

设随机过程$\{X(t),t\in T\}$在t_1,t_2时刻的取值为x_1,x_2，其中数字特征分别定义如下。

(1) 均值(数学期望)

$$m_X(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,t)\mathrm{d}x$$

(2) 均方值

$$\psi_X^2(t)=E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x,t)\mathrm{d}x$$

(3) 方差

$$\sigma_X^2(t)=E\{[X(t)-m_X(t)]^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t)]^2p(x,t)\mathrm{d}x$$

(4) 自相关函数

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2;\ t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

(5) 协方差

$$\begin{aligned}C_X(t_1,t_2)&=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}\\&=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)\end{aligned}$$

当$t_1=t_2=t$时，有

$$C_X(t,t)=\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-m_X^2(t)$$

如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$是平稳随机过程，则有

(1) $m_X(t)=m_X$；
(2) $\psi_X^2(t)=\psi_X^2$；
(3) $\sigma_X^2(t)=\sigma_X^2$；
(4) $R_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)$，其中$\tau=t_1-t_2$；
(5) $C_X(t_1,t_2)=R_X(\tau)-m_X^2$，$C_X(t,t)=\sigma_X^2$。

随机过程可以是复函数，定义复随机过程为

$$Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t)$$

复随机过程的数字特征分别定义如下。

(1) 均值

$$m_Z(t)=m_X(t)+\mathrm{j}m_Y(t)$$

(2) 自相关函数

$$R_Z(t_1,t_2)=E[Z(t_1)Z^*(t_2)]$$

(3) 协方差

$$\mathrm{cov}[Z(t_1),Z(t_2)]=E[\mathring{Z}(t_1)\,\mathring{Z}^*(t_2)]$$

其中

$$\mathring{Z}(t) = Z(t) - m_Z(t)$$

当 $t_1=t_2=t$ 时，有

$$\operatorname{cov}[Z(t),Z(t)] = \operatorname{var}[Z(t)] = \operatorname{var}[X(t)] + \operatorname{var}[Y(t)]$$

(4) 互相关函数

若有两个复随机过程

$$Z_1(t) = X_1(t) + \mathrm{j}Y_1(t)$$
$$Z_2(t) = X_2(t) + \mathrm{j}Y_2(t)$$

则互相关函数定义为

$$R_{Z_1Z_2}(t_1,t_2) = E[Z_1(t_1)Z_2^*(t_2)]$$

1.1.3　平稳随机过程

平稳随机过程分为严格平稳随机过程和广义平稳随机过程。

定义　设 $X(t)(t\in T)$ 为一随机过程，若对于任意整数 n 和任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n,t_i\in T,i=1,2,\cdots,n$，以及任意实数 τ，有分布函数

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&= F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)\end{aligned}$$

或概率密度函数

$$\begin{aligned}&p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&= p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)\end{aligned}$$

则称这类过程为严格平稳随机过程。

定义　设 $\{X(t),t\in T\}$ 是一个平稳随机过程，若 $E[X^2(t)]<\infty$，且 $E[X(t)]=m_X=$ 常数，$R(t_1,t_2)=R(\tau)$，$\tau=t_1-t_2$，则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为广义平稳随机过程。广义平稳随机过程是一个二阶矩过程。二阶矩过程定义如下。

定义　设 $\{X(t),t\in T\}$ 为一随机过程，若对一切 $t\in T$，有

$$E\{X^2(t)\} < \infty$$

则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为二阶矩过程。

1. 平稳随机过程相关函数的性质

设随机过程 $X(t)$，$Y(t)$ 为单独及联合平稳，则有

(1) $R_X(\tau)=R_X^*(-\tau)$，如果随机过程为实过程，那么自相关函数是偶函数，亦即 $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$；

(2) $|R_X(\tau)|\leqslant R_X(0)=\psi_X^2$；

(3) $R_X(\infty)=\lim\limits_{|\tau|\to\infty}R_X(\tau)=m_X^2$；

(4) $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}R_X(t_i-t_j)\lambda(t_i)\lambda(t_j)\geqslant 0$；

(5) $R_{XY}(\tau)=R_{YX}^*(-\tau)$；

(6) $|R_{XY}(\tau)|\leqslant[R_X(0)R_Y(0)]^{1/2}$。

2. 遍历性

样本函数 $x(t)$ 的时间平均定义为

$$\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t$$

若随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是遍历的，则样本集的各种统计平均以概率 1 等于相应的时间平均。

(1) 均值

$$m_X=\overline{x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t$$

(2) 自相关函数

$$R_X(\tau)=\overline{x(t)x^*(t-\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

(3) 互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)y^*(t-\tau)\mathrm{d}t$$

3. 平稳过程的功率谱密度

(1) 广义平稳随机过程的功率谱密度定义为

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

其中

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

上述公式称为维纳-辛钦定理。

对于实随机过程，由于 $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$，故有

$$S_X(\omega)=2\int_{0}^{\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

(2) 功率谱密度性质

不论随机过程是实过程还是复过程，均有

$$S_X^*(\omega)=S_X(\omega)$$

这表明功率谱密度必为实函数。

若 $X(t)$ 是实函数，则有

$$S_X(\omega)=S_X(-\omega)$$

这表明功率谱密度必为偶函数。

(3) 互谱密度

若两个随机过程 $X(t),Y(t)$ 是联合广义平稳的，则它们的互功率谱密度定义为

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau$$

其中

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\omega$$

一般而言，有

$$S_{XY}^{*}(\omega) = S_{YX}(\omega)$$

若 $X(t)$，$Y(t)$为实过程，则有

$$S_{YX}(\omega) = S_{XY}(-\omega)$$

1.1.4　矢量随机过程

设$\{\boldsymbol{X}(t), t \in T\}$为 m 维矢量随机过程，定义为

$$\boldsymbol{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_m(t)]^{\mathrm{T}}$$

1. 统计描述

矢量随机过程 $\boldsymbol{X}(t)$在时刻 t 的概率分布函数为

$$F_X(\boldsymbol{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\boldsymbol{X}(t) \leqslant \boldsymbol{x}\}$$

相应的概率密度函数为

$$p_X(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial^m F_X(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial^m F_X(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m}$$

式中，$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_m]^{\mathrm{T}}$。

矢量随机过程的联合概率分布函数为

$$F_{X^1, \cdots, X^n}(\boldsymbol{x}^1, t_1; \boldsymbol{x}^2, t_2; \cdots; \boldsymbol{x}^n, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\boldsymbol{X}(t_1) \leqslant \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{X}(t_2) \leqslant \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{X}(t_n) \leqslant \boldsymbol{x}^n\}$$

式中，$\boldsymbol{X}^i = [X_1^i, X_2^i, \cdots, X_m^i]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}^i = [x_1^i, x_2^i, \cdots, x_m^i]^{\mathrm{T}}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

相应的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p_{X^1, \cdots, X^n}(\boldsymbol{x}^1, t_1; \boldsymbol{x}^2, t_2; \cdots; \boldsymbol{x}^n, t_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{mn} F_{X^1, \cdots, X^n}(\boldsymbol{x}^1, t_1; \boldsymbol{x}^2, t_2; \cdots; \boldsymbol{x}^n, t_n)}{\partial \boldsymbol{x}^1 \partial \boldsymbol{x}^2 \cdots \partial \boldsymbol{x}^n} \\ &= \frac{\partial^{mn} F_{X^1, \cdots, X^n}(\boldsymbol{x}^1, t_1; \boldsymbol{x}^2, t_2; \cdots; \boldsymbol{x}^n, t_n)}{\partial x_1^1 \cdots \partial x_m^1 \cdots \partial x_1^n \cdots \partial x_m^n} \end{aligned}$$

2. 特征函数

矢量随机过程在时刻 t_i 的特征函数为

$$\phi_X(\boldsymbol{v}, t_i) \stackrel{\text{def}}{=} E[\exp\{\mathrm{j}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{v}\}]$$

其中

$$\boldsymbol{X}(t_i) = [X_1(t_i), X_2(t_i), \cdots, X_m(t_i)]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_m]^{\mathrm{T}}$$

矢量随机过程联合特征函数为

$$\phi_{X^1, \cdots, X^n}(\boldsymbol{v}^1, t_1; \boldsymbol{v}^2, t_2; \cdots; \boldsymbol{v}^n, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} E\left[\exp\left\{\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t_k)\boldsymbol{v}^k\right\}\right]$$

其中，$\boldsymbol{X}(t_k)=[X_1(t_k),X_2(t_k),\cdots,X_m(t_k)]^{\mathrm{T}}$， $k=1,2,\cdots,n$。

3. 数字特征

设矢量随机过程 $\boldsymbol{Z}(t)$定义为

$$\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_m(t) \end{bmatrix}$$

(1) 均值矢量

$$\boldsymbol{m}_Z(t)=E[\boldsymbol{Z}(t)]=[E\{X_1(t)\},E\{X_2(t)\},\cdots,E\{X_m(t)\}]^{\mathrm{T}}$$

(2) 协方差阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{ZZ}(t_1,t_2)&=\mathrm{cov}[\boldsymbol{Z}(t_1),\boldsymbol{Z}(t_2)]\\ &\overset{\mathrm{def}}{=}E\{[\boldsymbol{Z}(t_1)-\boldsymbol{m}_Z(t_1)][\boldsymbol{Z}(t_2)-\boldsymbol{m}_Z(t_2)]^{\mathrm{T}}\}\\ &=E[\boldsymbol{Z}(t_1)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t_2)]-\boldsymbol{m}_Z(t_1)\boldsymbol{m}_Z^{\mathrm{T}}(t_2)\end{aligned}$$

(3) 自相关阵

$$\boldsymbol{R}_Z(t_1,t_2)=E[\boldsymbol{Z}(t_1)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t_2)]$$

式中，令 $t_1=t_2=t$，则可得到均方阵为

$$\boldsymbol{P}_Z(t)=E[\boldsymbol{Z}(t)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)]$$

(4) 方差阵

$$\boldsymbol{P}_{ZZ}(t)=E[\boldsymbol{Z}(t)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t)]-\boldsymbol{m}_Z(t)\boldsymbol{m}_Z^{\mathrm{T}}(t)$$

(5) 互协方差阵

$$\boldsymbol{P}_{Z_1Z_2}(t_1,t_2)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{Z}_1(t_1),\boldsymbol{Z}_2(t_2)]\overset{\mathrm{def}}{=}E\{[\boldsymbol{Z}_1(t_1)-\boldsymbol{m}_{Z_1}(t_1)][\boldsymbol{Z}_2(t_2)-\boldsymbol{m}_{Z_2}(t_2)]^{\mathrm{T}}\}$$

(6) 互相关阵

$$\boldsymbol{R}_{Z_1Z_2}(t_1,t_2)\overset{\mathrm{def}}{=}E[\boldsymbol{Z}_1(t_1)\boldsymbol{Z}_2^{\mathrm{T}}(t_2)]$$

4. 平稳性

若一个矢量随机过程$\{\boldsymbol{Z}(t),t\in T\}$的均值矢量与方差阵和时间 t 无关，而自协方差阵仅与时间差 $\tau=t_1-t_2$ 有关，即 $\boldsymbol{m}_Z(t)=\boldsymbol{m}_Z$，$\boldsymbol{P}_{ZZ}(t)=\boldsymbol{P}_{ZZ}$，且 $\boldsymbol{P}_{ZZ}(t_1,t_2)=\boldsymbol{P}_{ZZ}(t_1-t_2)=\boldsymbol{P}_{ZZ}(\tau)$，$\tau=t_1-t_2$

则称此矢量随机过程为广义平稳矢量过程。显然有

$$\boldsymbol{R}_{ZZ}(\tau)=E[\boldsymbol{Z}(t)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(t-\tau)]=\boldsymbol{P}_{ZZ}(\tau)+\boldsymbol{m}_Z\boldsymbol{m}_Z^{\mathrm{T}}$$

5. 统计独立和不相关

(1) 独立矢量随机过程

定义 若一个矢量随机过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\in T\}$，在 $t\in T$ 的任意时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 上，其联合概率分布函数为

$$F_{X^1,X^2,\cdots,X^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X^k}(\boldsymbol{x}^k,t_k)$$

则称此类矢量过程为独立矢量随机过程。

显然，对应的联合概率密度函数为

$$p_{X^1,\cdots,X^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n)=\prod_{k=1}^{n}p_{X^k}(\boldsymbol{x}^k,t_k)$$

(2) 统计独立

定义　若两个矢量随机过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\in T\}$和$\{\boldsymbol{Y}(t),t\in T\}$，在$t\in T$内的任意$n$个时刻点上，其联合概率分布函数为

$$\begin{aligned}&F_{X^1,\cdots,X^n;Y^1,\cdots,Y^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n;\boldsymbol{y}^1,t_1;\cdots;\boldsymbol{y}^n,t_n)\\&=F_{X^1,\cdots,X^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n)F_{Y^1,\cdots,Y^n}(\boldsymbol{y}^1,t_1;\cdots;\boldsymbol{y}^n,t_n)\end{aligned}$$

则称此两个随机过程统计独立。其中

$$\boldsymbol{X}(t)=[X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{Y}(t)=[Y_1(t),Y_2(t),\cdots,Y_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

对应的概率密度函数为

$$\begin{aligned}&p_{X^1,\cdots,X^n;Y^1,\cdots,Y^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n;\boldsymbol{y}^1,t_1;\cdots;\boldsymbol{y}^n,t_n)\\&=p_{X^1,\cdots,X^n}(\boldsymbol{x}^1,t_1;\boldsymbol{x}^2,t_2;\cdots;\boldsymbol{x}^n,t_n)p_{Y^1,\cdots,Y^n}(\boldsymbol{y}^1,t_1;\cdots;\boldsymbol{y}^n,t_n)\end{aligned}$$

(3) 不相关

对于矢量随机过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\in T\}$，若有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{X^1X^2}(t,t)&=E[\boldsymbol{X}(t_1)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t_2)]=E[\boldsymbol{X}(t_1)]E[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t_2)]\\&=\boldsymbol{m}_{X^1}(t_1)\boldsymbol{m}_{X^2}^{\mathrm{T}}(t_2)\end{aligned}$$

则称此矢量随机过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\in T\}$为不相关过程。显然，对于不相关过程有

$$\boldsymbol{P}_{X^1X^2}(t_1,t_2)=\boldsymbol{R}_{X^1X^2}(t_1,t_2)-\boldsymbol{m}_{X^1}(t_1)\boldsymbol{m}_{X^2}^{\mathrm{T}}(t_2)=\boldsymbol{0}$$

独立矢量随机过程必不相关，但反之未必。

1.2　例题

例 1.1　设有正弦波随机过程$X(t)=A\cos\omega t$，其中$0\leqslant t<\infty$，ω为常数。A是均匀分布于[0,1]之间的随机变量。

(1) 确定随机变量$X(t_i)$的概率密度，$t_i=0,\dfrac{\pi}{4\omega},\dfrac{3\pi}{4\omega},\dfrac{\pi}{\omega}$；

(2) 当$t'=\pi/(2\omega)$时，求$X(t')$的概率密度。

解　(1) 令$t=0$，则$X(0)=A\cos(\omega\times 0)=A$，故

$$p_X(x)=p_A(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

令$t=\pi/(4\omega)$，则$X\left(\dfrac{\pi}{4\omega}\right)=A\cos\left(\omega\times\dfrac{\pi}{4\omega}\right)=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$，故

$$p_X(x)=p_A(\sqrt{2}x)\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right|=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $t=3\pi/(4\omega)$，则 $X\left(\frac{3\pi}{4\omega}\right)=A\cos\left(\omega\times\frac{3\pi}{4\omega}\right)=-\frac{A}{\sqrt{2}}$，故

$$p_X(x)=p_A(-\sqrt{2}x)\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right|=\begin{cases}\sqrt{2}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令 $t=\pi/\omega$，则 $X\left(\frac{\pi}{\omega}\right)=A\cos\left(\omega\times\frac{\pi}{\omega}\right)=-A$，故

$$p_X(x)=p_A(-x)\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right|=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 令 $t'=\pi/(2\omega)$，则 $X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)=A\cos\left(\omega\times\frac{\pi}{2\omega}\right)=0$，故

$$p_X(x)=\delta(x)$$

例 1.2 利用重复抛掷硬币的实验定义一个随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{出现正面}\\ 2t, & \text{出现反面}\end{cases}$$

设“出现正面”和“出现反面”的概率为 1/2。

(1) 求 $X(t)$ 的一维分布函数 $F_X\left(x,\frac{1}{2}\right)$ 和 $F_X(x,1)$；

(2) 求 $X(t)$ 的二维分布函数 $F_X\left(x_1,x_2;\frac{1}{2},1\right)$。

解 令随机变量 Y 表示抛掷硬币实验的结果。若“出现正面”，令 $Y=1$；若“出现反面”，令 $Y=-1$，且有 $P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$。

(1) 当 $t=\frac{1}{2}$ 时，若 $Y=1$，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

若 $Y=-1$，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$$

于是

$$\begin{aligned}F_X\left(x,\frac{1}{2}\right)&=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x\right\}=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x\mid Y=1\right\}\cdot P\{Y=1\}+\\&\quad P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x\mid Y=-1\right\}\cdot P\{Y=-1\}\\&=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}\end{aligned}$$

同理可得

$$F_X(x,1)=P\{X(1)\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

(2) 类似地，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，若 $Y=1$，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

若 $Y=-1$，则

$$X\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$$

当 $t=1$ 时，若 $Y=1$，则

$$X(1)=\cos\pi=-1$$

若 $Y=-1$，则

$$X(1)=2\times 1=2$$

于是

$$F_X\left(x_1,x_2;\frac{1}{2},1\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant x_1,X(1)\leqslant x_2\right\}$$

$$=\begin{cases}0, & x_1<0,-\infty<x_2<\infty\\ 0, & x_1\geqslant 0,x_2<-1\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x_1<1,-1\leqslant x_2<2\\ \dfrac{1}{2}, & x_1\geqslant 1,-1\leqslant x_2<2\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x_1<1,x_2\geqslant 2\\ 1, & x_1\geqslant 1,x_2\geqslant 2\end{cases}$$

例 1.3　给定一个随机过程 $X(t)$ 和任一实数 x，定义另一个随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant x\\ 0, & X(t)>x\end{cases}$$

证明 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数分别为 $X(t)$ 的一维和二维分布函数。

证明　证法一：设 $p_1(x,t)$ 和 $p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 分别为 $X(t)$ 的一维和二维概率密度，则

$$\begin{aligned}m_Y=E[Y(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)p_1(x,t)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{x}p_1(x,t)\mathrm{d}x=F_1(x,t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E[Y(t_1)Y(t_2)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y_1y_2p_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned}$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$
$$=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

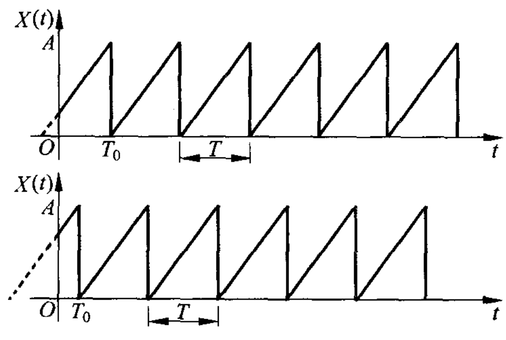
证法二：注意到对应于任意给定的 t，$Y(t)$是一个仅仅取值为 0 或 1 的离散型随机变量，因此

$$m_Y = E[Y(t)] = 1\cdot P\{Y(t)=1\}+0\cdot P\{Y(t)=0\}$$
$$= P\{X(t)\leqslant x\} = F_1(x,t)$$
$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]$$
$$=1\times1\times P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=1\}+1\times0\times P\{Y(t_1)=1,Y(t_2)=0\}+$$
$$0\times1\times P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=1\}+0\times0\times P\{Y(t_1)=0,Y(t_2)=0\}$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}$$
$$=F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

例 1.4 考虑随机过程 $X(t)$，其样本函数是周期性锯齿波。两个典型的样本函数如例题图 1.4 所示。每个样本函数都具有相同的形状，但它们将 $t=0$ 时刻以后出现的第一个零值时刻记为 T_0，假设 T_0 是一个均匀分布的随机变量

$$p_{T_0}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $X(t)$的一维概率密度 $p_X(x)$。



例题图 1.4

解 由三角关系可得

$$X(t)=\frac{A}{T}(T-T_0+t),\quad -T+T_0\leqslant t\leqslant T_0$$

其中

$$T_0=T-\frac{T}{A}X(t)+t=f(X)$$

于是可以求得 $X(t)$的概率密度为

$$p_X(x)=p_{T_0}[f(x)]\left|\frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}x}\right|$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & 0\leqslant x\leqslant A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于 $p_X(x)$ 与 t 无关，表明 $X(t)$ 是一阶平稳随机过程。

例 1.5 若正弦波随机过程 $X(t)$ 取如下形式：

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$$

其中振幅 A 取常数，角频率 ω 取常数，相位 Θ 是一个随机变量，它均匀分布于$[-\pi,\pi]$间，即

$$p(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi < \theta < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求在 t 时刻随机过程 $X(t)$ 的概率密度 $p_X(x)$。

解 根据特征函数的定义，有

$$\phi_X(v) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vX(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx} p_X(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

此外，又有

$$\begin{aligned}\phi_X(v) &= E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}vA\cos(\omega t+\Theta)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vA\cos(\omega t+\theta)} p(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vA\cos(\omega t+\theta)}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\omega t}^{\pi+\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vA\cos y}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

根据积分性质，若 $\phi_X(t)$ 为周期函数，周期为 T，则

$$\int_{-\frac{T}{2}+\alpha}^{\frac{T}{2}+\alpha} \phi_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \phi_X(t)\mathrm{d}t$$

式中 α 为任意常数，故

$$\phi_X(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vA\cos y}\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{j}vx} \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}\mathrm{d}x \tag{2}$$

比较式(1)和式(2)，可得 $X(t)$ 的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| < A \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 1.6 将例题 1.4 中的锯齿波过程作一点改动，使每个脉冲的幅度 A 为服从麦克斯韦(Maxwell)分布的随机变量

$$p_A(a) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}a^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{a^2}{2\alpha^2}\right), & a \geqslant 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

例题图 1.6 给出了一个典型的样本函数，其中 T_0 的定义和例题 1.4 相同。假设不同脉冲的幅度 A 之间统计独立，并均与 T_0 统计独立，求 $Y(t)$ 的一维概率密度 $p_Y(y)$。

解 根据独立性假设，对于任意时刻 t 可将 $Y(t)$ 表示为

$$Y(t) = AX(t)$$

其中 $X(t)$ 为例题 1.4 中的等幅锯齿波，幅度为 1。已知统计独立的随机变量之积的概率密度为

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} p_A(a) p_X\left(\frac{y}{a}\right)\mathrm{d}a$$