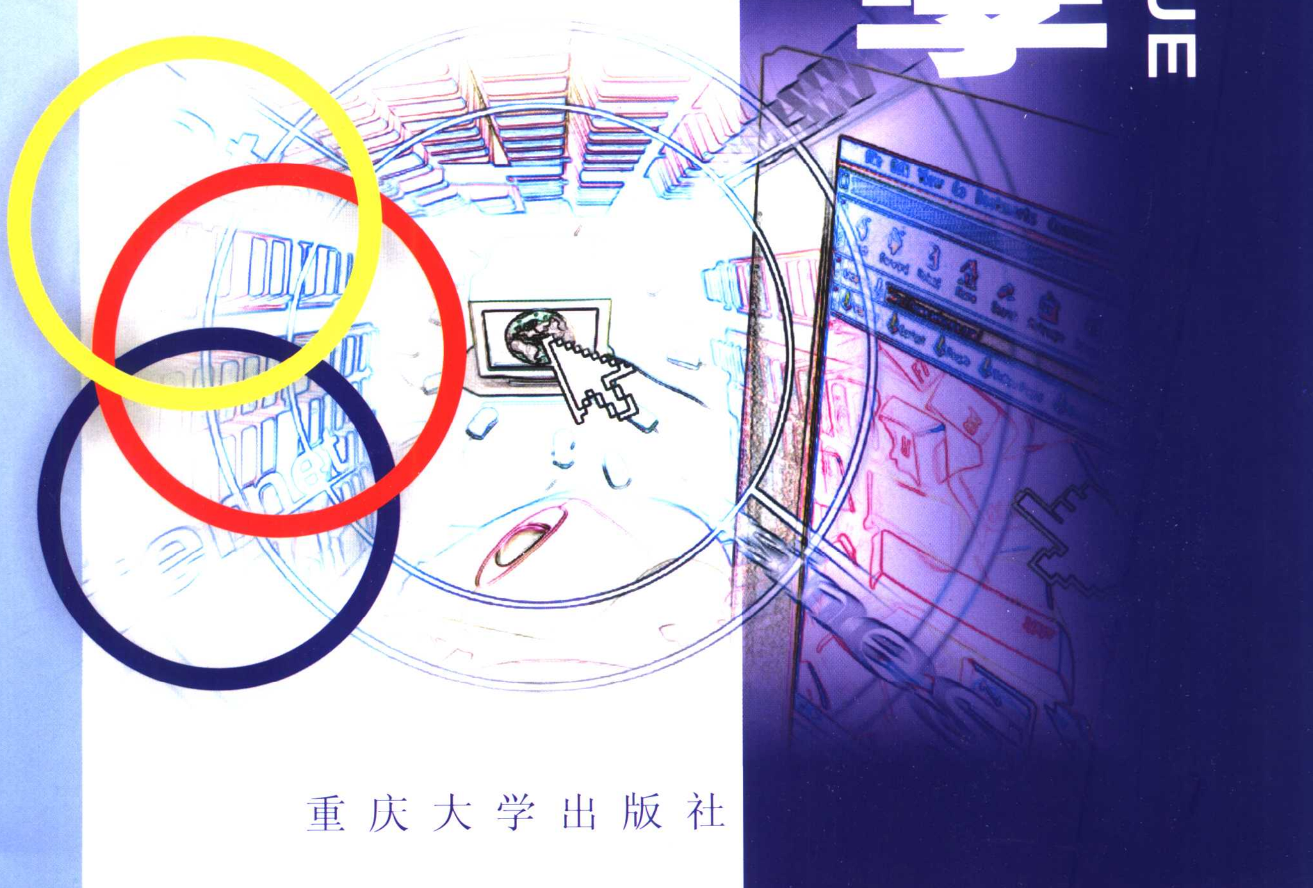
现代计算力学

XIANDAI JISUAN LIXUE

张汝清 吕恩琳 蹇开林 编著



重庆大学出版社

此书由重庆大学出版社教材专著出版基金资助出版

现代计算力学

张汝清　吕恩琳　蹇开林　编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书旨在介绍近十多年来,计算力学的研究成果。

全书共分 10 章。从一类变量体系出发,着重介绍对偶变量体系,辛数学方法,振动力学与波动力学。

从传统的位移元出发,系统地介绍杂交元、拟协调元、不协调元、理性元、无网格元、基于单位分解的无网格元、基于有限覆盖的无网格元和基于数值流行方法的有限元。

基于不确定性变量重点介绍摄动随机有限元法和模糊有限元法。

基于并行计算机重点介绍线性方程组与非线性方程组并行解法,力学中的 EBE 和 SBS 并行解法。

最后一章介绍神经网络在力学中的应用。

本书着重于理论和方法的扼要阐明,全面的分析,系统的讲述。适合于应用力学相关专业高年级本科生、研究生、青年教师及科技人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代计算力学/张汝清等编著. —重庆:重庆大学出版社,2004.8

ISBN 7-5624-3054-3

Ⅰ.现... Ⅱ.张... Ⅲ.计算力学 Ⅳ.0302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026663 号

现代计算力学

张汝清 吕恩琳 瞿开林 编著

责任编辑:谭 敏 版式设计:周永梅

责任校对:何建云 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:25.5 字数:633 千

2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5624-3054-3/O · 221 定价:36.00 元

前　言

当今计算力学有了巨大的进展,特别是近十多年来出现了许多新的研究成果。本书的主要内容就是体现这些当代新的成就,故名为**现代计算力学**。本书包含的新的进展体现在:

从传统的一类变量的 Lagrange 体系发展到二类变量的 Hamilton 体系,钟万勰院士把它称之为**对偶变量体系**,并指出它是**一公共理论体系**。他的专著[4~6]对对偶变量体系作了系统而完整的论述,建立了这个新体系开创性的成果。

- 有了对偶变量体系后,用于原单变量体系的线性空间、Euclidean 空间也不能完全适用了,就自然地发展到了辛空间,辛数学方法。
- 由于传统的位移元的不足,从力学的观点出发发展了杂交元,拟协调元,不协调元和理性元。近 10 年来,从完全数学的观点寻求好的近似子空间,发展出无网格有限元,基于单位分解和有限覆盖的有限元以及基于数值流行方法的有限元。
- 基于确定性变量的常规有限元法,把它拓广到不确定性变量的有限元法。当前摄动随机有限元法已得到广泛的应用。模糊有限元法已有了发展。
- 由于当今并行计算机的蓬勃发展,现有的各种串行算法已不能适用于并行计算机,并行求解方法也应运而生。线性方程组的并行解法也发展成熟。非线性方程组的并行求解方法已有大的发展。在计算力学中 EBE 和 SBS 都是十分有效的并行求解方法。
- 就力学问题的研究而言,也可视为寻求**输入**、**系统**、**输出**三者之间的关系。当今人工神经网络也成为**一种通用工具**,它就是表明输入、系统、输出三者之间的关系,所以很自然地能把神经网络应用到工程力学中来,它现已能有效地解决力学中某些特定的问题。

本书共分 10 章,第 8 章“模糊有限元法”由吕恩琳教授编著,第 10 章“神经网络及其在力学中的应用”,由蹇开林副教授编写。本书的后半部分主要是作者和同事们所作课题的总结,由于是新的领域,学习、认识、理解都不够,因而书中缺点和错误在所难免。敬请广大读者予以批评、指正。

本书承蒙黄宗明教授推荐,谨致以衷心的感谢。

张汝清

2003 年 8 月于重庆大学

目录

CONTENTS

第1章　绪　言

计算力学是当今力学通向应用与工程的必经之路，它又是一门具有广阔前景的学科。近十多年来，无论在理论方面、数学方法方面、应用领域方面，计算技术方面以及应用的计算机方面，甚至在非力学分析方法的引入方面、都有了巨大的发展，在各个方面都取得了许多惊人的成果，出现了新的变化。

1.1　对偶变量体系

以微分的或积分的普遍原理为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学体系的特征。值得指出的是，分析力学的一般方法，给出了**一个通用的分析框架**，它不仅对于研究各种力学问题，而且对其他的领域，比如控制理论、电磁理论、机电理论等研究都可一一对应地模拟而构成新的分析求解体系。

在分析力学中，独立坐标下的 Lagrange 方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.1}$$

方程的右端为广义力 Q_i，通常是 $t,q_k,\dot{q}_k(k=1,\cdots,n)$ 的已知函数：

$$Q_i=Q_i(t,q_k,\dot{q}_k) \tag{1.1.2}$$

Lagrange 方程(1.1.1)的左端，在完成$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$的运算之后，将包含时间 t，广义坐标 q_i，广义速度 $\dot{q}_i$ 和广义加速度 $\ddot{q}_i(i=1,\cdots,n)$。显然，Lagrange 方程(1.1.1)是一个包含 n 个二阶常微分方程的方程组，组中有 n 个依赖于独立变量 t 的未知函数 q_i。q_i 亦可称之为广义位移，所以，Lagrange方程描述的是一类变量体系，也可以说是位移法依据的求解体系。

1834 年英国数学家 Hamilton W. 提出了正则方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{\partial p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.3}$$

这个正则方程或称 Hamilton 方程，它是一个一阶常微分方程组。式中，$H(t,q_i,p_i)$ 为 Hamilton 所定义，称为 Hamilton 函数，它把 q_i,p_i 作为变量，所以，Hamilton 方程描述的是二类变量体系。因 q_i 和 p_i 与 Hamilton 函数相关联，p_i 和 q_i 可认为是对偶变量，故可称 Hamilton 体系为**对偶变**

量体系[4]。

从 Lagrange 方程到 Hamilton 方程的描述，是从一类变量 $\boldsymbol{q}$ 增加到二类变量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$，另一方面，从数学的角度来看，是从二阶常微分方程组降阶至一阶常微分方程组。即从变量来看是增加，从常微分方程组来看是降阶。所以，可把 Hamilton 方程称为**增元降阶方程**。从求解微分方程组的难易来看，低阶微分方程组的求解要比高阶微分方程组容易得多。而且，常微分方程组的基本理论也是奠基于一阶微分方程组的。由于 Hamilton 方程是一阶常微分方程组，分离变量法、本征函数展开法等行之有效的方法均可应用于求解 Hamilton 方程。

依据 Hamilton 原理，Hamilton 正则方程以及对偶理论，钟万勰院士作了开创性的工作，建立了别开生面的求解新体系。他的三部专著:《弹性力学求解新体系》[5]、《计算结构力学与最优控制》[6]、《应用力学对偶体系》[4]，对于对偶变量体系作了全面的、完整的、详细的论述。并指出它应是多门学科的**公共理论体系**。本书的前面几章将作扼要的介绍。

1.2 辛数学方法

Lagrange 体系(一类变量体系)的求解，从数学角度来看只涉及线性空间与 Euclidean 空间。因为在一类变量的实数域上只能定义出一个 **n 维抽象的线性空间 V**，在这个线性空间 V 中，任何向量 $\boldsymbol{a}$ 都可由其线性组合表示

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \tag{1.2.1}$$

则称$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$为 V 的一组基，简记为$(\boldsymbol{a}_i)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在基$(\boldsymbol{a}_i)$下的**坐标**。线性空间的许多性质和运算也都是通过一组基而最终转化为普通向量和矩阵的性质和运算的。

又由于线性空间中，向量之间的基本运算只有加法和数乘向量这两种线性运算，但线性运算不能描述向量的度量性质，如向量长度、正交等。为此，可借助于内积运算将度量概念引入到线性空间。对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 依一定法则对应着一个实数，这个实数称为**内积**，记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$。当然，这个内积运算应满足下列 4 个条件:

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$(当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$)　　(1.2.2a)

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$　　(1.2.2b)

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$($\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意向量)　　(1.2.2c)

(4) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$($k$ 为任意实数)　　(1.2.2d)

就称定义有这样内积的线性空间为 Euclidean **空间**，简称**欧氏空间**。

定义了内积之后，就可给出向量的模，正交及单位向量等欧氏空间有关度量的运算。

一切守恒的真实物理过程都能表示成 Hamilton 体系，即对偶变量体系。由于体系中是对偶变量，比如力和位移组成对偶变量，其对应分量的积具有功的量纲。此时就不能用一维实数域 R 上的线性空间 V 和 Euclidean 来运算和度量。所以，对于对偶变量体系就必然存在着另一类数学运算和变换的空间。

设 V 是实数域 R 上的一个 n 维线性空间，V'为其对应的 n 维对偶线性空间，定义

$$W = V\times V' = \left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix}\middle|\ \boldsymbol{q}\in V,\boldsymbol{p}\in V'\right\} \tag{1.2.3}$$

则此线性空间 W 是由 V 和 V' 组成的实数域 R 上的 $2n$ 维**相空间**。即可看成由对偶变量 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 组成的 $2n$ 维相空间。

这里要指出的是,线性空间 V 与 V' 具有完全不同的量纲,但是其对应分量的乘积应具有特定的物理意义。设在这个 $2n$ 维相空间中,任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 依一定法则对应着一个实数,这个数称为**辛内积**,记作 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$,且有 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = -\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$。若有向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 对 W 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均有 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,称定义有这样的辛内积的相空间为**辛空间**(Symplectic Space)。且任一向量与其自身的辛内积一定是零,即对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 有

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = \mathbf{0} \tag{1.2.4}$$

关于辛空间中的一些基本定义和运算,详见后面的 2.4 节。

从一类变量的 Lagrange 体系导向二类变量的 Hamilton 体系,从数学角度来看就从线性空间(Euclidean 空间)导向辛空间,在辛空间中的运算、度量和变换的这套方法,可称之为**辛数学方法**。

1.3 现代有限元

传统的位移元 传统的位移元,是在单元内假定位移场,通过最小势能原理建立有限元计算列式。只要假定的单元位移满足完备性和协调性要求,所建立的有限元就是收敛的。传统的位移元已得到十分广泛的应用。许多商品化的结构分析软件系统大多采用传统的位移元。其主要原因是因为它的列式简便,概念明确,计算可靠。它存在的问题是精度不高,抵抗网格畸变能力较弱,适应性差。

杂交元 传统的位移元,对于 C^0 连续性问题,满足完备性和协调性要求是容易的。但是,对于 C^1 连续性问题,满足完备性和协调性要求就比较困难了。如构造协调的三角形板元需要 21 参数 5 次幂级数,这样做既不经济也不必要。为了避开协调性要求,20 世纪 70 年代初,Pian T. H. H. 等通过在单元内假定应力场,由最小余能原理建立了**杂交应力元**,[63]。以及其他各种类型的杂交元。详见 3.2 节。

这类单元的优点在于其精度高,对网格畸变及各种问题的适应性强。然而,由于其列式复杂,使得单元难于建立,成功的单元仅限于简单形状单元。此外,这类单元计算效率低,可靠性差,有时会出现零能模式,从线性问题推广到非线性问题难以实现。

拟协调元 对于板元和壳元这类 C^1 连续性问题,要构造出协调的位移元是不容易的。因为对这类单元位移场难于满足完备性和协调性要求。即使构造出协调的位移元,这种单元也过于复杂,连续性太强,超出了实际需要。唐立民教授通过假定单元应变场建立了**拟协调元**。[76,77] 拟协调元具有良好的精度,在数学上也证明了拟协调元是收敛的。唐立民教授指出,单元与单元之间的完全协调是过分的强了,所以,建立拟协调元的前提是单元间位移弱连续条件,即拟协调条件。

传统的位移元是先给出单元的位移函数,然后对它求导得到惟一确定的应变,而拟协调元正好是相反的做法。即是先给出单元的应变函数,然后积分,所以它必然包括传统的位移函数作为它的特定的积分形式。

应变函数可以非常简单和明确地确定应变的自由度,刚性位移和秩。由线积分的近似作法,也简单而明确地给出了误差和精度。可明确地分辨出应变中哪些项是保证精度的,哪些项是作填充秩用的(详见3.3节)。

精化不协调元

传统的位移元是**协调元**。单元位移函数在单元间不满足协调条件的称之为**不协调元**。多数不协调元不能保证收敛。只有少数不协调元可以保证收敛或只在某些特殊网格下才收敛。在商品化的结构分析中大多采用位移协调元。相比之下,杂交元、拟协调元在精度和适应性上表现出明显的优越性,但至今仍未被商品化的软件所采用。究其原因有:

(1)位移元列式简单,计算效率高,适宜于建立单元族,容易从线性推广到非线性,便于程序设计。这是杂交元,拟协调元不能与之相比的。

(2)位移元可靠性好(即收敛性好)。相对于杂交元、拟协调元来讲,可靠性好是位移协调元的优点。

(3)位移协调元虽然能保证收敛但精度不高,在一些程序中,采用缩减积分来提高精度,又有可能破坏单元坐标的不变性,过分的缩减会导致出现多余零能模式或使解出现晃动现象。位移元的另一个突出的问题是适应性差。

不协调元由于放松了单元间连续性条件的限制,使得不协调元在单元函数的选择上拥有更大的空间,从而更容易建立**精度高的单元**。对于薄板、薄壳这样的结构,由于满足 C^1 连续性条件难于建立,不协调元在这一领域显得尤为重要。不协调元的缺点在于其收敛性难以保证,目前普遍采用分片试验来检验其收敛性。目前为止,在线性和非线性领域已发展了多种不同的方法来建立不协调元。值得强调的是陈万吉教授提出了**精化不协调元**[71~75],它是一种能保证收敛的不协调元,具有潜在的巨大的适用价值。

精化不协调元法的基本框架是精化直接刚度法。它继承了位移元原有的位移函数,为了保证收敛只需要修改影响收敛的部分。按力学变分原理只修改常应变部分,推导形式也非常简单,与直接刚度法相比,只是在应变中增加了常应变项,其余步骤与直接刚度法完全相同。因此,直接刚度法的优点全部保留下来,通过不协调部分的修正,保证了收敛。详见3.4节。

理性有限元 传统的位移元、杂交元、拟协调元和精化不协调元,都放弃了问题的解析解,直接基于变分原理,采用不同的场变量离散,实施各种多项式插值函数,以保证解的收敛性。可以说这些有限元着重于数学逼近。

钟万勰院士提出了**理性有限元**[80]。理性有限元是以弹性力学解为引导,直接在物理面内构造列式,再以数学方法逼近,可以使解得到很大的改善。详见3.5节。

无网格有限元 在有限元计算中,往往受到网格限制,每次计算前都要剖分网格,数据准备工作量大。近十年来,人们提出了**无网格方法**(meshless method),在无网格发展过程中,**无单元法**[81](element-free method)得到了较多的应用。

无网格方法只需要结点信息,而不需要单元信息。由于它勿需网格,不像传统的位移有限元存在着抵抗畸变能力弱,适应性差以及单元间存在着不协调等问题。又因为结点间不需要连接信息(无网格),精度高,其求解不仅函数级量连续,而且导数级量也连续。

无网格方法的基本思想,是将未知量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 看成 $\boldsymbol{x}$ 的空间变量,在整个求解域 Ω 内和边界 Γ 上,用一系列无关的结点和权函数来构造近似的函数 $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$。在得到这个近似函数之后,再用常规的有限元方法列式求解。权函数 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ 由 n 个结点 I 构成铃形形状,在 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{I}}$ 点处取最大

值，由近及远衰减，在影响域外为零。

现在应用较多的是**无单元 Galerkin 方法**（Element-Free Galerkin Method），简称 EFGM[85]。

基于单位分解有限元 这种有限元法亦属于无网格方法。它是用单位分解函数来构造有限元列式。单位分解有限元法（partition of unity Finite Element Method），简称 PUFEM，是在 1996 年由 Babuska 等[83]提出的。单位分解函数是建立在开覆盖域上具有紧支撑特性的"山形"（或称为"铃形"）函数。但是，在域内任意一点 x 处，所有单位分解函数的总和等于 1。这种方法亦具有无网格方法的优点，自由度全部定义在结点上，且不同的结点可以有不同的阶次的多项式。边界条件的处理与常规有限元法完全相同。

基于有限覆盖的有限元 单位分解和有限覆盖是无网格方法中十分重要的两个基本概念。这种有限元是采用滑动最小二乘法，构成单位分解函数，并在有限覆盖域上定义覆盖函数，组成场变量的总体近似函数。再利用常规有限元法，得到有限元整体方程。这样得到的有限元法亦属于无网格有限元法，它当然亦具有无网格方法的优点。

基于数值流行法的有限元 美籍华人学者石根华于上世纪 90 年代初从流行的概念提出一种数值流行方法（Numerical Manifold Method，简称 NMM），它是一种高度统一的数值方法。用连续的和非连续的有限覆盖系统把连续的和非连续的变形问题融为一体，统一解决了有限元、非连续变形分析和解析法的计算问题。目前在岩土工程中已得到了广泛应用。

数值流行方法是把有限覆盖系统集合在一起，用以覆盖全部材料，材料的总体形状，用局部覆盖所定义的函数来计算。这种方法用分开的且是独立的两套网格，即**数学网格**与**物理网格**。

数学网格可以是任何形状的，而物理网格是由材料的物理和几何性质所确定。把这两种网格重叠在一起，形成新的剖分裁剪，形成新的连续和非连续的供计算的有限覆盖系统，划分成流行意义上的单元，可称之为**流行单元**。在有了流行单元之后，就可在流行单元上，定义场变量近似函数，按常规有限元类似的方法建立有限元列式。所以这种方法，又可称之为**流行单元有限元法**。

1.4 摄动随机有限元法

有限元法已成功地得到了广泛的应用，而且，已从确定性变量拓广到非确定性变量。随机变量也就是非确定性变量。

随机分析方法有两类，一类是统计方法，另一类是非统计方法。

统计方法，需要进行大量的样本试验和数据处理工作，且计算工作量很大。

非统计方法，不需要进行大量的样本试验和数据分析，只要对输入信息有一些了解，比如某几阶数字特征，运用随机分析和数值分析方法，比如有限元法，就可求得各阶随机统计量的数字特征。当前，与有限元法相结合中，摄动随机有限元法应用得最多。

摄动方法是求解非线性问题近似解析解的有效方法，它源于天体力学。摄动原来是一个天文学上的名词，摄者引也，摄力即引力，摄动即引动。摄动法也称小参数法，因为摄动法总是依靠一个（或多个）量纲的小参数，它有时出现在方程内，有时出现在定解条件中，也可以人为