微积分全程辅导与提高

WEI JI FEN

张博 主编

- 内容提要及考点精要
- 知识结构图
- 常见题型及考研典型题精解
- 全面提高测试题
- 课后习题详解

西北工业大学出版社

微积分全程辅导与提高

主　编　张　博

编　者　勾明　张博　苏永利　张海

西北工業大學出版社

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

【内容简介】 本书是“微积分”教学参考用书，全书共九章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程。每章由“内容提要及考点精要”、“知识结构图”、“常见题型及考研典型题精解”、“全面提高测试题”、“课后习题详解”五部分组成。其目的是针对学生在学习过程中遇到的疑难问题以及财经类硕士研究生入学考试中的常考题型，通过典型例题的求解，引导学生掌握解题方法，提高解题能力。全面提高测试题则是为学生自我测试提供的；并对教材中的课后习题给出了详细解答。

本书内容与中国人民大学出版社出版的《微积分》（修订本，赵树嫄主编）教材配套，对学习财经类“微积分”的读者是一本很好的辅导教材，同时也可作为报考研究生的理想复习资料及“微积分”任课教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分全程辅导与提高/张博主编. 西安：西北工业大学出版社，2004.1

ISBN 7-5612-1706-4

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 108718 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：(029) 8493844
网 址：www. nwpup. com
印 刷 者：陕西友盛印务有限责任公司印刷
开 本：850 mm×1 168 mm 1/32
印 张：13.25
字 数：450 千字
版 次：2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～6 000 册
定 价：17.00 元

前　　言

微积分课程是高等院校的一门非常重要的基础课程，也是财经类专业硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助广大读者更好的学习该课程，并满足广大读者学习和考研的需要，我们根据多年的教学经验编写了这本书。

本书按照中国人民大学出版社出版的《微积分》（赵树嫄主编）的章节顺序，分为九章，每一章均设计了五个方面的内容。

一、内容提要及考点精要　列出了本章的基本概念、基本定理和公式、基本方法，突出本章的重点和难点。

二、知识结构图　用图表的形式，列出本章的重要内容，反映出各知识点之间的有机联系。

三、常见题型及考研典型题精解　从历年一些重点高校的期末试题以及历年财经类研究生入学统考试题中精选出一些典型试题，对其进行了分析解答，并对解题难点和容易出错的题目作了注释。

四、全面提高测试题　基础知识测试题及答案；考研训练模拟题及答案。这一部分是为读者检查学习

效果和应试能力而设计的，通过两级测试，读者可以进一步加深和巩固所学知识，增强解题的能力。

五、课后习题详解　对中国人民大学出版社出版的《微积分》（修订本）的课后习题全部做了详细解答。以供读者在学习过程中对照检查。

本书从指导课程教学、学习和应试的角度，通过对大量涉及内容广、类型多、技巧性强的题目进行详细分析和解答，进一步介绍了微积分的解题方法、解题规律和解题技巧。有助于读者理解基本概念和理论、提高分析问题的能力、开拓解题思路、掌握解题技巧、全面增强数学素质。对于课后习题，希望读者在学习过程中先独立思考，再对照检查，不要依赖于习题解答。

本书分别由勾明（编写第一、二章、第九章的一部分）、张博（编写第三、四章）、苏永利（编写第五、六章）、张海（编写第七、八、章、第九章的一部分）分工执笔编写，全书的图由苏永利绘制，由张博负责统稿。邢志栋教授和曹建荣副教授对本书进行了审阅。在此对他们表示感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2003 年 9 月于西北大学

目　　录

第一章　函　　数

一、内容提要及考点精要

(一)函数概念

1. 函数定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应法则 f,使每一个 $x \in D$ 都有惟一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

2. 函数的三要素

定义域、对应法则、值域.

3. 函数的性质

设函数 $f(x)$ 在 D 内有定义,则

(1) 有界性:对任意的 $x \in D$,存在 $M > 0$,使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

(2) 单调性:对任意的 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,

若 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,称 $f(x)$ 单调递增;

若 $f(x-1) \geqslant f(x_2)$,称 $f(x)$ 单调递减.

(3) 奇偶性:对任意的 $x, -x \in D$

若 $f(-x) = f(x)$,称为偶函数. 偶函数图形关于 y 轴对称;

若 $f(-x) = -f(x)$,称为奇函数. 奇函数图形关于原点对称.

(4) 周期性:对任意的 $x \in D$,存在 $L \in \mathbf{R}$,使得 $x + L \in D$,且使

$$f(x+L) = f(x)$$

4. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D,值域是 Z. 如果对于每个 $y \in Z$,存在惟一

的 $x \in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看做自变量，把 x 看做因变量，则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Z$$

并称之为 $y=f(x)(x \in D)$ 的反函数．

5．复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g．如果 $Z_g \cap D_f \neq \varnothing$，则称函数

$$y=f[g(x)], \quad x \in D=\{x \mid g(x) \in D_f\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，变量 u 称为中间变量．

6．初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数统称为基本初等函数．基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的可用一个解析式表示的函数称为初等函数．

二、知识结构图

- 函数
  - 定义
    - 定义域
    - 值域
    - 对应法则
  - 表示法
    - 解析法
    - 图形法
    - 表格法
  - 简单性质
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 复合函数
  - 反函数
  - 初等函数
  - 分段函数

三、常见题型及考研典型题精解

例 1－1 已知 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，写出它的定义域，并判断其奇偶性．

解法 1　对任意的 $x \in \mathbf{R}$,都有 $\sqrt{1+x^2} > |x|$, $|x|+x \geqslant 0$,所以

$$x+\sqrt{1+x^2} > x+|x| \geqslant 0$$

亦即对任意的 $x \in \mathbf{R}$,有

$$x+\sqrt{1+x^2} > 0$$

所以 此函数定义域为 $\mathbf{R}$.

解法 2　要使函数解析式有意义,须

$$x+\sqrt{1+x^2} > 0$$

即要使

$$\sqrt{1+x^2} > -x$$

当 $x \geqslant 0$ 时, $\sqrt{1+x^2} > 0 \geqslant -x$,不等式成立;

当 $x < 0$ 时,对不等式 $\sqrt{1+x^2} > -x$ 两边平方,可变形为同解不等式 $1+x^2 > x^2$,此不等式恒成立.

即 此函数定义域为 $\mathbf{R}$.

$$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2}-x) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} =$$

$$-\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

所以此函数为奇函数.

注释:本题求定义域时,充分应用绝对值的性质来解要比直接用定义方便.

例 1-2　确定函数 $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解　要使函数解析式有意义,必有

$$\begin{cases}\lg\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 0\\ \frac{5x-x^2}{4} > 0\end{cases},\quad \text{则}\quad \begin{cases}\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1\\ x(5-x) > 0\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}x^2-5x+4 \leqslant 0\\ 0 < x < 5\end{cases},\quad \text{所以}\quad \begin{cases}1 \leqslant x \leqslant 4\\ 0 < x < 5\end{cases}$$

即定义域为

$$1 \leqslant x \leqslant 4$$

例 1-3　(1992 年考研) 设 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$(　),其定义域为(　).

解

$$f[\varphi(x)] = \sin[\varphi(x)] = 1-x^2$$

令 $\varphi(x)=t$,则

$$f(t)=\sin t=1-x^2\Rightarrow t=\arcsin(1-x^2)$$

即
$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$$

要使此函数解析式有意义,须

$$|1-x^2|\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 2\Rightarrow |x|\leqslant\sqrt{2}$$

即 $\varphi(x)$ 的定义域为 $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

例 1-4 (1997 年考研) $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$, $(-\infty<x<+\infty)$ 是( ).

(A) 有界函数 (B) 单调函数

(C) 周期函数 (D) 偶函数

解 选(D). 这是因为

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$$

注释:此题主要考察三角函数的奇偶性、复合函数的奇偶性,由此可得一般性的结论:任一函数 $y=f(u)$ 与偶函数 $u=g(x)$ 的复合函数 $f[g(x)]$ 是偶函数.

例 1-5 设 $f(x)=\sqrt[n]{a-x^n}$ $(a>0,\ 0<x<\sqrt[n]{a})$,求(1) $f[f(x)]$; (2) $f(x)$ 的反函数.

解 (1) $f[f(x)]=\sqrt[n]{a-(\sqrt[n]{a-x^n})^n}=\sqrt[n]{a-a+x^n}=x$

(2) 令 $y=\sqrt[n]{a-x^n}$,则

$$x=\sqrt[n]{a-y^n}$$

将 x 与 y 字母互换,得 $f(x)$ 的反函数为

$$y=\sqrt[n]{a-x^n}$$

例 1-6 (1998 年考研) 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 因为 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$, $\varphi(x)\geqslant 0$,故

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得

$$1-x\geqslant 1,\quad 即\quad x\leqslant 0$$

所以
$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},\quad x\leqslant 0$$

例 1-7 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$,求 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant 1\\ 0 & |f(x)|>1\end{cases}$,现需求出 x 的范围. 由 $f(x)$ 的定义

知，对任意的 $x \in \mathbf{R}$，有

$$|f(x)| \leqslant 1$$

所以
$$f[f(x)] = 1$$

例 1-8　（1991 年考研）设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leqslant 0 \\ 2+x, & x > 0 \end{cases}$，$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $g[f(x)]$.

解　$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x) & f(x) \leqslant 0 \\ 2+f(x) & f(x) > 0 \end{cases}$，由 $f(x)$ 的定义有

当 $x < 0$ 时　　$f(x) = x^2 > 0$

当 $x \geqslant 0$ 时　　$f(x) = -x \leqslant 0$

则
$$g[f(x)] = \begin{cases} 2+x & x \geqslant 0 \\ 2+x^2 & x < 0 \end{cases}.$$

例 1-9　设 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$，求 (1) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$；(2) $f\{f[f(x)]\}$

解　(1) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = f(1-x) = \dfrac{1}{1-(1-x)} = \dfrac{1}{x} (x \neq 1, x \neq 0)$

(2) $f[f(x)] = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = 1 - \dfrac{1}{x}\quad (x \neq 1, x \neq 0)$

则 $f\{f[f(x)]\} = f\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = x,\quad (x \neq 1, x \neq 0)$.

例 1-10　证明 $f(x) = x - [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界周期函数.

证　当 $n \leqslant x < n+1$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，有

$$f(x) = x - [x] < n+1-n = 1$$

$$f(x) = x - [x] \geqslant n - n = 0$$

即 $0 \leqslant f(x) < 1$，所以 $f(x)$ 是有界函数.

对于任意的 $k \in \mathbf{N}$，因为

$$f(x+k) = x+k-[x+k] = x+k-([x]+k) = x-[x] = f(x)$$

所以 $f(x)$ 是以 $k(k \in \mathbf{N})$ 为周期的周期函数.

例 1-11　（1987 年考研）　函数 $f(x) = x\sin x$(　).

(A) 当 $x \to \infty$ 时为无穷小　　(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界　　(D) 当 $x \to \infty$ 时有有限极限

解　应选(C). 取点 $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \cdots$, 则

$$f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

可见 $f(x) = x \cdot \sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 上既无上界,也无下界.

取 $x_k' = k\pi$, 则　　$f(x) = 0$

说明 $f(x)$ 不是无穷大量.

四、全面提高测试题

Ⅰ. 必备知识测试题(一)及答案

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为闭区间 $[0, 1]$, 且 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, 那么函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是(　).

(A) $[-a, 1-a]$　　(B) $[-a, 1+a]$

(C) $[a, 1-a]$　　(D) $[a, 1+a]$

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg\sin x$ 的定义域是(　).

(A) $(0, 2]$　　(B) $[0, 1]$

(C) $[1, 2]$　　(D) $[-1, 1]$

(3) $f(x) = x^2\cos x$ 是(　).

(A) 偶函数　　(B) 奇函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 有界函数

(4) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 1 - x$, 则 $f[g(x)] = $ (　).

(A) $1 - \frac{1}{x}$　　(B) $1 + \frac{1}{x}$

(C) x　　(D) $\frac{1}{1-x}$

(5) 函数 $y = \sin(2x + 3\pi)$ 的最小正周期是(　).

(A) 2π　　(B)π　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi}{4}$

2. 已知 $f(x)=\frac{x}{1-x}\ (x\neq 1)$,证明:

$$f\left[\frac{f(x)}{f(x)+1}\right]=f(x).$$

3. 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$,求 $f(x)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ 在$(0,1)$内的有界性.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=e^x$, 则 $f[g(x)]=$ __________, $g[f(x)]=$ __________.

6. 已知 $f(x)=\cos x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,求 $\varphi(x)$.

7. 一列火车以初速度 v_0,匀加速度 a 出站,在速度达到 v_1 后,火车按匀速度运动前进;从出站经过 T 时间后,又以匀减速度 $2a$ 进站,直至停止. 写出火车速度 v 与时间 t 的函数关系式.

8. 如果 $f(x)$ 为以 2 为周期的函数,在$[0,2)$内, $f(x)=x^2$,请写出 $f(x)$ 在$[0,6]$内的表达式.

参考答案

1. C, A, A, D, B.

2. 证　因为 $\frac{f(x)}{f(x)+1}=\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x}+1}=x$

故
$$f\left[\frac{f(x)}{f(x)+1}\right]=f(x)$$

3. $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$.

4. 无界.

5. $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$, $g[f(x)]=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$