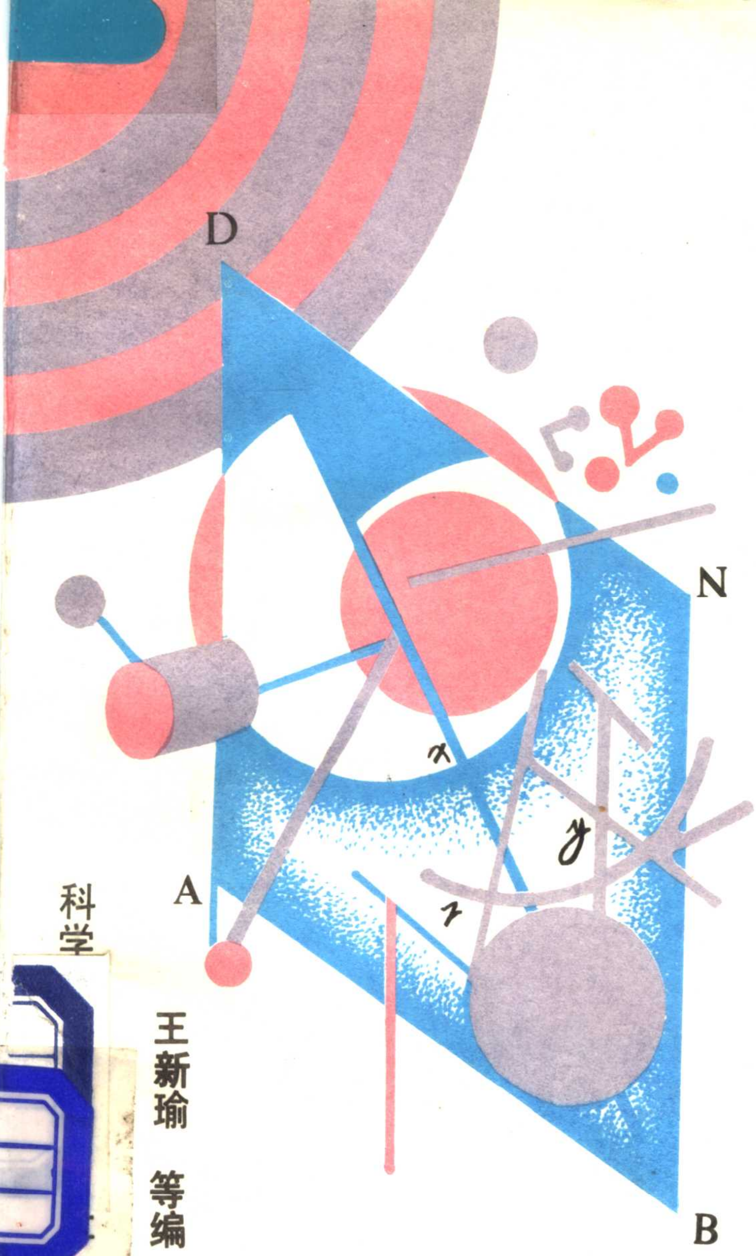
初中数学重难点知识精讲



王新瑜 等编

科学

初中数学重难点知识精讲

王新瑜　张连杰　王新莹　等编

科学技术文献出版社

内 容 简 介

《初中数学重难点知识精讲》一书是为了打好初中数学基础知识而编写的，其中包括代数、几何两大部分的基础知识，对于重点公式、定理、定义以及各种重点及难点都做了归纳与总结，并进行了精研讲解 学生利用较少时间，可有效掌握数学基础知识。

初中数学重难点知识精讲
王新瑜 等编
科学技术文献出版社出版
（北京复兴路15号）
北京龙华印刷厂印刷
新华书店科技发行所发行　　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　10印张　210千字
1991年2月第1版　　1991年2月第1次印刷
印数：1—40000册
科技新书目：264
ISBN 7—5023—1352—4　G·417
定　价：4.20

前　言

《初中数学重难点知识精讲》一书是对初中数学中重点知识，在结构上进行了剖析，揭示了知识的内在联系和概念的本质属性，便于学生全面、系统、准确地掌握好基础知识．对重点知识的应用．通过精选例题、练习以及对解题方法和思路的论述，使学生在运用知识、掌握解题规律的能力方面有所提高．

全书内容包括了代数、几何两部分，並在例题与练习中选入了部分中考题．可供学生复习时参考．

本书由王新瑜、张连杰、王新莹三位老师编写的．限于水平，书中难免有缺点和不足之处，恳请读者批评指正．

编者

1989年12月

目　　录

代数部分

平面几何部分

第一章　实　数

第一节　实数的有关概念

1．实数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

注意：（1）一切无限不循环小数都是无理数．

（2）整数和分数统称为有理数．一切有理数都可以用分子、分母为整数（分母不为零）的分数来表示．当分母为1时，它就是整数；零可以看作以零做分子，除零以外的其它整数做分母的分数；当分母不为1、分母不为零且分子与分母不可再约分时，它唯一表示一个分数．如果把分数表示成小数形式，那么一定是有限小数或无限循环小数．

（3）零是整数，但无正负之分．

（4）自然数即正整数，不包含零．

（5）有理数和无理数统称为实数．

2．数轴、相反数与绝对值的概念

（1）数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴.数轴上的全部点与全体实数建立了一一对应的关系.利用数轴可以形象地研究实数.

（2）相反数：实数 a 与 $-a$ 叫做互为相反数.零的相反数是零。数轴上与原点有等距离的两点所表示的数就是两个互为相反数.两个互为相反数 a 和 b 的特征是它们的和为零，即 $a+b=0$；反之，若 $a+b=0$，则 a 和 b 互为相反数.

（3）绝对值：数轴上某点到原点的距离就是该点所对应的数的绝对值.显然，一个正实数的绝对值就是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.

即

$$|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0), \end{cases}$$

由绝对值的定义可知，一个实数的绝对值是一个非负实数，即 $|a|\geqslant 0$.

3．倒数的概念

1除以一个数的商叫做这个数的倒数.零没有倒数.互为倒数的两个数 a 和 b 的特征是它们的积为1，即 $ab=1$；反之，若 $ab=1$，则 a 和 b 互为倒数.

4．实数大小的比较

在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数较大.

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个正数，绝对值较大的正数大；两个负数，绝对值较大的负数反而小.

例 1　选择题：

（1）0是　　　　（　　）

（A）正数；　　（B）负数；

（C）有理数；　　（D）自然数；

（2）$m+n$的相反数是：　　　　（　　）

（A）$m-n$；　　（B）$n-m$；

（C）$-m-n$；　　（D）$n+m$；

（3）若$|a|>a$，则a为：　　　　（　　）

（A）$a<0$；　　（B）$a>0$；

（C）a为有理数；　　（D）$a\leqslant 0$；

（4）若$|m|=|n|$，则m、n的关系是：（　　）

（A）$m=n$；　　（B）$m=-n$；

（C）$m=\pm n$；　　（D）上述答案都不对；

（5）若$\frac{x}{2|x|}=-\frac{1}{2}$，则$x$：　　　　（　　）

（A）$x>0$；　　（B）$x<0$；

（C）$x\geqslant 0$；　　（D）$x\leqslant 0$；

（6）若$a^2=|a|$，则a为：　　　　（　　）

（A）0；　　（B）0，1；

（C）0，± 1；　　（D）任何有理数；

解：（1）0不是正数，也不是负数，自然数不包含0，故应选C.

（2）$m+n$的相反数是：

$-(m+n)=-m-n$，故应选C.

（3）当$a\geqslant 0$时，$|a|=a$；

当$a<0$时，$|a|=-a>0$.

$\therefore -a > a$，即 $a < 0$.

故应选A.

（4）当 $m \geqslant 0$，$n \geqslant 0$ 时，$|m| = m$，$|n| = n$.

$\therefore m = n$；

当 $m \geqslant 0$，$n \leqslant 0$ 时，$|m| = m$，$|n| = -n$.

$\therefore$ 当 $m = -n$；

当 $m \leqslant 0$，$n \geqslant 0$ 时，$|m| = -m$，$|n| = n$.

$\therefore m = -n$；

当 $m \leqslant 0$，$n \leqslant 0$ 时，$|m| = -m$，$|n| = -n$.

$\therefore m = n$.

故应选C.

（5）$\because x \neq 0$，

$\therefore$ 不能选C、D.

当 $x > 0$ 时，$|x| = x$，$\dfrac{x}{2|x|} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 不能选A.

故应选B.

（6）将0，1，-1代入 $a^2 = |a|$ 两边，

满足此等式，故应选C.

另解:（6）当 $a \geqslant 0$ 时，$|a| = a$.

$\therefore a^2 = a$. 即 $a^2 - a = 0$.

由此可得 $a(a-1) = 0$.

$\therefore a = 0$，$a = 1$.

当 $a < 0$ 时，$|a| = -a$.

$\therefore a^2 = -a$. 即 $a^2 + a = 0$.

由此可得 $a(a+1) = 0$.

$\therefore a=0$，$a=-1$.

即 $a=-1$.

$\therefore a=0$，$a=1$，$a=-1$.

故应选C.

例2 填空题：

（1）$-3\frac{1}{2}$的相反数是______，$-3\frac{1}{2}$的倒数是______，$-3\frac{1}{2}$的绝对值是______；

（2）$-\frac{3}{4}$的相反数的倒数是______，______的倒数的相反数是$-\frac{2}{3}$；

（3）最小的正整数是______，最小的整数是______，最大的负整数是______；

（4）零的相反数是______，零的绝对值是______，零的倒数是______；

（5）______的相反数是它本身，______的绝对值是它本身，______的倒数是它本身，________的绝对值是它的相反数，______的相反数小于它本身，______的绝对值大于它本身；

（6）当a是什么数时，下列各式成立：

①$a=-a$______；

②$|a|=-a$______；

③$\frac{a}{|a|}=-1$________；

④ $\left|a-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$______.

解：（1）$-3\frac{1}{2}$的相反数是$-\left(-3\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}$.

$-3\frac{1}{2}$的倒数是$1\div\left(-3\frac{1}{2}\right)=1\div\frac{7}{2}=\frac{2}{7}$.

$-3\frac{1}{2}$的绝对值是$\left|-3\frac{1}{2}\right|=3\frac{1}{2}$.

故应填$3\frac{1}{2}$，$\frac{2}{7}$，$3\frac{1}{2}$.

（2）$-\frac{3}{4}$的相反数的倒数是

$$1\div\left[-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]=1\div\frac{3}{4}=\frac{4}{3}.$$

数 a 的倒数的相反数是$-\frac{1}{a}$.

由$-\frac{1}{a}=-\frac{2}{3}$，得$a=\frac{3}{2}$.

故应填$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$.

（3）最小的正整数是 1，没有最小的整数，最大的负整数是 −1，故应填 1，没有，−1.

（4）零的相反数是零，零的绝对值是零，零没有倒数。故应填 0，0，没有.

（5）零的相反数是它本身，零的绝对值是零，正数的绝对值是它本身，1 和 −1 的倒数是它本身，负数的绝对值

是它的相反数，正数的相反数小于它本身，负数的绝对值大于它本身．故应填 0， 0及正数， 1和－1，负数，正数，负数．

（6）①由于零的相反数是零，故 $a=0$；

②负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零，故 $a \leqslant 0$．

③∵$a \neq 0$，且当 $a<0$ 时，$|a|=-a$，

$a<0$．

④由 $a-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$，得

$a=0$ 或 $a=1$．

例3　回答下列问题：

（1）a一定是正数吗？－a一定是负数吗？

（2）若a是正数，$a+|a|=?$ $a-|a|=?$

（3）若a是负数，$a+|a|=?$ $a-|a|=?$

解：（1）因a本身可以是正数，也可以是负数，所以a不一定是正数，－a不一定是负数．

（2）当 $a>0$ 时，$|a|=a$．

$\therefore a+|a|=a+a=2a$，

$a-|a|=a-a=0$．

（3）当 $a<0$ 时，$|a|=-a$．

$\therefore a+|a|=a-a=0$，

$a-|a|=a-(-a)=a+a=2a$．

例4　计算　$|a+1|+|a-|$．

分析：要计算 $a+1$ 与 $a-1$ 的绝对值的和，需要先判

断$a+1$与$a-1$是正数还是负数．$a+1$的值的正负可由a大于还是小于-1来决定，$a-1$的值的正负可由a大于还是小于1来决定．因此，应该分$a<-1$，$-1\leqslant a<1$和$a\geqslant 1$三种情况，分别计算两绝对值的和．

解：当$a<-1$时，

原式$=-(a+1)-(a-1)=-2a$；

当$-1\leqslant a<1$时，

原式$=a+1-(a-1)=2$；

当$a\geqslant 1$时，

原式$=a+1+a-1=2a$．

即

$$|a+1|+|a-1|=\begin{cases}-2a & (a<-1),\\ 2 & (-1\leqslant a<1),\\ 2a & (a\geqslant 1).\end{cases}$$

练习一

1．当a是什么数时，下列各式成立：

（1）$a=-a$；（2）$|a|=-a$；

（3）$\dfrac{a}{|a|}=-1$；（4）$\left|a-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$．

2．下列各数中，哪两个互为相反数？哪两个互为倒数？哪两个互为负倒数？

$\sqrt{2}-1$，$\lg 3$，4，$\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$，$0.25$，

$\sqrt{5}-2$，$\sqrt{5}+2$，$\sqrt[3]{5}$，$1-\sqrt{2}$．

3．已知a、b为实数，且$(2a+1)^2+\dfrac{1}{2}|b+1|$

$= 0$，求实数 (a^3+b^{12}) 的倒数的相反数是多少？

4．比较下列各组数的大小：

（1）$-\frac{6}{7}$，$-\frac{7}{8}$，-0.9；

（2）π，3.1415，$\frac{22}{7}$.

第二节　实数的运算

1．实数的运算

（1）加法：同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值；互为相反数相加得零；一个数同零相加，仍得这个数．

（2）减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数．

（3）乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；任何数同零相乘，都得零．

（4）除法：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；零除以任何一个不等于零的数都得零．

（5）乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方．即

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}} = a^n.$$

相同的因数 a 叫做底数，相同因数的个数 n 叫做指数，a^n 叫做 a 的 n 次幂．

正数的任意次幂是正数；负数的偶次幂是正数，负数的奇次幂是负数；零的任意次幂是零．

（6）开方：如果$x^n=a$，那么x叫做a的n次方根（n是大于1的整数）．求a的n次方根的运算叫做把a开n次方．其中a是被开方数，n是根指数．如果$n=2$，那么x叫做a的二次方根或平方根；如果$n=3$，那么x叫做a的三次方根或立方根．

正数的偶次方根有两个，它们互为相反数；负数没有偶次方根；零的偶次方根是零．正数的奇次方根是一个正数；负数的奇次方根是一个负数；零的奇次方根是零．

正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根，记作$\sqrt[n]{a}$．零的n次算术根是零．正数a的正的平方根，叫做a的算术平方根（简称算术根）．零的算术平方根是零．对于算术平方根，有

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

2．实数的运算定律

（1）加法交换律：$a+b=b+a$；

（2）加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

（3）乘法交换律：$ab=ba$；

（4）乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

（5）乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$．

3．实数的混合运算法则

（1）在实数混合运算中，如果没有括号，应该首先进行第三级运算（乘方和开方），然后进行第二级运算（乘法和除法），最后进行第一级运算（加法和减法）；如果有括号，一般应先进行括号里面的运算，并且按照小括号、中括号、大括号的顺序进行运算．

（2）如果只有同一级运算，就从左到右依次运算.

（3）根据运算定律可以变更以上所述的运算顺序.

例1 计算 $\left\{\left[3\frac{1}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}\right]\div\left(-\frac{1}{6}\right)-20\right\}\times\left|5\div(-6)\right|$.

解：原式 $=\left\{\left[\frac{10}{3}\times(-4)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\times(-6)-20\right\}\times\frac{5}{6}$

$$=\left\{\left[-\frac{40}{3}+\frac{1}{3}\right]\times(-6)-20\right\}\times\frac{5}{6}$$

$$=\{[-13]\times(-6)-20\}\times\frac{5}{6}$$

$$=\{78-20\}\times\frac{5}{6}$$

$$=58\times\frac{5}{6}$$

$$=48\frac{1}{3}.$$

例2 已知x、y、z为实数,且 $|x-2|+\sqrt{(y+4)^2}+(z+3)^2=0$，求 $3x+4y-5z$ 的值.

解：由 $|x-2|+\sqrt{(y+4)^2}+(z+3)^2=0$，有

$$|x-2|+|y+4|+(z+3)^2=0.$$

∵x、y、z为实数，

$\therefore |x-2| \geqslant 0$， $|y+4| \geqslant 0$， $(z+3)^2 \geqslant 0$.

$\therefore \begin{cases} x-2=0, \\ y+4=0, \\ z+3=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=-4, \\ z=-3. \end{cases}$

$\therefore \quad 3x+4y-5z$

$=3\times2+4\times(-4)-5\times(-3)$

$=6-16+15$

$=5$.

练习二

1．计算 $[-3\times(-\frac{2}{3})^2-2^2\times0.125-(-1)^4\div\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}]\div|2\times(-1\frac{1}{4})^2-3\frac{5}{8}|$.

2．已知 $2<x<5$，化简

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-5)^2}.$$

3．计算 $\sqrt{5}+\frac{1}{7}-(4.375-\frac{4}{3})$，使它的结果精确到0.01.