中学数学奥林匹克丛书

初等数论

初中册

ZHONGXUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主　编：梅向明
副主编：张君达

北京师范学院出版社

初等数论

中学数学奥林匹克丛书

初等数论

（初中册）

主编 梅向明 副主编 张君达

作者 张君达 罗晓沛

北京师范学院出版社

1988年·北京

主　编：梅向明
副主编：张君达
编　委：（以姓氏笔划为序）
何裕新　张君达　周春荔
赵大悌　唐大昌　梅向明

中学数学奥林匹克丛书

初等数论

（初中册）

主编：梅向明　副主编：张君达

作者：张君达　罗晓伟

*

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：5.75　字数：123千

1988年12月北京第1版　1988年12月北京第1次印刷

印数：00,001-13,000册

ISBN 7-81014-173-2/G·163

定价：1.80元

前　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年)，这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届“国际数学竞赛”，简称IMO(International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多。这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛。1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在

IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校。三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》。希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有许多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们，以及广大的专家和读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目　　录

第一章　数的整除性……………………………………………1
§1　奇数与偶数……………………………………………1
§2　整除的基本性质……………………………………………8
习题一……………………………………………18
第二章　整数的拆分……………………………………………19
§1　质数与合数……………………………………………19
§2　最大公约数与最小公倍数……………………………………………26
习题二……………………………………………36
第三章　解析式的整除与数论函数……………………………………………38
§1　完全平方数……………………………………………38
§2　整值多项式与整值解析式……………………………………………47
§3　正约数的个数与正约数的和……………………………………………57
§4　高斯函数与圆内的整点……………………………………………62
习题三……………………………………………68
第四章　不定方程……………………………………………70
§1　一次不定方程……………………………………………70
§2　勾股数……………………………………………79
§3　一些特殊不定方程的解法……………………………………………84
习题四……………………………………………97
第五章　同余……………………………………………99
§1　同余的定义、性质与应用……………………………………………99

§ 2　一次同余式……………………………………………………110
§ 3　一次同余式组与中国剩余定理……………………………117
§ 4　费尔马小定理………………………………………………124
习题五 ……………………………………………………………127
附录　本书习题提示与解答 ……………………………………129

第一章　数的整除性

我们知道所谓整数是指象

$$\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

这样的数。在整数范围内，显然有

整数＋整数＝整数；

整数－整数＝整数；

整数×整数＝整数。

但是整数除以整数不一定得整数。究竟什么样的整数除什么样的整数才得整数？研究这个问题，就是要研究整数的整除性。

§1　奇数与偶数

定义　设 a，b 是整数，$b \neq 0$。如果有一个整数 q，可使 $a=bq$，那么 b 叫做 a 的约数，a 叫做 b 的倍数。有时也说，b 能整除 a 或 a 能被 b 整除，记作

$$b \mid a.$$

如果 b 不能整除 a，就写作 $b \nmid a$。

想一想下面的问题：

（1）什么整数是任何整数的倍数？什么整数是任何整数的约数？

（2）对于整数 a，b，如果 $|a|<|b|$，并且 $|b| \mid a$，那

么这样的 a 有几个？是什么？

我们把能够被 2 整除的数

$$0, \ \pm 2, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \cdots$$

叫做偶数。偶数可表示为 $2k$ 的形式，其中 k 为整数。正偶数 2，4，6，8，…叫做双数。双数可表示为 $2k$，其中 k 是正整数。

我们把不能被 2 整除的数

$$\pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \cdots$$

叫做奇数。奇数可表示为 $2k+1$ 的形式，其中 k 为整数。正奇数 1，3，5，7，…叫做单数。单数可表示为 $2k+1$，$k=0$，1，2，…，或 $2k-1$，$k=1$，2，3，…。

常用的奇数与偶数的运算性质有以下几条：

性质1 偶数±偶数＝偶数；奇数±奇数＝偶数；

偶数±奇数＝奇数；

奇数个奇数的和是奇数；

偶数个奇数的和是偶数。

性质2 奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；

偶数×偶数＝偶数。

性质3 如果一个偶数能被奇数整除，那么其商必是偶数。

这些性质都可以直接运用奇、偶数的定义证明。从这些性质出发，还可以证明一些常用的结论。如“两个连续整数的积 $n(n-1)$ 是偶数”，“$a \pm b$ 与 $a^n \pm b^n$ 的奇偶性相同”等等。

例1 平面上有 15 个点，任意三点都不在一条直线上。试问：能不能从每个点都引三条线段，且仅引三条线段和其余的某三点相连？证明你的结论。

证明 如果某点A与某点B连线段，那么同时点B也与点A连这同一线段。平面上共有15个点（任意三点不共线），总共所连线段数是

$$\frac{15\times 3}{2}=\frac{\text{奇数}}{2}.$$

这是不可能的。因此不可能从每点都引且仅引三条线段与其余三点相连。

说明：例1可以转化为一类具有相同解题思路的问题。例如，求证：17个同学聚会，不可能每人和且仅和其余三人握手。

例2 已知一奇数β，使得整系数二次三项式

$$ax^2+bx+c$$

的值$a\beta^2+b\beta+c$也是奇数，其中c是奇数。求证：方程

$$ax^2+bx+c=0$$

没有奇数根。

证明 因为c是奇数，并且$a\beta^2+b\beta+c$是奇数，因此

$$a\beta^2+b\beta=\beta(a\beta+b)$$

是偶数。由于β是奇数，因此$a\beta+b$是偶数。又由于β是奇数，因此a与b必须同奇或同偶。

要证明二次方程$ax^2+bx+c=0$没有奇数根，仅须证明：对任意的一个奇数β'，都有

$$a\beta'^2+b\beta'+c\neq 0$$

即可。

其实，由于a与b同奇或同偶，对任意一个奇数β'，总有$a\beta'+b$是偶数。由此

$$\begin{aligned}a\beta'^2+b\beta'+c&=\beta'(a\beta'+b)+c\\&=\text{偶数}+\text{奇数}\neq 0.\end{aligned}$$

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇数根。

说明：要证明方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有奇(偶)数根，仅须证明对任意的一个奇（偶）数β，总有 $a\beta^2+b\beta+c\neq0$ 即可。运用数的奇偶性可以解决这样一类问题，例如，从方程 $2x^2-5y^2=7$ 推出 y 是奇数，令 $y=2k-1$，$k\in Z^+$*，从而证明原方程没有整数解。

例3 圆周上有1989个点，给每一个点染两次颜色：或红、蓝，或全红，或全蓝。最后统计知：染红色1989次，染蓝色1989次。

试证　至少有一点被染上红、蓝两种颜色。

证明　假设没有一点被染上红、蓝两种颜色，即第一次染红(蓝)，第二次仍染红(蓝)。不妨令第一次有 m 个点（$0\leqslant m\leqslant1989$）染红，第二次仍有且仅有这 m 点染红，即有 $2m$ 个红点。但是

$$2m\neq1989.$$

所以至少有一点被染上红、蓝两种颜色。

例4 已知 $2n$ 个整数：x_1，x_2，…，x_n；y_1，y_2，…，y_n，并且有

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=\cdots\cdots=(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2=c$$

其中 c 是一固定的自然数。求证：仅当 n 为偶数时，才有上式成立。

证明　令
$$X_1=x_1-x_2,\quad Y_1=y_1-y_2;$$
$$X_2=x_2-x_3,\quad Y_2=y_2-y_3;$$
$$\cdots\qquad\qquad\cdots$$
$$X_n=x_n-x_1,\quad Y_n=y_n-y_1.$$

---

* "∈"读作属于，$k\in Z^+$表示 k 是自然数。

由此有

$$X_1+X_2+\cdots+X_n=0 \qquad ①$$

$$Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=0 \qquad ②$$

$$X_1^2+Y_1^2=X_2^2+Y_2^2=\cdots=X_n^2+Y_n^2 \qquad ③$$

由③式可见，如果每一对 X_i，Y_i 都是偶数，那么总可以用它们的最大公约数2^m遍除③式，而将其约简成每一对 X_i，Y_i 至少有一个奇数(这时①，②式仍旧成立)。

不妨假定每一对 X_i，Y_i 中至少有一个奇数，因而其平方和 $X_i^2+Y_i^2=c$（$i=1$，2，$\cdots$，n）仅能是如下形式：

$$(2h)^2+(2m+1)^2=4k+1$$

或 $$(2h+1)^2+(2m+1)^2=4k+2,$$

其中 h，m，$k\in Z$。

当 $c=4k+2$ 时，所有的 X_i，Y_i 都必为奇数。由①、②知仅有偶数个奇数的和才能等于零。因此，n 为偶数。

当 $c=4k+1$ 时，每一对X_i，Y_i 必一奇一偶。不妨假定①式中前$2h$ 个 X_i 为奇数，则剩下的 $n-2h$ 个为偶数(如果不是偶数个 X_i，而是奇数行不行？)。但与这些偶数个 X_i 相对应的 Y_i 恰为奇数，由②知这些奇数 Y_i 的个数必是偶数$2m$(否则②式不能成立)。由此$2m=n-2h$，故

$$n=2(m+h)$$

是偶数。

说明：在掌握了平面上两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ 的距离公式 $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 以后，本题可以变更为：已知平面上任意一条所有顶点都是格点的闭折线，且各节线段长度相等。求证：折线的节数必为偶数。

例5 线段 AB 的两个端点，一个标以红色，一个标以蓝色。在线段中间插入 n 个分点，每个分点随意标上红色或

蓝色，这样分得 $n+1$ 个不重叠的小线段。如果把两端点颜色不同的线段叫做标准线段，试证：标准线段的个数是奇数。

证明 当线段 AB 中插入一个点时，无论这点是红色还是蓝色，标准线段的条数仍是 1，即标准线段增加零条。以后插入的点共分两种情况：如插入标准线段中，则标准线段的条数不增加；如插入非标准线段中，则插入点与端点同色时，不增加标准线段的条数，插入点与端点不同色时，增加两条标准线段。这样，每新插入一个点，标准线段的条数或增加零条，或增加两条。

因此，如果假设使标准线段增加 2 条的点有 m 个，那么总的标准线段的条数

$$1+2m+(n-m)\cdot 0=2m+1$$

是奇数。

例6 设有 n 盏亮着的拉线开关灯，规定每次必须拉动 $n-1$ 个拉线开关。试问：能否把所有的灯都关闭？证明你的结论或给出一种关灯的办法。

分析：先从简单情况想起：当 $n=1$ 时，显然不行；当 $n=2$ 时，1 号灯不动，2 号关上，2 号灯不动，1 号关上，可行。当 $n=3$ 时，每盏灯拉动奇数次才能关上，3 个奇数的和仍是奇数，而 $n-1=2$，按规定总拉动开关次数是偶数。因此不能把灯全部关闭。由此猜测当 n 为偶数时可以，当 n 为奇数时不行。

证明 （1）当 n 为奇数时，每盏灯需拉动开关奇数次才能关闭，因此要把全部灯关闭，总拉动开关次数应是奇数个奇数的和，是奇数。但 $n-1$ 是偶数，按规定只能拉动任意的偶数次开关，故无论如何不能把全部亮着的灯关上；

（2）当 n 为偶数时，把 n 盏灯编序为 1，2，3，…，

n。仅需如下操作：

第一次：1号灯不动，拉动其余开关；

第二次：2号灯不动，拉动其余开关；

……

第 n 次：n 号灯不动，拉动其余开关。

这样，每盏灯拉动 $n-1$ 次，即奇数次，因此可以用这种办法把全部的亮灯关闭。

说明：类似地，"把倒扣的酒杯翻过来"等问题都可以采用本题的解题思路去解决。

例7 如果两人互相握手，则每人都记握手一次。求证：握手是奇数次的人的总数一定是偶数。

分析：初看，似乎这问题还缺一个条件，因为并没有给出有多少人在握手。由于问题只涉及到数的奇偶性质，因此握手的人数是无关紧要的。

证明 无论多少人握手，握手次数总和一定是偶数。由于握手是偶数次的人的握手次数总和一定是偶数，因此握手是奇数次的人的握手总和也一定是偶数。

把握手次数是奇数的人分为两类：

一类是偶数个人握相同奇数次，如4人握3次等，其总和是偶数，记为偶$_{总}$；

一类是奇数个人握相同奇数次，如7人握5次等，其总和记为奇$_{总}$。

由于握手奇数次的人的握手次数总和是偶数，且

$$总和=偶_{总}+奇_{总},$$

即有

$$偶数=偶数+奇_{总}。$$

因此，奇$_{总}$应是偶数。只有偶数个奇数的和才等于偶数，所以

奇$_a$应有偶数项。这就是说握相同奇数次的奇数个人应有偶数组，因此它的人数总和是偶数。

由于两类的人数都是偶数，因此握手次数是奇数次的人数总和一定是偶数。

练 习 一

1. 已知一个偶数β，使得整系数二次三项式
$$ax^2+bx+c$$
的值$a\beta^2+b\beta+c$是奇数。求证：方程
$$ax^2+bx+c=0$$
没有偶数根。
2. 设有四个自然数之和为1989，求证：它们的立方和不能是偶数。
3. 把1，2，3，…，1987任意颠倒顺序后构成一个新的排列a_1，a_2，…，a_{1987}。求证：
$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{1987}-1987)$$
永远是偶数。
4. 试证：找不到二个自然数，使其差与和的乘积等于1990。
5. 有一个自身相交的闭折线，已知：它每一节相交一次。求证：这个闭折线的节数是偶数。

§2 整除的基本性质

根据§1中整除的定义，不难证明以下的基本性质。

定理1 若$c\mid b$，$b\mid a$，则$c\mid a$。

推论 若$b\mid a$，且m是整数，则$b\mid am$。

定理2 设m是非零整数，由此有

（1）若 $b\mid a$，则 $bm\mid am$；

（2）若 $bm\mid am$，则 $b\mid a$。

定理3 设整数 $n\geqslant 2$。若 $d\mid a_1$，$d\mid a_2$，…，$d\mid a_n$，则

$$d\mid(\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n).$$

推论 若在 a_1，a_2，…，a_n 中仅有一个不是 d 的倍数，则它们的代数和也不是 d 的倍数。

证明 设仅有 $d\nmid a_n$。令

$$s=\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n,$$

即有

$$\pm a_n=s\mp a_1\mp a_2\mp\cdots\mp a_{n-1}.$$

用反证法。假设 $d\mid s$，由定理3可得 $d\mid\pm a_n$。这与假设仅有 $d\nmid a_n$ 矛盾，所以 $d\nmid s$。

定理4 若 a，b 是整数，$b\neq 0$，则有且仅有一对整数 q，r，可使

$$a=bq+r\qquad(0\leqslant r<|b|)$$

成立。

证明 若 $b>0$，则 b 的倍数从小到大列出是

$$\cdots,-3b,-2b,-b,0,b,2b,3b,\cdots$$

若 $b<0$，则 b 的倍数从小到大列出是

$$\cdots,3b,2b,b,0,-b,-2b,-3b,\cdots$$

先证 q，r 是存在的。其实，

当 a 是 b 的倍数时，即存在一对整数 q，0，使得 $a=bq+0$；

当 a 不是 b 的倍数时，若 $b>0$，存在一个整数 q，使得 $qb<a<(q+1)b$；若 $b<0$，存在一个整数 q，使 $qb<a<(q-1)b$，即有一对整数 q、r，使得

$$a=bq+r\qquad(0\leqslant r<|b|)\qquad①$$