高中文化广播电视讲座

数学

下 册

江苏人民出版社

高中文化广播电视讲座

数学

下册

扬州地区《数学》编写组

江苏人民出版社

高中文化广播电视讲座

数　学

下册

扬州地区《数学》编写组

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　扬州印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张10　字数220,00

1981年12月第1版　　1981年12月第1次印刷

印数1—53,000册

书号：7100·139　　定价：0.69元

前　　言

这本《高中文化广播电视讲座（数学）》是受江苏省教育厅委托，根据《全日制十年制学校数学教学大纲(试行草案)》的要求和现行中学数学通用教材的内容编写的。做为电视讲座教材，也可供社会青年和在职职工自学使用。

本书共二册，分代数、平面几何、立体几何、三角、解析几何、导数与微分以及总习题等七个部分。在编写过程中，我们注意了：(1)重视分析、培养分析问题和解决问题的能力。(2)针对学生在练习中易错和易忽略等薄弱环节，通过说明部分叙述清楚，以利于进一步理解和掌握教材，并增强准确和灵活应用知识的能力。(3)适当地多选了一些例题，使读者有所借鉴，并对一些特殊题，介绍一题多解，拓宽读者的眼界。

本书由省特级教师黄久征同志主编，扬州师范学院黄应韶、许仲芪两位副教授审阅。参加编写的同志有（以姓氏笔划为序）：王天白、吴吉昌、陈华卿、陈咸豪、陆丕文、张世观、张国富、封元广、项复民、钱惠珍、蔡培。由于水平有限、时间仓促，缺点错误在所难免，恳请批评指正。

高中文化广播电视讲座

扬州地区《数学》编写组

一九八一年十月

目　　录

平 面 三 角

一、任意角的三角函数及其基本性质

（一）角的概念的推广（大于360°的正角和负角）

1．角的定义：角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的，角的大小由旋转量的大小来决定。

2．正角、负角和零角。

正角：按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角。

负角：按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角。

零角：当一条射线没有作任何旋转，也把它看成一个角叫零角。

3．角的度量。

（1）角度制：

$$1\text{ 周角}=360°,\quad 1°=60',\quad 1'=60''$$

（2）弧度制：

我们把等于半径长的园弧所对的园心角叫做一弧度的角。

用弧度表示角的大小不写单位名称，弧度制使得每一个角对应于一个实数，反过来也是一样；即构成一个从任意角的集合到实数集合的一一对应。

（3）角度制与弧度制的相互关系和换算。

$$\pi\text{弧度}=180°,\qquad 1\text{ 弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45'',$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{弧度} \approx 0.01745\text{弧度。}$$

（4）弧度制中、园心角、半径和弧长的关系。

设园的半径为R，弧长为l，园心角的弧度数为α

则： $\alpha = \dfrac{l}{R}$， $l = R\alpha$， $R = \dfrac{l}{\alpha}$， $(\alpha \neq 0)$

（5）终边相同的角：具有共同的始边与终边的角，叫做终边相同的角。

一般地所有和α角终边相同的角，连同α角在内可以用式子$K360^\circ + \alpha$。$K \in J$。（α为角度数）。成$2k\pi + \alpha$，$K \in J$（α为弧度数）来表示。

（二）任意角的三角函数：

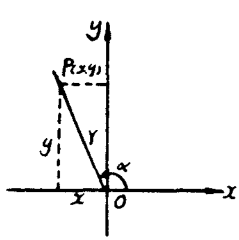
1．三角函数的定义：

如图：在任意角α的终边上任取一点$P(x, y)$，$r = |0P| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$，角$\alpha$的六种三角函数定义为：

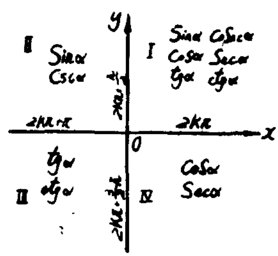
$\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$， $\csc\alpha = \dfrac{r}{y}$，

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$， $\sec\alpha = \dfrac{r}{x}$，

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$， $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$，



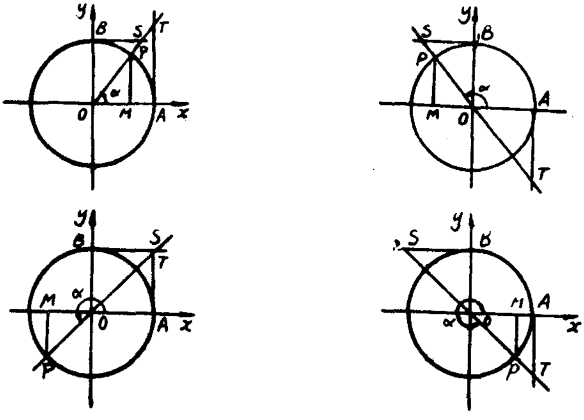
图D1—1



图D1—2

2．角α的六种三角函数在各个象限的符号．由于r取正值因此根据各象限内点的纵坐标y与横坐标x的符号，就决定了六种三角函数在各象限里的符号。

3．三角函数线：在单位园里的线段MP、OM、AT和RS的量数连同它的符号分别表示角α的正弦、余弦、正切和余切的值，它们分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切线和余切线，总称为三角函数线。



图D 1—3

即　　$\sin\alpha = MP$，$\cos\alpha = OM$，$tg\alpha = AT$，$ctg\alpha = BS$

说明　1.由三角函数定义可知：

(1)正弦线，正切线的正负与y轴一致。

(2)余弦线与余切线的正负与x轴一致。

2．用三角函数线可以证明或推导基本恒等式和诱导公式以及研究三角函数的周期性、增减性、定义域、值域、零点极值和作三角函数图象。

（三）同角的三角函数的关系：

倒数关系： $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$；$(\alpha\neq k\pi)$，$(K\in J)$ 下同。

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;\quad(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1.\quad(\alpha\neq\frac{k\pi}{2})$$

商数关系： $\text{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；$(\alpha\neq K\pi+\dfrac{\pi}{2})$

$$\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\ (\alpha\neq k\pi)$$

平方关系： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

$$1+\text{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\quad(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$1+\text{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha\quad(\alpha\neq k\pi).$$

说明 （1）对任何使函数有意义的角α，以上八个关系式都成立。

（2）上述公式可用于已知的一个三角函数值求该角的其他三角函数值，也可以简化三角函数式，求三角函数式的值，证明三角等式等等。

（3）在应用平方关系公式求三角函数值时，要看角α所在的象限，才能决定符号的选择。

（四）诱导公式：

（1）$2k\cdot90°\pm\alpha(K\in T)$ 如 $-\alpha$，$18°\pm\alpha$，$360°-\alpha$ 的三角函数值等于α的同名函数，再放上把α看成锐角时原函数在相应象限内的符号。

（2）$(2k+1)\cdot90°\pm\alpha(K\in T)$ 如 $90°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$ 的三角函数值等于α的相应的余函数的值，放上把α看成锐角时原

函数在相应象限内的符号。

说明 1．$2k$是偶数，$2k+1$是奇数．从公式(1)和(2)中的特点可概括的说成："奇变偶不变，符号看象限"能帮助记忆。

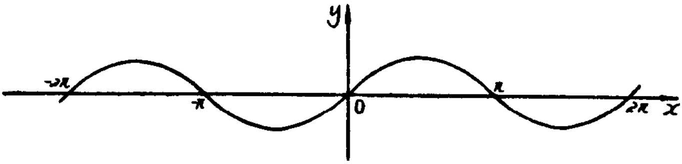
2．α是任意角时，诱导公式仍能成立。

3．将任意角的三角函数，化为锐角的三角函数。

（五）三角函数的图象及其主要性质：

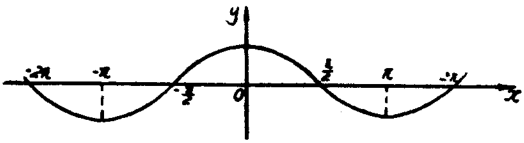
1．三角函数的图象：

$y=\sin x$的图象叫做正弦曲线，如图D 1—4；



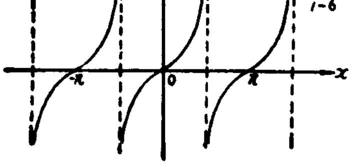
图D 1—4

$y=\cos x$的图象叫做余弦曲线。如图D 1—5



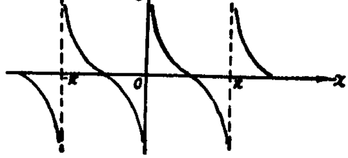
图D 1—5

$y=\mathrm{tg}x$的图象叫做正切曲线，如图D 1—6。



图D 1—6

$y=\mathrm{ctg}x$ 的图象叫做余切曲线，如图D 1—7。



图D 1—7

2．三角函数的基本性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\,x$	$y=\mathrm{ctg}\,x$
定义域	$- \ <x<\ $ 一切实数	$- \ <x<\ $ 一切实数	$\neq \ \ +\frac{\pi}{2}$	$\neq k\pi$
值域	$-1\leqslant \ \leqslant 1$	$-1\leqslant \ \leqslant 1$	$- \ <y<\ $ 一切实数	$- \ <y<\ $ 一切实数
零点	$x=k\pi$	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$x=k\pi$	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$
有界性	有 界 $\vert\sin \ \leqslant$	有 界 $\vert\cos \ \leqslant$	无界	无界
极值	$x=2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ $y_{小}=-1$ $x=2k\pi+\frac{1}{2}\pi$ $y_{大}=1$	$x=(2k+1)\pi$ 时$y_{小}=-1$ $x=2k\pi$ $y_{大}=1$	无	无
增减性	在Ⅰ，Ⅳ象限 是增函数 在Ⅱ，Ⅲ象限 是减函数	在Ⅰ，Ⅱ象限 是减函数 在Ⅲ数Ⅳ象限 是增函数	在各象限均为 增函数	在各象限均为 减函数
奇偶性	$\sin(-x)$ $=-\sin x$ 关于原点对称 是奇函数	$\cos(-x)$ $=\cos x$ 关于y轴对称 是偶函数	$\mathrm{tg}(-x)$ $=-\mathrm{tg}\,x$ 关于原点对称 是奇函数	$\mathrm{tg}(x+\ )$ $=\mathrm{tg}\,x$ 关于原点对称 是奇函数
周期性	$\sin(x+2\pi)$ $=\sin x$ $T=2\pi$	$\cos(x+2\pi)$ $=\cos x$ $T=2\pi$	$\mathrm{tg}(x+\pi)$ $=\mathrm{tg}\,x$ $T=\pi$	$\mathrm{tg}(x-\pi)$ $=\mathrm{tg}\,x$ $T=\pi$

3．正弦曲称$y=A\sin(\omega x+\varphi)$与正弦曲线$y=\sin x$的比较：

正弦曲称$y=\sin x$的振幅为1个单位，周期为2π。

正弦曲称$y=A\sin(wx+\varphi)$的振幅为$|A|$个单位，周期为$\frac{2\pi}{|\omega|}$，超前量为$\frac{\varphi}{\omega}$个单位。

4．“五点法”作正弦函数的图象（草图）

例 作出$y=2\sin(x-\frac{\pi}{4})$的草图。

解 (1)求出曲线上的五个特殊点。

①当$x-\frac{\pi}{4}=0$ 即$x=\frac{\pi}{4}$时$y=0$

②当$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 即$x=\frac{3\pi}{4}$时$y=2$

③当$x-\frac{\pi}{4}=\pi$ 即$x=\frac{5\pi}{4}$时$y=0$

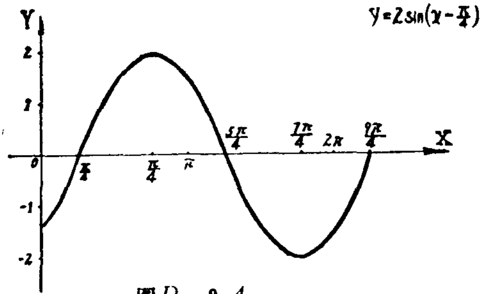
④当$x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ 即$x=\frac{7\pi}{4}$时$y=-2$

⑤当$x-\frac{\pi}{4}=2\pi$ 即$x=\frac{9\pi}{4}$时$y=0$

(2)列表

x	……	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	……
y	……	0	2	0	-2	0	……

（3）描点作图：



图D—8 A

（六）例题：

例1 已知：$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且α是第二象限角，求α的其他三角函数值。

解 由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可得$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$，

∵ α是第二象限的角，

cosα是负的，

$$\therefore\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(\tfrac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4},\qquad ctg=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{5}{4};\qquad csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{5}{3}.$$

说明 (1)题中的角α因指定了象限，只需在指定的象限内求出其他各三角函数的值，所以只有一组解，若不指定象限，需要根据已知条件，对角α的所在象限进行讨论，然后分别在有关象限内，求角α的其他三角函数值。则有两组解。(2)若已知一个角的三角函数值是字母，则必须对字母的各种取值情况

分别对角α所在象限求出各三角函数的值，可见下例。

例2 已知：$\cos\alpha = m$ （$|m| \leqslant 1$） 求：$\operatorname{tg}\alpha$的值。

解 当$0 < m < 1$时，角α在一或四象限，如角α在第一象限时：

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-m^2}；$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

如角α在第四象限时

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-m^2}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

当$-1 < m < 0$时，α在二或三象限。

若角α在第二象限，

$$\sin\alpha = \sqrt{1-m^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}；$$

若角α在第三象限，

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-m^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{1-m^2}}{m},$$

当$m = 1$时，$\alpha = 2n\pi$，$m = -1$时，$\alpha = (2n+1)\pi$

可以归纳为$\alpha = n\pi (n \in J)$，此时$\sin\alpha = 0$，$\operatorname{tg}\alpha = 0$。

当$m = 0$时，$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ \alpha &= 2n\pi + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}\right\}$ 可以归纳为$\alpha = n + \frac{\pi}{2} (n \in J)$

$\operatorname{tg}\alpha$不存在。

例3 求证：

（1） $$\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha} = \frac{3}{2}$$

（2） $$(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2 = (\sec^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha)(\sec^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha)$$

（3） $$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$