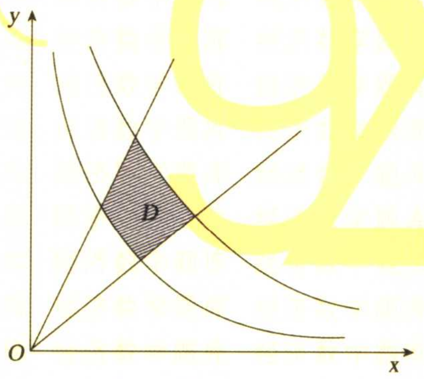
经济数学题库

微积分

习题集

严守权 编著



中国人民大学出版社

经济数学题库

微积分习题集

严守权　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分习题集/严守权编著
北京：中国人民大学出版社，2004
（经济数学题库）

ISBN 7-300-05632-6/O·61
Ⅰ. 微…
Ⅱ. 严…
Ⅲ. 微积分-习题
Ⅳ. 0172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 055653 号

经济数学题库
微积分习题集
严守权　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http：//www.crup.com.cn		
	http：//www.1kao.net（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	河北三河汇鑫印务有限公司		
开　　本	787×1092 毫米 1/16	**版　　次**	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	23.25	**印　　次**	2004 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	529 000	**定　　价**	28.00 元

编写说明

为适应广大读者尤其是财金、经济和管理专业的学生学习高等数学的需要，我们选编了经济数学题库。全套书共分三册：微积分习题集、线性代数习题集和概率论与数理统计习题集。

各册习题集的编写主要参考了目前财经、管理等专业数学教学的大纲，同时也兼顾各类招生考试对大学数学的要求。编者根据多年的教学经验，精心选题，力求帮助读者加深对经济数学相关的基本概念、基本定理和基本运算的理解，同时对这些知识点的外延、扩展和综合有一定的了解，并得到必要的训练。

此外，各册习题集还力求反映近几年来经济数学教学改革的变化和发展，在题型结构上适当增加了选择题和填空题的比重，并选编了一定数量的经济应用题型，以弥补目前经济数学教材在这方面的欠缺和不足。为了使读者增强分析问题、解决问题的能力，书中还选有适当比例的具有一定难度的习题，这部分习题更具有抽象性、综合性、灵活性，但尽量避免了偏题以及技巧性过强或计算过于繁杂的题型，通过对这部分习题的练习将有助于读者开拓思路，扩大视野。

考虑到读者自学过程中咨询环境的欠缺，各册习题集对所有习题均附有参考解答，以便对照查询。同时，我们还将在中国 1 考网（www. 1kao.net）上定期给读者答疑。衷心感谢中国人民大学出版社的同志为出版这套丛书所付出的努力。欢迎广大读者提出批评和建议。

编　者

2004.6

目　　录

第一章　函数、极限、连续

一、基本要求

1. 函数的概念及其表示法.

2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 基本初等函数的性质及其图形;初等函数的概念.

5. 数列极限、函数极限及左极限与右极限的概念.

6. 无穷小的概念与性质;无穷小阶的比较;无穷大的概念及与无穷小的关系.

7. 极限性质与极限存在的两个准则;单调有界准则和夹逼准则;极限的四则运算法则;两个重要极限及其应用.

8. 函数连续的概念;函数间断点的类型及判别.

9. 连续函数性质及初等函数的连续性;闭区间上连续函数的有界性、最大最小值定理、介值定理及其简单应用.

二、内容简介

1. 函数的概念

函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性.

函数的几何特性.

反函数、复合函数、隐函数、分段函数.

基本初等函数与初等函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数(定义域、主要性质和图形从略).由基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称为初等函数.

简单的经济函数:在生产和经营活动中,成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数,记为$C(x)$;总收入函数,记为 $R(x)$;总利润函数,记为 $L(x)$.一般地,$C(x)=$固定成本+可变成本;$R(x)=px$,其中 p 为产品的销售单价,x 为销量;$L(x)=R(x)-C(x)$.商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系,分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$和供给函数 $f_s(p)$.

2. 极限的概念

设有数列$\{u_n\}$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,总有不等式$|u_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列$\{u_n\}$的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} u_n=A \text{ 或 } u_n\to A(n\to\infty).$$

设有函数 $f(x)$和常数 A,如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta>0$,使得当

$0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果自变量 x 仅限从 x_0 右侧(或左侧)趋向 x_0 时，$f(x)\to A$，则称 A 为 $x\to x_0^+$(或 $x\to x_0^-$)时，函数 $f(x)$ 的右极限(或左极限). 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$). 类似地可定义 $x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 时，$f(x)\to A$ 的极限概念.

函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^+(+\infty)} f(x)=\lim_{x\to x_0^-(-\infty)} f(x)=A$$

无穷小与无穷大：有限个无穷小量的和仍为无穷小量. 有限个无穷小量的积仍为无穷小量. 无穷小量与有界变量之积仍为无穷小量. 无穷小量除以极限不为零的变量，其商仍为无穷小量. 若 α,β 为同一变化趋势下的无穷小量，且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\rho$，则当 $\rho=0$ 时，称 β 为比 α 高阶的无穷小量，当 $\rho=\infty$ 时，称 β 为比 α 低阶的无穷小量，当 $\rho=c\neq0$ 时，称 β 为与 α 同阶的无穷小量，特别地当 $\rho=1$ 时，称 β 为与 α 等价的无穷小量，记作 $\alpha\sim\beta$.

$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 可表示为常数 A 与无穷小量 α 之和.

如果极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则有运算法则：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\quad(\lim g(x)\neq0)$$

两个重要的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

3. 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；如果函数 $f(x)$ 在某区间内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在该区间内连续. 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处，或者无定义，或者无极限，或者极限不等于函数值 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

初等函数在其定义区间内连续.

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值(最值定理)；

(3) $f(a)\neq f(b)$ 时，对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c，必存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$(介值定理).

三、习题

(一)填空题

1. 已知 $f(e^x-1)=x^2+1$,则 $f(x)$的定义域为________.

2. 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$,则 $f(x)$为________.

3. 已知 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且 $f(\varphi(x))=\ln x$,则 $\varphi(x)=$________.

4. 设 $f(x)$满足等式 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x+2}$,则 $f(x)$________.

5. 设 $f(x)$满足等式 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\frac{1}{x^2+1}(a^2\neq 1)$,则 $f(x)=$________.

6. 设 $f(x)=\frac{ax}{2x+3}$,且 $f[f(x)]=x$,则 $a=$________.

7. 设 $f(x)=(2|x+1|-|3-x|)x$,则 $f(x)$可化为分段函数________.

8. 设 $f(x)=[x]-x$,则 $f(x)$可化为分段函数________.

9. 设 $f(x)$对一切正值 x,y,恒有 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=$________.

10. 已知函数 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ 在区间$(0,1]$上恒正,则 a 的最值范围为________.

11. 设 $f(x)=\sqrt{\frac{4x+3}{x-3}}$,则 $f(x)$的值域为________.

12. 设 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\log_2(x+1) & -1<x<1\\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x & 16<x\end{cases}$,则$f(x)$的值域为________.

13. 函数 $y=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$与函数 $y=g(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(x)=$________.

14. 函数 $y=\arccos(x^2-2x-3)$的单调减区间为________.

15. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且 $f(x+2)=f(x)$,若当 $-1\leqslant x<1$ 时,$f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\end{cases}$,则当 $2\leqslant x<4$ 时,$f(x)=$________.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\cdots+\sqrt[n]{18})=$________.

17. 设 $x_n=\begin{cases}(-1)^n & n>100\\ n & n\leqslant 100\end{cases}$,$y_n=\begin{cases}(-1)^{n+1} & n>200\\ 2^n & n\leqslant 200\end{cases}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=$________.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{n^k-(n-1)^k}=A\neq 0$,则 $k=$________,$A=$________.

19. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{ax+b} & x>0\\ 1 & x=0\\ 2^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$,若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,则 $a=$________,$b=$

________.

20. 设 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x+1}-3qx+5$，当 $x\to+\infty$ 时，若 $f(x)$ 为无穷小量，则 p,q 满足条件________；若 $f(x)$ 为无穷大量，则 p,q 满足条件________.

21. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}{x^k}$，若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=c\neq0$，则 $k=$________，$c=$________；若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c\neq0$，则 $k=$________，$c=$________.

22. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to\infty}2xf(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[4f(x)+5]$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$________.

23. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+7x^4-12)^a-x]=c\neq0$，则 $a=$________，$c=$________.

24. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

25. 设 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 为等价无穷小，则 $a=$________.

26. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\ln(1+x)}-1}{\sin x}=100$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

27. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}+ax-b\right)=-1$，则 $a=$________，$b=$________.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}=$________.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$________.（$a,b$ 为正常数）

30. $\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan\dfrac{1}{x}+\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}\right)=$________.

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+2}\sin\dfrac{x-1}{x^2+1}=$________；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x^3-2x}\sin\dfrac{x^2-1}{x+2}=$________.

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________.$\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

34. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

35. $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{xt+1}{xt+2}\right)^t=$________.

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=$________.

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(\ln x+1)^n+(2^{x-e+1})^n}=$________.$(x>0)$

39. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos2x-\cos3x}{x^2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

40. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1-2x^2}{1+x^2}\right)^{\cot^2 x} & 0<|x|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2x-a & 其他\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

41. 设 $f(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ a & x\geqslant 0\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}b & x<0\\ x+3 & x\geqslant 0\end{cases}$ 且 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,则 $a=$________,$b=$________.

42. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的连续区间为________.

43. 曲线 $f(x)=\dfrac{2x^4-5x^3+2x^2+1}{x^2(x-2)}$ 有________条渐近线.

44. 设 $f(x)=\dfrac{\sin[(x-1)x]}{x(x^2+3x+2)}$ 有间断点________,可去间断点是________,曲线 $y=f(x)$ 的渐近线是________.

45. 已知方程 $x^3+(2m-3)x+m^2-m=0$ 有三个不等实根,分别介于 $(-\infty,0)$,$(0,1)$,$(1,+\infty)$ 内,则 m 的取值范围是________.

(二)选择题

1. 下列函数对中,两函数相等的是(　　).

A. $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$

B. $y=x$ 与 $y=\arcsin(\sin x)$

C. $y=\lg(3-x)-\lg(x-2)$ 与 $y=\lg\dfrac{3-x}{x-2}$

D. $y=\arctan x^2$ 与 $y=\arctan\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+2kx}{kx^2+2kx+3}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,则 k 的取值范围是(　　).

A. $(0,3)$　　B. $[0,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

3. 设 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x$,则有(　　).

A. $f(-2-x)=-2-f(x)$　　B. $f(-x)=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

C. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　D. $f(f(x))=-x$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 2x & x<0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -2x & x<0\end{cases}$,则 $x\leqslant 0$ 时,$f(g(x))=$(　　).

A. $2x$　　B. x^2　　C. $4x^2$　　D. $-4x^2$

5. 已知函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上存在反函数 $x=\varphi(y)$,则有结论(　　).

A. $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调

B. 曲线 $y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 关于 $y=x$ 对称

C. $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 有相同的单调性

D. $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 有相同的有界性

6. 设 $f(x)=\log_a x$ 在 $(1,a)$ 上有定义,则(　　).

A. $f[f(x)]<f(x^2)<[f(x)]^2$　　B. $f[f(x)]<[f(x)]^2<f(x^2)$

C. $f(x^2)<f[f(x)]<[f(x)]^2$　　D. $[f(x)]^2<f(x^2)<f[f(x)]$

7. 设 $f(x),g(x)$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增，则(　　)也在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增.

A. $f(g(-x))$　　B. $f(x)g(x)$　　C. $f^3(x)$　　D. $\dfrac{1}{f(-x)}$

8. 设函数 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)>0$，且为增函数，又设 $F(x)=3-f^2(x)$，$F(x)$ 是(　　).

A. 偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调减

B. 偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调增

C. 偶函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调性不能确定

D. 奇函数，在 $(-\infty,0)$ 上单调减

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对任意实数均成立，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 既是奇函数又是偶函数

C. 偶函数　　D. 既非奇函数又非偶函数

10. 设 $f(x)=\log_3\dfrac{1-x}{1+x}$，$g(x)=x^3$，则(　　)为偶函数.

A. $f(g(x))$　　B. $f(x)g(x)$

C. $\begin{cases} f(x) & |x|<1 \\ g(x) & |x|\geqslant 1 \end{cases}$　　D. $g(f(x))$

11. 设 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

12. 设 $f(x)=\begin{cases} \cos x-x & -\pi\leqslant x<0 \\ \cos x+x & 0\leqslant x\leqslant\pi \end{cases}$，在定义域内 $f(x)$ 为(　　).

A. 无界函数　　B. 偶函数　　C. 单调函数　　D. 周期函数

13. 下列函数中，(　　)一定不是初等函数.

A. 分段函数　　B. 含有绝对值的函数

C. 取整函数 $[x]$　　D. 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$

14. 下列函数中，不为初等函数的是(　　).

A. $y=\arcsin(x^2-2x+3)$　　B. $y=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,|x|<1$

C. $y=\begin{cases} x+1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 3-x & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$　　D. $y=|x+1|^{\sin x}$

15. 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的等价表述是(　　).

A. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在无穷多个 x_n，使 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立

B. 对满足不等式 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 的任意 ε，必存在一个时刻 N，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-A|<\varepsilon$

C. 对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，必存在一个时刻 N，当 $n>N$ 时，除个别点外，均有 $|x_n-A|<\varepsilon$

D. 对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在惟一的 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$

16. 设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 有定义，如果下列条件(　　)成立，则极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在.

A. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A(\neq\infty)$，$x$ 为有理数

B. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ 均存在，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 有定义

C. $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)$ 存在

D. A 为定常数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-A}{\sqrt[3]{x}}$ 存在

17. 若对任意实数，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=($　　$)$.

A. 存在且为零　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　D. 不一定存在

18. 已知当 $x\to\infty$ 时，$f(x)+g(x)$ 发散，于是，在 $x\to\infty$ 时(　　).

A. 若 $g(x)$ 发散，则 $f(x)$ 必发散　　B. 若 $g(x)$ 发散，则 $f(x)$ 必收敛

C. 若 $g(x)$ 收敛，则 $f(x)$ 必发散　　D. 若 $g(x)$ 收敛，则 $f(x)$ 必收敛

19. 下列结论中正确的是(　　).

A. 两个无穷小量均可比较阶的大小

B. 若 a 为无穷小量，则 $\dfrac{1}{a}$ 必为无穷大量

C. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则 α 一定是比 β 高阶的无穷小

D. 有界变量未必为无穷大量

20. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则 $x\to 0$ 时(　　).

A. $f(x)$ 是 x 的等价无穷小　　B. $f(x)$ 是 x 的同阶但非等价无穷小

C. $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　D. $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

21. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，且 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

22. $e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}$ 与 $\left(\dfrac{1}{n}\right)^m$ 等价，则 $m=($　　$)$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

23. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\arctan x^k)^{e^{\frac{1}{(\tan x)^n-1}}}=1$，且 n,k 为正整数，则有(　　).

A. $k>n$　　B. $k=n$　　C. $k<n$　　D. k,n 为任意正整数

24. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin x+b(1-\cos x)}{c(1-e^x)+d\ln(1+x^2)}=4$，$ac\neq 0$，则(　　).

A. $a+4c-2d=0$，b 为任意实数　　B. $a+4c=0$，b,d 为任意常数

C. $b-2d=0$，a,c 为任意实数　　D. $2a+b+8c-d=0$

25. 设 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($　　$)$.

A. 0　　B. $+\infty$　　C. $-\infty$　　D. 不存在,也非 ∞

26. 设数列通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n} & n\ 为奇数\\ \dfrac{1}{n} & n\ 为偶数\end{cases}$,则当 $n\to\infty$ 时,x_n 是(　　).

A. 无穷大　　B. 无穷小

C. 有界变量但非无穷小　　D. 无界变量但非无穷大

27. 设数列 x_n,y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则有(　　).

A. 若 x_n 发散,则 y_n 必收敛

B. 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

C. 若 x_n 无界,则 y_n 必为无穷小量

D. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量,则 y_n 也必为无穷小量

28. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

29. 极限(　　)$=0$.

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^3}}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}\right]^n=($　　$)$.

A. 0　　B. e^2　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

31. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2+\cos\dfrac{1}{x}}{\ln x^2+f(x)}=1$,则 $f(x)=($　　$)$.

A. $\ln x^2$　　B. $e^{\frac{1}{x}}$　　C. $\cos x$　　D. $\dfrac{1}{x}$

32. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$,在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足(　　).

A. $a<0,b<0$　　B. $a>0,b>0$　　C. $a\leqslant 0,b>0$　　D. $a\geqslant 0,b<0$

33. 下列函数中在其定义域内不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 2x-1 & x<0\end{cases}$　　B. $f(x)=\dfrac{|x|}{\sin x}$

C. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 2x-1 & x\leqslant 0\end{cases}$　　D. $f(x)=1+\sin x+\sin^2x+\cdots,|x|<\dfrac{\pi}{2}$

34. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\neq 0\ 时\\ 0 & 当\ x=0\ 时\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & 当\ x\neq 0\ 时\\ 1 & 当\ x=0\ 时\end{cases}$,则在 $x=0$ 处间断的

函数是(　　).

A. $\max\{f(x), g(x)\}$　　B. $\min\{f(x), g(x)\}$

C. $f(x)-g(x)$　　D. $f(x)g(x)$

35. 设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,且 x_0 为其间断点,则在 x_0 处必间断的函数是(　　).

A. $f(x)(x^2-x)$　B. $f(x)+e^x$　C. $f(x^2-x)$　D. $\sin^2 f(x)$

36. 设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$有间断点,则(　　).

A. $\varphi[f(x)]$必有间断点　　B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点

37. "$f(x)$在点 $x=a$ 处连续"是函数$|f(x)|$在点 $x=a$ 处连续的(　　)条件.

A. 必要但非充分　B. 充分而非必要　C. 充分必要　D. 既非充分又非必要

38. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ x-1 & x\leqslant 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ 2x-1 & x\geqslant 1\end{cases}$,则下列函数中,(　　)在$(-\infty,+\infty)$上不连续.

A. $f(x)g(x)$　B. $f(x)+g(x)$　C. $f(g(x))$　D. $g(f(x))$

39. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x^{2n}}$,则函数 $f(x)$(　　).

A. 存在间断点 $x=-1$　　B. 存在间断点 $x=0$

C. 存在间断点 $x=1$　　D. 不存在间断点

40. 函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} & x\neq 1 \\ 0 & x=1\end{cases}$,在 $x=1$ 处(　　).

A. 右连续　B. 左右皆不连续　C. 左连续　D. 连续

41. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ -1 & x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处(　　).

A. 右连续　B. 左右皆不连续　C. 左连续　D. 连续

42. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$的一个(　　).

A. 跳跃间断点　B. 可去间断点　C. 第二类间断点　D. 连续点

43. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$,则(　　).

A. $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点

B. $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点

D. $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 取值有关

44. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\cos(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$在下列区间(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

45. 曲线 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}\ln\dfrac{5-x}{3+x}$有(　　)条渐近线.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

46. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-1)}$有(　　)条渐近线.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

47. 曲线 $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$有(　　)条渐近线.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

48. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$有定义,在(a,b)连续,下列结论中,(　　)不一定成立.

A. 当 $f(a)f(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$使 $f(\xi)=0$

B. 若 c,d 为(a,b)内任意两点,且 $f(c)f(d)\leqslant 0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$

C. 对任意 $\xi\in(a,b)$,总有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

D. $f(x)$可能为无界函数

(三)解答题

1. 已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,求函数 $\varphi(x)$,并给出 $\varphi(x+1)+\varphi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$的定义域.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 2x-1 & x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x^2 & x\leqslant 1\\ \ln(1+x) & x>1\end{cases}$,求函数 $f[g(x)]$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x-2)+g(x)$.

3. 设 $f(x)=\min[2,x,x^2-x]$,将函数 $y=f(x)$表示为分段函数形式,并画出函数曲线图.

4. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足等式 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且当 $0\leqslant x<\pi$ 时 $f(x)=x$,给出 $f(x)$在$[\pi,3\pi)$上的表达式.

5. 求下列函数的值域,并证明它们是否为有界函数.

(1) $y=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15$;

(2) $y=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{x-3}$.

6. 求出函数 $y=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\leqslant x<4\\ 2^x & 4\leqslant x\end{cases}$ 的反函数表达式,并说明其单调性.

7. 求函数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$在$|x|\geqslant 1$ 时的反函数.

8. 求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$的反函数.

9. 设 $y=x-[x]$，其中 $y=[x]$ 为取整函数，讨论该函数的对称性（奇偶性），有界性，单调性与周期性，并利用线段相加法，画出函数曲线图.

10. 按现生产安排，某产品的可变成本是每单位 2 元，生产的固定成本为 100 元，技术人员又提出两种生产方案，有关成本数据如下：

方案Ⅰ：固定成本 400 元，可变成本每单位 1 元；

方案Ⅱ：固定成本 225 元，可变成本每单位 1.5 元.

为使总成本最小，试确定三个方案分别在什么条件为最佳.

11. 设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品，可销售 1 000 件，若在此基础上降价 10%，最多可再售出 300 件，又知该商品每件进价为 b 元，写出销售该商品的利润与进货数 x 的函数关系.

12. 设某商品的需求函数为 $5P+2X_d=200$，供给函数为 $P=\frac{4}{5}X_s+10$（价格单位：元，商品单位：万件）

(1)求均衡价格和均衡需求量.

(2)如每件商品征税 6 元，求均衡价格和均衡需求量.

(3)如无税情况下需求量增加 2 万件，政府对每单位商品应给生产者多少津贴?

13. 某网络公司上网计时收费规定为，若每天上网不超过 2 个小时，每小时收费 2 元，若每天上网在 2 至 4 小时（不含 2 小时），每小时收费 1.5 元，若每天上网超过 4 小时，每小时收费 1 元，全月最高收费 300 元封顶，设小王每天上网时间相同，试给出小王每天上网费用与上网时间的函数关系.（每月按 30 天计算）

14. 某教室位于学生宿舍正东北方向，从宿舍到教室需先沿正东方向马路行走 200 米，再转向正北行走 200 米方可到达. 现有一同学计划用 10 分钟时间步行到教室上课. 走到一半路程发现未带课本，又跑步返回宿舍取书，并即刻在预定时间内跑步赶到教室. 假设在这期间行走均为匀速，试给出这一期间该同学与宿舍的距离相对时间 t 的函数.

15. 设数列 x_n 满足关系式 $x_{n+1}-2x_n=-\frac{3n^2+n}{n^2-1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=3$，判断 $n\to\infty$ 时，x_n 是否收敛，若收敛，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

16. 已知 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，且 $A>B$，能否找到 $x=a$ 的某空心邻域，使得在该邻域内总有 $f(x)>g(x)$，证明你的结论.

17. 证明 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界，当 $x\to0^+$ 时，$f(x)$ 并非无穷大.

18. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$，能否以此类比，称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (a\neq0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

计算下列数列的极限（19—24）

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{n^2-n^3})$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$