

乙
683
148

解析幾何學ABC

龐守白著

世界書局印行

解析幾何學 A B C

平裝五角 精裝六角

(外埠酌加郵費滙費)

著 作 者 龐 守 白

出 版 者 A B C 叢書社

印 刷 者 世 界 書 局

發 行 者 世 界 書 局

發行所 上海各省 世界書局

中華民國二十年四月印刷
中華 民國二十年四月出版

例 言

1. 本書編著的次序和材料的採集，大致均依照 Young and Linebarger 二氏所編的微積分學裏頭的一章，其餘參攷些別的書籍和加入些著者平日的心得，還有採自各種雜誌或研究錄的也不少，爲了編著時的便利計，不及一一載明。

1. 本書編著的目的，在普及一些常識，所講的東西，都是有趣的和簡單的，所有高深的理論，自有專書研究，概不採入。

1. 本書所用學名，在書末另附中西學名對照表，以資參攷，大部均依據科學名詞審查會所審定的結果，以歸一律。

1. 本書除各種基本理論外，其重要部份，都附以例題，使讀者易於領悟。

1. 著者學識淺陋，并且編著的時日，非常短促，遺誤之處，想來在所不免，深望海內學者，與以指正

，不勝榮幸。

1.本書承老友王士渥君，詳爲校閱，指正甚多，書此誌謝。

1.本書的抄寫，繪圖和校對，都出我妻韞玉之手，就是在病中，也不顧一切，努力工作，著者深感到她對本書的熱忱。

著者誌

十九年五月，於南京。

目 次

讀本書所需的算學智識	1
導言	1
圖示法	3
方向線	11
坐標系	14
直角坐標系	16
解析幾何學上的基本原則	18
經過原點的直線方程式	24
直線普遍方程式	27
一次方程式的圖形的研究	29
截距	31
關於直線的各種問題	34
兩直線的關係	42
圓的普遍方程式	46
圓的切線和法線	49

關於圓的各種問題.....	54
拋物線的普遍方程式.....	57
拋物線的切線和法線.....	60
關於拋物線的各種問題.....	62
橢圓線的普遍方程式.....	67
橢圓線的形式.....	71
關於橢圓線的各種問題.....	73
橢圓線的輔圓、準線和離心率.....	78
雙曲線的普遍方程式.....	83
雙曲線的形式.....	85
雙曲線的準線.....	86
等軸雙曲線和他的漸近線.....	88
坐標之搬動.....	92
圓錐曲線的普遍方程式和討論.....	96
物理學上的應用.....	104
極坐標系.....	108
極坐標系裏頭的圓錐曲線的方程式.....	111

阿基米得螺旋線	113
解析幾何學的略史	115
譯名對照表	119

解析幾何學ABC

導言 (Introduction)

這本小冊子的任務，是不過介紹一種科學常識給讀者，以引起研究本學科的興趣而已。所以編著的方法，並不依照學校的教本，和預備投攷的什麼速成書。在可能範圍以內，總想使他十分的通俗和簡單，所有沉悶的或繁複的部份，都一概避去，只揀有興趣的東西，作為編輯的材料；至於高深的部份，自有專門的著述，非這本小冊子所能包容。本書的主要目的，要使讀者明瞭這一學科的大意和他的原理，以及簡單的應用。講到解析幾何這門學識不過是研究些各種普通圖形的性質，並沒有什麼別的可說。現在就用簡單的方法，去講明他各種原理的內容，使有初等算學智識的人，可以很容易瞭解他的意義。如其能够引起了

研究的興趣，再向前去探討，那是著者所感到的最滿意的事了。

解析幾何學的定義，是以代數學方面的方程式，去研究幾何學方面的圖形。因為代數學是以文字去代表數值，以符號去表示運算，使得各種問題，得到極簡明的解法；幾何學研究各種圖形的形狀位置和他移動時所生的軌跡。解析幾何學即融會貫通這兩種學識，作綜合的研究。因為代數學偏於數的方面，是一種抽象的學科，而幾何學偏於形的方面，是一種具體的學科，現在把他并在一處講，比較上自然可以容易瞭解。有如習物理學的人，一方面去研究理論，一方面去實習，那末假使在理論方面有什麼困難之點，就可以把事實去推想他，決計不會茫無頭緒了。

讀本書的方法，最好先將這本書一氣看完，然後再回來逐節的研究，那就決計沒有什麼困難之處。至於已經學過這門學科的人，也可以把他作為溫習時的參考書；沒有學過的人，要知道一些解析幾何學的內

容，就可以把他作為開始研究的材料，因為所需要的算學智識，非常渺小，只要在本書第一頁上一看，就可以一目瞭然了。

圖 示 法 (Graphic Representation)

最近幾十年裏頭，圖示法的應用，逐漸的普遍，對於各科的研究上，有很顯著的影響。數理科學，固然感受他相當的利益外，其他的應用科學和社會科學，也受著同等的利益，如地理學，社會學，統計學和各種工程學。應用了圖示法，對於他學術的本身上，得到很好的效果，因為任何定律和規則，都可以用數字或文字來表示他，又可以應用了圖示法的特點，用圖形來講明他。所以即使有什麼深奧之理，抽象之論，也不難以具體的圖形去幫助他，使得學者容易明瞭。並且數量和圖形的觀念，也有等差，因為數量是抽象的，圖形是具體的，凡以數量表示而尚且不能明瞭的，就可以用圖示法去幫助他，這種情形，並無什麼

別的緣故，只不過有了實質的圖形的幫助，就覺到所有的困難，完全不成問題了。現在舉幾個例，來講明圖示法的重要和用途。

(a)假使某地要辦理給水工程，在未辦以前，必須先要調查某地的水文記載，如一年裏頭每月的降雨量，蒸發量，流出量和用水量等，造成一張比較表，像下面的式樣：

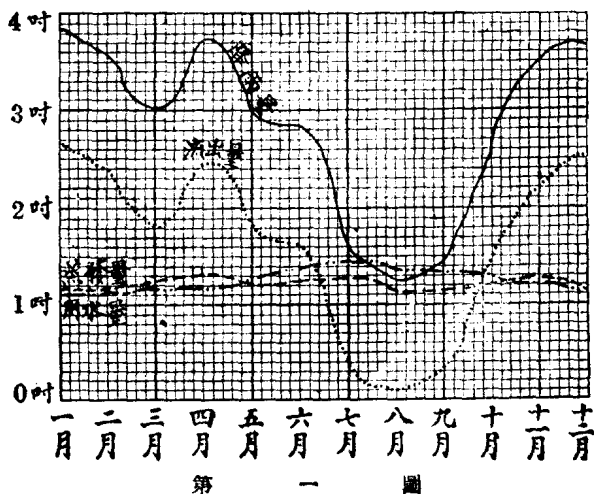
	降雨量	蒸發量	流出量	用水量
一 月	3.82	1.19	2.63	1.17
二 月	3.57	1.17	2.40	1.13
三 月	3.02	1.21	1.81	1.15
四 月	3.76	1.32	2.44	1.17
五 月	2.95	1.20	1.75	1.26
六 月	2.86	1.25	1.61	1.35
七 月	1.54	1.30	0.24	1.41
八 月	1.26	1.15	0.11	1.37

九 月	1.44	1.15	0.29	1.32
十 月	2.76	1.22	1.54	1.26
十一月	3.56	1.30	2.26	1.20
十二月	3.68	1.16	2.52	1.17

表裏頭的數量，都是以吋作單位的。但是假使只有了這一張表，我們要知道某一種量在那一個月裏最高，在那一個月裏最低，那末非細細的比較一下不可。如其更要知道什麼時候是最潮濕，在什麼時候用水量和流出量近乎相等；並且在什麼時候流出量過大，而使用水量有缺乏之虞；發生缺乏，究竟要經過多少時候。爲預防這種現象，我們就需要建築蓄水池，但是在這個缺水時期裏，究竟要預先儲蓄多少水量，方始可以避去這種困難，而且要得到最經濟的辦法，不要使他過分的儲蓄。如其要回答這許多問題，雖然有了上面的一張表，恐怕還要費很多的辰光，纔始可以回答以上的種種問題，那豈不太麻煩麼？所以我們不得不

應用圖示法了。

譬如在一根縱線上，我們使他代表時數，再在橫線上，我們使他代表月份，那末上面一張表裏的數目，就可點在這張圖上，然後以一根平滑的曲線去連結他。這根曲線就可代表某一種量在一年裏頭的變遷，那時最高，那時最低，就可以一目瞭然了。照樣的方法，可以畫四根曲線，就代表四種量，如其用了這個方法，去回答上面各種問題，想來一定很便利的了。



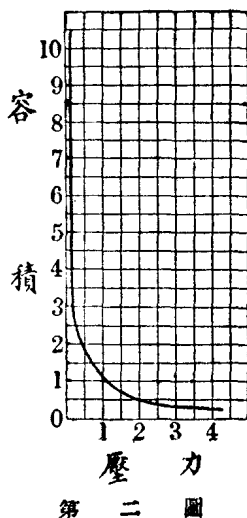
上面這張圖，就是根據了那種方法畫成的，圖裏的各種曲線，就是代表一年裏頭各種量的變遷。在這張圖上面，可以求各種量相互的關係，所以從這個例子裏，可以證明圖形是比數目來得容易了解的。

(b)凡是學過普通物理的人，都知道波以爾定律 (Boyle's Law)，他的定律上面說：假使有某種定量的氣體，在一定溫度時加以壓力 P ，其容積成 V ；假使壓力變為 P_1 ，他的容積也就變為 V_1 ，而 P 和 V 無論如何，總成反比例的，所以

$$V : V_1 = P_1 : P$$

或 $PV = P_1V_1$.

這個定律也可以用圖示法來代表他，假使上面式子裏頭 $P_1=1$ ，和 $V_1=1$ ，那末這個式子就變成 $PV=1$ 。如其在這個式子裏，假定 P 是任何數值，那



末應用了這個式子，就可以求得他的相當的 V 。現在把他的結果，造成一張表式，像下面的格式：

P	0.1	0.2	0.5	1	2	4	5	
V	10	5	2	1	0.5	0.25	0.2	

假使在一根水平線上，自 O 起依次將 P 的各種數值，用一定的比例向右面量，在這根線上我們就可以得到許多點子。再在每個點子上向水平線的正交方向，用同樣的比例量他的相當的 V 值，那末上面表裏的各對數值，就都可以在圖上表演出來。我們如其將這許多點子用一根曲線去連結他，就成第二圖裏頭的一根曲線，這根曲線就是波以爾定律的圖示。在這根曲線上面，不論在什麼地方，都合於波以爾定律的，就是 P 和 V 的相乘積，總是等於 1 的。所以我們如其知道了 P 的數值，要求他相當的 V 值時，就可以用這張圖一看就知道了。

(c)在物理學上，我們可以知道融解度往往依溫度

的高下而異，在不同溫度之下，融解度也各各不同，就像蔗糖對於水的融解度，因了溫度的不同，他的融解的效能也各異，就歷次試驗的結果，我們得到下面的一張表：

溫 度	0°	10°	20°	30°	40°	50°	
蔗糖融解的百分數	65.0	65.6	67.0	69.8	75.8	82.7	

假使在一根水平線上量得 0, 10, 20, 30, 40, 50, 這許多數目，每個數目用一個點子來代表他，在這許多點子上，畫許多同水平線相垂直的線。每根垂線的長度等於每點相當的融解百分數，然後將這許多垂直線的端點，用一根平滑的曲線去連結他，這根曲線就是蔗糖對於水的融解曲線。

我們現在略為研究這種曲線的實際價值：假使我們要知道當 45° 時，蔗糖對於水的融解度，究竟是多少，我們可以在已經畫好的曲線上，求得這個數目。只要向水平方向用同樣的比例，量得 45 一數，得到一

個點子，在這個點子上作一根同水平線成正交的線，這根線一定同已作的曲線，成一點交點。只要量這個交點到水平線的垂直距離，就可以知道 45° 時，蔗糖對於水的融解百分數了。所以有了這根曲線，任何溫度時的融解度，我們就可以很容易的求到了。這根曲線的形式是初時近乎一根直線，愈向右去，他的曲度也愈大，所以我們可以知道在低溫度時，融解度和溫度的關係，近乎一個常數；而在高溫度時，則增加很大。這種圖的作法，已經很詳細的講過了，所以就讓學者自己去練習，在此地不再畫上了。

圖示法的方法，我們已經很詳細的討論過了，但是我們要知道，如其要得到很精確的結果，那是很不容易的，因為如其要十分精確，那就不得不求得很多的數目，然後去畫成曲線，因為曲線的精確與否，全要看作這箇曲線時，所依據的數目，是否足夠。就像這個例子裏頭，如其在試驗的辰光，溫度相差一度，就得他一個相當的融解百分數，所畫的曲線比每隔十