

國際數學奧林匹

克

30

年

——为迎接1990年IMO在我国举办

梅向明 主编

中国计量出版社

国际数学奥林匹克30年

——为迎接1990年第31届IMO

在我国举办

梅向明 主编

周春荔 张成恒 编
吴建平 庞东辉

中国计量出版社

内 容 提 要

本书是较系统地介绍国际中学生数学奥林匹克（简称IMO）有关知识。书中第一部分简要地介绍了IMO的历史发展概况、组织办法及竞赛规程。并且介绍了我国数学竞赛活动的简况以及我国中学生在IMO中的战绩；第二部分集中了第1—30届IMO的试题及解答。为使用方便，每届试题后面配有答案，这样读者既可先独立思考，又可很方便地参阅答案。其中有些解答我们使用了初等的解法，这样能使更多的读者，甚至包括初中数学爱好者，可以解答部分IMO试题；第三部分，精选了国内外的一些IMO预选题、培训题、优秀试题，分代数、数论、不等式、平面几何、立体几何、组合数学六类编辑在一起，一方面供IMO研究者、教练了解奥林匹克数学的概况，同时也为选手提供了若干参考资料。

1990年，第31届IMO将由中国举办，我们仅以此书同北京以及全国数学爱好者一道，热情地迎接这一届比赛。

本书可供数学奥林匹克教练、选手使用，同时对广大中学数学教师、广大中学生数学爱好者，师范学院校的大学生也是很好的参考资料。

国际数学奥林匹克 30 年

——为迎接 1990 年第 31 届 IMO 在我国举办

梅向明 主编

周春荔 张成恒 吴建平 庞东辉 编

中国计量出版社出版

北京和平里 11 区 7 号

中国计量出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本 787×1092/32 印张 9.375 字数 212 千字

1989 年 12 月第 1 版 1989 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5 000

ISBN 7-5026-0281-X/G·31

定价 4.10 元

前 言

为了迎接 1990 年在我国举行的第 31 届国际中学生数学奥林匹克竞赛 (简称 IMO), 我们谨把这本书奉献给我国广大青少年, 为了使你们能了解国际中学数学的水平, 特别是对于有希望成为参加竞赛选手的优秀青少年们, 希望你们加倍努力, 使我国能在第 31 届 IMO 中取得优异的成绩。

IMO 首先是由东欧国家发起的, 首届 IMO 由罗马尼亚做东道主, 在 1959 年 7 月 22 日到 30 日举行, 当时只有 6 个国家参加, 以后 IMO 每年举办一次, 由各国轮流做东道主, 一般地在 7 月上旬举行。到今年已举办 30 届, 由联邦德国做东道国, 参加国家已达 50 个, 遍布世界五大洲。被邀请参加 IMO 的国家可以派一个代表队, 其中包括 6 名选手, 一个领队和一个副领队兼教练。比赛分两天进行, 每天 4 个半小时, 考三道题, 计时每题 7 分, 个人最高分数是 42 分, 全队最高分数是 252 分。1987 年第 28 届 IMO 团体总分是罗马尼亚第一, 6 名选手共得 250 分。

我国从 1985 年起应邀参加 IMO。1985 年第 26 届 IMO 在芬兰举行, 这一年我国只派出了观察小组, 其中包括两名选手。1986 年第 27 届, 在波兰举行, 我国正式参加 IMO, 我国首战就取得了胜利, 全队总分是 177 分, 团体总分第三。6 名选手中有 3 名得金牌, 1 名得银牌, 1 名得铜牌。1987 年我国再一次参加在古巴举行的第 28 届 IMO, 这次全

队获得总分 200 分，6 名选手全部获奖，两名得金牌，两名得银牌，两名得铜牌，但是团体总分降为第八。去年我国参加了在澳大利亚举行的第 29 届 IMO，战果辉煌，全队获得总分 202 分，团体总分跃居第二，6 名选手中 2 名得金牌，4 名得银牌。今年我国参加了在联邦德国举行的第 30 届 IMO，取得了最出色的成绩，全队获得总分 237 分，团体总分名列第一，6 名选手中 4 名得金牌，2 名得银牌。我们国家有很好的数学基础，又有一支庞大的青少年数学爱好者队伍，因此，在 IMO 中能够取得这么优异的成绩，我们有理由相信，在明年第 31 届 IMO 中将继续取得更优异的成绩。但是国际竞赛竞争很激烈，如果不继续努力，优势是不容易保持的。很多国家，现在都在迎头赶上，我们千万不能掉以轻心。

我们国家对于参加 IMO 的代表队的选拔是采取三轮制。第一轮是全国各省市的高中数学联赛，从全国参加高中数学竞赛的青少年中选取 80 名左右成绩领先的参加下一轮的竞争。第二轮是在寒假期间举办全国中学生数学冬令营，把第一轮中 80 余名优胜者集中起来进行复试。这次复试是模拟 IMO 的考试，即同样是考两天，每天考四个半小时，每天考三道题。从中选出 20 名左右参加最后一轮的选手。这 20 名优胜者将先集训三个月，然后在“五一”以后举行最后一次选拔赛。由国家指定的领队和教练从这 20 名左右青少年中主要根据选拔赛的成绩并参照集训期间的表现，从中确定 6 名选手正式组成代表队。这 6 名选手将再集训两个月，到 7 月初出国参加 IMO 的竞赛。

广大青少年中的数学爱好者们，投身到迎接 IMO 的数学活动中来吧！不管你是否能被选拔为选手，数学课外活动将会提高你们对数学的兴趣，改善你们的数学素质，这对你们

将来参加祖国的社会主义建设将是最宝贵的知识财富。

最后，我必须指出，周春荔同志为本书的编写付出了最辛勤的劳动。

梅向明

1988年9月于北京师范学院

目 录

第一章 国际数学奥林匹克简况	(1)
第二章 IMO 试题及解答	(10)
第一届 (1959 罗马尼亚)	(10)
第二届 (1960 罗马尼亚)	(16)
第三届 (1961 匈牙利)	(25)
第四届 (1962 捷克斯洛伐克)	(34)
第五届 (1963 波兰)	(42)
第六届 (1964 苏联)	(49)
第七届 (1965 民主德国)	(57)
第八届 (1966 保加利亚)	(65)
第九届 (1967 南斯拉夫)	(72)
第十届 (1968 苏联)	(80)
第十一届 (1969 罗马尼亚)	(88)
第十二届 (1970 匈牙利)	(101)
第十三届 (1971 捷克斯洛伐克)	(111)
第十四届 (1972 波兰)	(122)
第十五届 (1973 苏联)	(123)
第十六届 (1974 民主德国)	(135)
第十七届 (1975 保加利亚)	(142)
第十八届 (1976 奥地利)	(150)
第十九届 (1977 南斯拉夫)	(160)
第二十届 (1978 罗马尼亚)	(168)
第二十一届 (1979 英国)	(177)
第二十二届 (1981 美国)	(186)

第二十三届 (1982 匈牙利)	(191)
第二十四届 (1983 法国)	(198)
第二十五届 (1984 捷克斯洛伐克)	(203)
第二十六届 (1985 芬兰)	(207)
第二十七届 (1986 波兰)	(213)
第二十八届 (1987 古巴)	(218)
第二十九届 (1988 澳大利亚)	(222)
第三十届 (1989 联邦德国)	(228)
第三章 培训练习题选析	(236)
I 代数	(236)
II 数论	(245)
III 不等式	(253)
IV 平面几何	(262)
V 立体几何	(271)
VI 组合问题	(283)

第一章

国际数学奥林匹克简况

国际数学奥林匹克 (International Mathematical Olympiad) 简称 IMO, 是一种国际性的以数学为内容、中学生为对象的竞赛活动, 至今已经三十年了。

(一) IMO 的由来

数学是锻炼思维的体操, 以数学为内容的竞赛已有悠久的历史。在公元 16 世纪意大利的 Tartaglia 和 Cardano 曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞争。在十九世纪, 法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答, 通过有奖比赛而得到重要的数学发现。然而这些竞赛的参加者并不是以青年学生为主要对象的。

国际数学奥林匹克竞赛的权威人士认为, 以激发数学才能和引起数学兴趣为目的, 中学生们自愿参加的数学竞赛, 是从匈牙利开始的。

1894 年, 著名数学家、物理学家 L. Eötvös 男爵就任匈牙利文化大臣, 从这一年起, 便开始了为选拔有数学才能的学生而进行的国家考试。开始命名为 Eötvös 竞赛, 后来又以对这一竞赛做出了贡献的 J. Kürschak 的名字命名。这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用。后来许多有成

就的数学家、科学家都曾这一竞赛的优胜者。例如 1897 年的优胜者利波特·费叶尔，在富利叶级数的可和性理论方面做出了许多出色工作，1898 年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师，对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献。1903 年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度。马赛尔·黎斯是 1904 年的优胜者，在泛函分析中提出了黎斯凸性定理，而 1912 年的优胜者嘎波尔·塞格，他和波里亚合著的《分析中的定理和问题》，至今仍享有盛名。

将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论，把这种竞赛活动命名为“数学奥林匹克”的是苏联。在 1934 年和 1935 年，列宁格勒与莫斯科国立大学分别组织了地区性的中学数学奥林匹克，并将成绩优秀者推荐到大学。例如莫斯科数学奥林匹克自 1935 年创办以来，除卫国战争时暂停三年外，一直延续至今，并且苏联的著名数学家诸如 Л.С. 亚历山大洛夫，А.Н. 柯尔莫柯洛夫等都主持过这一竞赛活动。后来，竞赛逐渐扩大到苏联各地，形成了先在学校，继之在地区，然后在州共和国，最后形成全苏数学奥林匹克的分阶段式的竞赛制度。

这种分阶段式的数学奥林匹克竞赛在第二次世界大战后相继普及到东欧诸国。从国内竞赛再往前推进一步，自然地就会形成更高一层次的国际性的数学竞赛。1956 年由罗马尼亚的罗曼 (Roman) 教授发起第一次国际数学奥林匹克，并于 1959 年 7 月，在罗马尼亚的布拉索夫 (Brasov) 得以正式举行。

(二) IMO 的发展

第一届国际数学奥林匹克于 1959 年夏天在罗马尼亚古

都布拉索夫举行。保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派了由 8 名学生组成的代表队，苏联（实际上是莫斯科）派了 4 名学生组成的代表队。以后几年，参加竞赛国家并未增多。但在 1963 年和 1964 年，南斯拉夫和蒙古先后参加，1965 年芬兰参加，1967 年法国、英国、意大利和瑞典参加。从此参加的国家逐渐增多。1971 年共有 15 个队，1977 年共有 21 个队，1981 年共有 27 个队，1984 年共有 34 个队，1988 年已达到 49 个队。由于各种原因，有些国家未能连续地参加，只有罗马尼亚、捷克与保加利亚从未缺席过。我国从 1985 年派两名学生参加了第 26 届 IMO，从 1986 年起每年都派 6 名学生参加 IMO。

虽然国际数学奥林匹克的参加国不断增加，竞赛规模不断扩大，但是，在 1980 年以前，并没有一个统一的国际机构负责组织协调工作。最初，基本上是由最早参加国际数学竞赛的几个东欧国家依次承担组织工作和所需经费。随着许多新加入国家的增多，负担不再压在少数国家身上，1976 年奥地利成了第一个主办 IMO 的西欧国家，此后英国主办了 1979 年的第 21 届 IMO。

但是 1980 年，IMO 没能举行。原因是没有国家主动发出邀请，又没有一个国际性机构使可能的主办国及参赛国了解这一情况，这使人们清楚地认识到建立一个国际机构来协调组织每年的 IMO 是十分必要的。这样，在 1981 年 4 月成立了国际数学奥林匹克场所委员会，每年确定以主办国为中心的组织委员会。自此，国际数学奥林匹克的组织工作得到了保证。近年来，每届竞赛还确定了会徽。我国通过这个委员会申请并被批准主办 1990 年的第 31 届国际数学奥林匹克。

(三) IMO 的竞赛办法

参赛国的代表队由正、副领队和若干名学生构成。开始一段时期，每队学生数最多是 8 人。在 1982 年每队学生数减到 4 人，从 1983 年起，每队队员人数稳定在 6 个人。

每届竞赛的试题个数并不多，除第 2 届、第 4 届为 7 个题外，其余每届都是 6 个题。考试安排在两天内分两次进行，每次时间是在 3~5 个小时之间，近几届一般是 4.5 个小时。

试题要求学生独立完成，这种竞赛办法保证每个学生有充分时间独立解决为数不多的“难题”。

(四) IMO 的试题性质

每次竞赛的试题是从各参赛国事先提供的预选试题中，由主试委员会（东道国及参赛国正领队组成）评选出六或七道试题。

最初，所选试题都是各参赛国中学数学内容的共有的部分。但现在，试题的性质已发生了很大变化。试题已不限定在各国高中的数学范围，而更多的是一般中学不怎么提到的领域。如整数论、组合论、一般几何学、不等式等方面。而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识多少，而在于对数学本质的洞察力及是否具有创造力和数学的机智。

由于 IMO 试题的上述特点，有人认为 IMO 试题代表的是一种特殊的数学，可以称之为“奥林匹克数学”。

(五) IMO 的评分及奖励

试卷首先由各国的正、副领队评判，然后与组织者推荐的协调员（每个协调员负责一个试题的评分）协商，对评分取得一致。如有分歧，可请主试委员会仲裁。对主办国的每个学生的试题解答及协调结果，还必须经过提供该试题国家的领队认可。

每个题的分数，依试题的难易而定，较易的题，有时满分为4分，而对一些难题满分则可为9分，近年来，每届都是6个试题，每题都是7分。如果解答部分正确，也酌情给分。

因为国际数学奥林匹克的目的是鼓励更多的有才能的青年，因此，优胜奖的数目是比较多的，在评奖时，它并不排出个人第一、第二的顺序，而是根据分数段评选出一等奖，二等奖和三等奖的获得者，从历年获奖总人数看，得奖人数为参加人数的50%，一、二、三等奖获得者的比例平均为1:2:3。除此之外，主试委员会还对某个试题做出了非常漂亮或在数学上有意义的解答的学生授予特别奖。对这种奖的评定非常严格，所以获此殊荣的人并不多。

从原则上说，IMO不是队间的比赛，所有参加者独立解题，因此只考虑对个人的解答奖励。但由于各队队员人数一样多，不可避免地导致计算各队的总分而加以比较。当IMO的结果在各种数学刊物上发表时，人们既喜欢看到个别获奖者的名单，又希望看到各参赛国的总成绩。

(六) IMO 的光明前景

国际数学奥林匹克已经不是什么新奇的事物了，它对数

学教育的促进作用也已为人们所公认，对发现数学人才有着不可忽视的作用。通过在数学刊物上的一些表面观察，可以认为很多IMO的优胜者确实在从事数学工作。以1965年为例，当年的IMO一等奖的8名获得者都发表了数学研究成果，12名二等奖获得者中至少7个人，17名三等奖获得者中有8个人发表了数学研究成果。在世界数学家大会上作1小时的邀请报告者中，至少有8个人是IMO的优胜者，在获得相当于诺贝尔奖的数学菲尔兹奖的人中，也有1个人是IMO的优胜者。总之IMO的作用已为历史所证实，IMO越来越被世人所了解。

我们认为，今后IMO的前景是光明的，首先，由于国际数学奥林匹克场所委员会的诞生，有了负责协调每届竞赛主办国的机构，从而在组织上保证了数学奥林匹克的连续性，第二，世界各国、各地的数学奥林匹克活动广泛持续开展，是IMO深入蓬勃发展的基础。除了前面我们谈及的匈牙利、苏联以及波兰、罗马尼亚、保加利亚等东欧国家的数学竞赛在长期持续进行之外，从第五届国际数学教育年会会议录中还可看到起始于1966年的南非数学奥林匹克，起始于1980年的哥伦比亚数学奥林匹克，创始于1976年的苏格兰数学竞赛，始创于1963年的加拿大数学竞赛，其中以下以数学家名字命名的考试是可供参考的（括号里的数字分别表示年级，试题数目和答卷时间），它们是：高斯（7—8，26，60），帕斯卡（9，25，60），凯莱（10，25，60），费尔玛（11，25，60），欧几里德（12，21，150）和笛卡儿（13，10，150），前四个竞赛的题目是选择题，欧几里德试题由15个选择题和6个论述题构成，笛卡儿试题由10个论述题组成。澳大利亚数学竞赛（AMC）在1978年变成了全国性竞赛，并在1980年扩展到南太平洋国家。美国的数学竞赛，起

初是1950年开始的 AHSME (美国高中数学考试), 1972年起举办 US AMO (美国数学奥林匹克), 1983年举办 AIME (美国数学邀请赛) 及1985年12月首次举办的 AJHSME (美国初中数学考试)。总之世界上许多国家都已形成了有自己特色的各类各层次的数学竞赛的传统。而且, 国家之间的各种数学竞赛的横向交流也日趋频繁。这种情况表明了国际数学奥林匹克有着良好的群众基础, IMO 事业兴旺发达!

(七) 中国走向 IMO

我国的中学生数学竞赛始于1956年。1955年, 中国数学会常务理事会决定试办数学竞赛。1956年在北京、上海、武汉分别举办了首届数学竞赛。以后, 天津、西安、成都、福州、合肥、南京、杭州及江苏等省市在文革前都间断地试办过数学竞赛。

1978年, 经国务院批准, 教育部和中国科协决定举办部分省市中学数学竞赛。参加的省市有北京、上海、天津、安徽、广东、辽宁、四川、陕西。与此同时, 许多省、市都恢复了数学竞赛。中学生数学竞赛比“文革”前有着更大的规模和声势。到了1979年, 全国各省市分别举行了数学竞赛, 并且举办了全国中学生数学竞赛(除台湾省外当时的二十九个省市自治区参加)。1980年, 全国竞赛暂停一年。1981年10月举办了有二十五省市自治区参加的联合数学竞赛(高中), 这一届是由北京数学会负责主办的, 此后全国高中联合数学竞赛由各省市自治区轮流组办; 1984年5月由天津主办有十四个省市参加的“天津初中数学邀请赛”, 从1985年起正式由各省轮流举办全国初中联合数学竞赛, 这些竞赛

都是由中国数学会普及工作委员会负责协调，由各省市自治区轮流负责组办，1985年我国数学家华罗庚教授逝世，为了纪念华老，激发青少年向科学进军，于1986年举办了首届华罗庚金杯少年数学邀请赛，并且议定以后每两年举办一次。力争从小抓起，早发现数学人才。

1985年开始我国首次派观察小组(其中包括两名队员)参加了第26届IMO，开始步入世界IMO的殿堂，从1986年开始，每年都派出正式代表队参加IMO。几年来我国队员取得了良好的战绩。列举如下：

届次	时 间	地 点	代表队 人数	获 奖 人数	1等 人数	2等 人数	3等 人数	总分 名次
26届	1985年 6.29—7.10	芬 兰 赫尔辛基	2人	1人	0	0	1	16
27届	1986年 7月8—14日	波 兰 华 沙	6人	5人	3	1	1	4
28届	1987年 7月10—15日	古 巴 哈瓦那	6人	6人	2	2	2	8
29届	1988年 7月9—19日	澳大利 亚堪培拉	6人	6人	2	4	0	2
30届	1989年 7月13—24日	联邦德 国不伦瑞克	6人	6人	4	2	0	1

从表中可见，从1986年我国正式派代表队参加IMO之后，即跻身于IMO团体总分前十名之内，特别是今年我国的代表队，在联邦德国举行的IMO中取得了团体总分第1名。这反映了我国中学数学教育有着很好的基础。

数学是我国人民所擅长的学科，世界著名数学家陈省身教授预言21世纪，中国应成为数学大国，为争取21世纪中国成为世界数学大国，真正走向世界数学的前列，今天通过

数学奥林匹克活动激发广大青少年的数学才能，发现培养广大的数学人才是非常重要的工作。目前，国内许多省市已相继成立了从小学到高中的数学奥林匹克学校，每年数学夏令营、冬令营等活动吸引了越来越多的青少年数学爱好者，深入扎实的普及才能有大范围的跃进和提高。中华民族的数学人才必将随着数学奥林匹克活动的开展而迅速地成长，我国的数学事业必将后继有人而兴旺发达。