高校课程 学 练 考 系列丛书

高等数学（上册）

学 练 考

Learn Practise Examine

学练考

- 学·练·考三维辅导
- 知识要点一目了然
- 重点难点剖析透彻
- 典型例题解答点评
- 主流教材习题精解
- 学习效果两级训练

何光明 丛书主编
黄昭强 陆克斌 朱家明 江 安 编著

学练考

清华大学出版社

高校课程学·练·考系列丛书

高等数学(上册)学·练·考

何光明　丛书主编
黄昭强　陆克斌　朱家明　江　安　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书按照同济大学编写的《高等数学(上册)》(第五版)顺序安排内容，分为 7 章和 3 个附录，每章分 5 个板块：本章知识结构图、疑难解惑、典型例题与考研题分析、同步教材习题全解、两级训练题。本书从指导学生学习和应试(课程考试或考研)的角度出发，通过对重点难点及易混淆的知识点的详细解释、典型例题的解答与总结，帮助读者理解基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析问题的能力，旨在使读者对高等数学真正做到融会贯通、考试轻松。

本书系统全面、重点突出、难点解析清楚、注重解题思路及技巧的培养，具有较强的实用性，可供本(专)科学生学习高等数学阅读和参考；对于自学者和有志考研的人士，本书更是良师益友；对于从事高等数学教学的教师，也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)学・练・考/黄昭强，陆克斌，朱家明，江安编著.
—北京：清华大学出版社，2004
(高校课程学・练・考系列丛书/何光明主编)
ISBN 7-302-07947-1

I. 高… II. ①黄… ②陆… ③朱… ④江… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 001617 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：章忆文
文稿编辑：刘　颖
封面设计：付剑飞
印 刷 者：北京国马印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185 × 260　**印张**：22.75　**字数**：540 千字
版　　次：2004 年 3 月第 1 版　2004 年 3 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-07947-1/O・340
印　　数：1 ~ 5000
定　　价：29.00 元

扬起风帆，成就梦想

(丛书序)

21 世纪人类已迈入“知识经济”时代，科学技术正发生着深刻的变革，社会对德才兼备高素质专业人才的需求更加迫切。如何培养出符合时代要求的优秀人才，是全社会尤其是高等院校面临的一项急迫而现实的任务。

为了配合当前高等院校注重培养高素质知识型人才的需求，也为了给同学们提供一套行之有效的课程学习辅导书，我们在广泛调研并听取很多专家及学生们建议的基础上，组织编写了这套《高校课程学·练·考系列》丛书。本套丛书作为学生正规课本的辅导用书，对课程的各方面知识不做细致讲解，而是抽取重点、难点和易于混淆的方面进行强调和解惑；再配以典型例题和考研题、考级题解析，提高读者分析问题与解决问题的实际能力；每章都辅以对应习题(达标训练题和考研挑战题、考级题)，以助读者达到即学、即练、即会的目的；另外，每章都精选主流教材的课后习题进行解答，帮助读者消化和巩固所学知识。

首推书目

本套丛书以全新的视角，陆续推出涵盖高等院校主干课程的辅导用书。首推 12 本，书目如下：

(1) 概率论与数理统计学·练·考

(2) 高等数学(上册)学·练·考

(3) 高等数学(下册)学·练·考

(4) 线性代数学·练·考

(5) 数据结构学·练·考

(6) 操作系统学·练·考

(7) 离散数学学·练·考

(8) C 语言学·练·考

(9) 电子技术基础(模拟部分)学·练·考

(10) 电子技术基础(数字部分)学·练·考

(11) 电路学·练·考

(12) 自动控制原理学·练·考

丛书特色

1. 丛书以国家教育部制定的教学大纲及研究生入学考试大纲为依据，按照高等学校通用的主流教材为主线，注重基础知识的学习与解题能力的提高，既保证了课程学习的循序渐进，又能对复习迎考与考研行之有效。

2. 丛书从“学、练、考”3 个角度进行立体辅导，帮助读者理解基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析问题的能力，使读者对所学课程真正做到融会贯通、考试轻松。

3. 丛书基本按照正规教学课本顺序编排，每章设计了 5 个板块，分别是：本章知识结构图、疑难解惑、典型例题与考研题分析、重要习题精选精解、两级训练题。各内容安排为：

- 本章知识结构图：用图表的形式列出本章各知识点的有机联系，便于记忆、复习。
- 疑难解惑：突出核心知识，对重点、难点内容进行解释与讲述，使读者掌握问题的本质。
- 典型例题与考研题分析：精选出常考题型与考研题进行解析，增强读者解题能力。
- 重要习题精选精解：对主流教材的重要习题做出解答，便于读者复习与检查。
- 两级训练题：分达标训练题与考研挑战题两个级别，通过两级训练，读者可以进一步加深对所学内容的理解，旨在达到巩固提高的目的。

4. 丛书重点定位在疑难解惑与解题方法上，不仅授人以“鱼”，更在于授人以“渔”。丛书对课程学习过程中可能遇到的疑难点进行了细致深入的分析，突出解决易混淆和忽略的问题；对常见题型进行完整的解答与总结，注重解题思路及技巧的培养，旨在使读者达到茅塞顿开、触类旁通、举一反三之功效。

5. 丛书对主流教材的较难习题(或全部习题)进行了解答，并且每章均配有相应数额的训练题，最后还提供了几套完整的模拟试题，所有习题及模拟试题均给出了解答或提示，便于读者自测提高。

关于作者

丛书聘请执教多年，且有较高学术造诣的名师编写。他们长期从事有关的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对相应课程有较深的体会与独到的见解，本丛书凝聚了他们多年的教学经验和心血。

读者定位

本套丛书特别适合参加课程学习、考试(课程考试、考研、考级)的读者群阅读，同时可供高等院校教师作为教学参考使用。

互动交流

读者的进步，我们的心愿。如果发现书中有任何疑惑之处，或有建议或意见，请与我们交流。联系信箱：gmkeji@163.com。

特别致谢

在此，对丛书所选用的参考文献的著作者，及丛书所引用习题、试题的命题老师表示真诚的感谢。感谢为本丛书出版提供帮助的各界人士。

乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海。愿这套书为在知识海洋中奋进的学子们助一臂之力！

丛书主编　何光明

2004年1月

丛书编委会

前　言

高等数学是高校理工专业最主要的基础课之一，也是硕士学位研究生考试中指定的全国统考科目，其重要性不言而喻。为帮助广大学生和自学者学好这门课，并为他们备战应考(课程考试与研究生入学考试)提供辅导，我们编写了这本《高等数学(上册)学·练·考》。

本书注重介绍高等数学中常用解题思路与技巧，注重解题方法的归纳总结，举一反三，一题多解，希望以此来提高同学们分析和解决问题的能力。

本书与同济大学编写的教材《高等数学(上册)》(第五版)相配套，给出该书的全部习题解答，完全按教材章节编写。全书分 7 个章节，每章包括以下 5 个方面的内容：

(1) 重点知识结构图：提纲挈领，逻辑性强，主要知识点一目了然。

(2) 疑难解惑：抓住易混淆知识点，突出重点、难点，深化理解，拓宽知识面。

(3) 典型例题与考研题分析：典型例题及考研题题型全面，一题多解，方法灵活，举一反三，开阔视野，使读者了解考研的题型和难度，做到有的放矢。

(4) 同步教材习题全解：给出同步教材习题解答，便于读者自我检测。

(5) 两级训练题：循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

本书由黄昭强、陆克斌、朱家明、江安编写，全书由张凌云等审校。参与本书编写与协助工作的还有杨治辉、孙多如、李虎军、江安、倪志强、杨玲、朱家明、孙建东、何光明等，在此表示感谢！

由于水平有限，书中难免有不足和错误之处，恳请读者指正。

编者

2003 年 11 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　本章知识结构图

为便于读者学习，我们首先将本章重要知识点进行了归类，列出如图 1.1 所示的知识结构图.

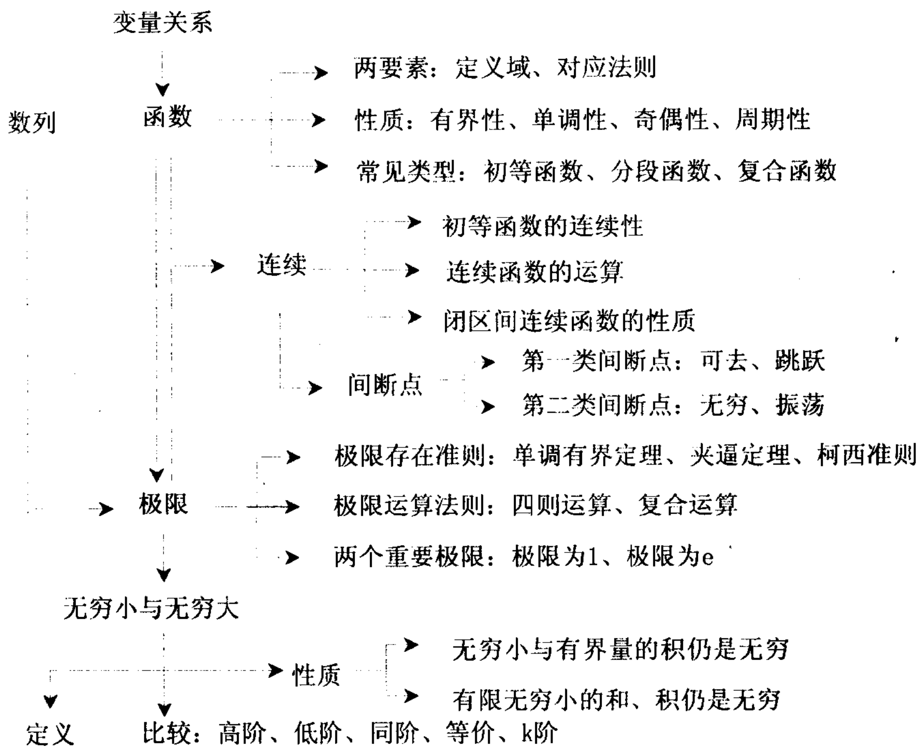

图 1.1　函数与极限

1.2　疑 难 解 惑

问题 1.2.1　有人说：数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示当 n 充分大后，x_n 越来越接近于 a. 这种说法对吗？

【指点迷津】

这种说法不妥. 应当说，“当 n 充分大时，x_n 与 a 之差的绝对值小于预先给定的任意

正数ε”．或者说“当n越来越大时，x_n越来越无限接近于a”．因为越来越接近于a，只能理解为$|x_n-a|$单调减少，而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$则表示为$|x_n-a|$趋于0.

例如$y_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，但$|y_n-0|=y_n$并非单调减少，即$y_n$并非越来越接近于0.

所以数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示：当$n$无限增大时，$x_n$任意地(或无限地)接近于$a$；或者说，只要$n$充分大，$|x_n-a|$可以任意小.

问题 1.2.2　函数$f(x)$当$x\to x_0$时不以A为极限的分析定义应怎样表述？并证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

【指点迷津】

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$的分析定义是：存在一个正数$\varepsilon_1$，对任意给定的$\delta>0$，总有点$x_1$，满足$0<|x_1-x_0|<\delta$，使$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_1$．下面证明$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

由上面的表述可知，证明的要求是找出符合要求的ε_1和x_1．为此我们分析函数$f(x)=x^2$在点$x_0=2$的去心邻域$U(\hat{2},\delta)$内的函数值，可知在$U(\hat{2},\delta)$内总可找到大于4的函数值．于是可取$\varepsilon_1\leqslant 4-A=4-3=1$，并在$U(\hat{2},\delta)$内找出一点$x_1$，使$f(x_1)>4$．由此分析，给出证明如下：

取$\varepsilon_1=1$，任给$\delta>0$，取$x_1=2+\dfrac{\delta}{2}\in U(\hat{2},\delta)$，有$|f(x_1)-A|=|x_1^2-3|=\left|\left(2+\dfrac{\delta}{2}\right)^2-3\right|>1=\varepsilon_1$．所以$\lim\limits_{x\to 2}x^2\neq 3$.

问题 1.2.3　数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$定义中的$N=N(\varepsilon)$是不是$\varepsilon$的函数？

【指点迷津】

$N=N(\varepsilon)$仅表示N与ε有关，并不表示N是ε的函数．因为对给定的ε，如果存在一个满足要求的N，就必然有无限多个满足要求的N，因此，$N(\varepsilon)$并不确定．所以，按函数定义知N不是ε的函数.

问题 1.2.4　怎样证明数列发散？

【指点迷津】

证明数列发散的常用方法是：

(1)　找出$\{x_n\}$的一个发散子列.

(2)　找出$\{x_n\}$的两个有不同极限的子列.

这是因为：

(1)　设$\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的一个发散子列．用反证法，例如$\{x_n\}$收敛，则$\{x_{n_k}\}$也收敛，这

与假设 $\{x_{n_k}\}$ 发散相矛盾．所以 $\{x_n\}$ 发散．

(2)　设 $\{x_{p_k}\}$、$\{x_{q_k}\}$ 为 $\{x_n\}$ 的两个子列，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{p_k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{q_k}=b$，且 $a\neq b$．假如 $\{x_n\}$ 收敛，则可设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$，于是 $a=c$，$b=c$，这与 $a\neq b$ 矛盾．所以 $\{x_n\}$ 发散．

例 1　讨论数列 $\{x_n\}=\{2^{(-1)^n n}\}$ 的收敛性．

解　因 $x_{2k}=2^{2k}$，而当 $k\to\infty$ 时，$x_{2k}\to\infty$．即子列 x_{2k} 发散，所以数列 $\{x_n\}$ 发散．

例 2　讨论数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 的收敛性．

解　$x_{4k}=\sin k\pi$，而当 $k\to\infty$ 时，$x_{4k}\to 0$，$x_{8k+2}=\sin\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi=1\to 1$，故数列 $\{x_n\}$ 发散．

问题 1.2.5　*怎样证明数列 $\{x_n\}$ 无界？*

【指点迷津】

证明数列无界的常用方法是找出它的一个无穷大子列 $\{x_{n_k}\}$，即 $|x_{n_k}|\to\infty$．我们有下述定理：

定理　数列 $\{x_n\}$ 无界的充分必要条件是存在无穷大子列．

证　条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性．设数列 $\{x_n\}$ 无界，则对任给 $M>0$，存在 n_0，使 $|x_{n_0}|>M$．取 $M_1=2$，有 n_1，使 $|x_{n_1}|>M_1$；取 $M_2=2^2$，因数列去掉前项后留下的数列仍然无界，故有 $n_2>n_1$，使 $|x_{n_2}|>M_2$；如此继续，即得子列 $\{x_{n_k}\}$，且有 $|x_{n_k}|>M_k=2^k\to+\infty\ (k\to\infty)$，即子列 $\{x_{n_k}\}$ 为无穷大．

例　证明数列 $\{x_n\}=\{n^{(-1)^n}\}$ 无界．

证　因为 $x_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k$，而当 $k\to\infty$ 时，$x_{2k}\to\infty$，所以 $\{x_n\}$ 无界．

问题 1.2.6　*为什么在高等数学中三角函数的角的度量通常采用弧度制而不采用角度制？*

【指点迷津】

这是因为三角函数的许多重要性质，如等价无穷小、连续性以及今后要学的求导数公式、泰勒展开式等，都是直接或间接地建立在重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的基础上的．而在证明这个极限的过程中，要用到圆弧长的计算公式 $l=xR$，这里圆心角 x 用的是弧度．如果角 x 的度量采用角度制，那么将有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{180}$，这是因为 $x^\circ=\dfrac{\pi}{180}x$，$\sin x^\circ=\sin\dfrac{\pi x}{180}$，所以 $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin(\pi x/180)}{x}=\dfrac{\sin(\pi/180)x}{(\pi/180)x}\cdot\dfrac{\pi}{180}$．当 $\sin x$ 中的 x 采用角度制，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{180}$．从而许多重要结论如 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$；$(\sin x)'=\cos x$ 等就都要改变，代替它们的将是繁杂的

表达式，例如 $(\sin x)'=\dfrac{\pi}{180}\cos x$，这会带来许多不便．因此在高等数学中的三角函数的角的度量均采用弧度制．

问题 1.2.7 讨论函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？求左、右极限是不是都需用定义去求？

【指点迷津】

一般说，讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限，都应先看一看单侧极限的情况．如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 的两侧变化趋势一致，则不必分开研究；如果两侧变化趋势可能有差别，就应分别研究左、右极限．

例如求分段函数在分段点处的极限时，必须研究左、右极限；有些三角函数在特殊点的左、右极限不一样，例如 $\tan x$ 在 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时左、右极限不一样；有些反三角函数和指数函数也有类似的情况，例如 $\arctan\dfrac{1}{x}$、$e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x\to 0$ 时左、右极限都不一样．

求左、右极限大都不必直接用定义去求．举例如下：

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$．

解 当 $x\to -0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to -0}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to +0$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$．由于左、右极限不相等，因此所求极限不存在．

问题 1.2.8 如果 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，那么有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，对吗？

【指点迷津】

这样的结论是不一定成立的．

例如设 $f(u)=\begin{cases}2, & u\neq 0\\ 0, & u=0\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$．

因 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0=u_0$，而 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=2$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]\neq\lim\limits_{u\to 0}f(u)$．为什么会产生这种情形呢？复合函数极限定理(或称极限的变量代换法则)说：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，而函数 $f(u)$ 在 u_0 连续，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$．把问题与这一定理对照，可见条件的差别是 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 与 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$．按 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述为：

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|u-u_0|<\delta$ 时有 $|f(u)-A|<\varepsilon$；

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|u-u_0|<\delta$ 时有 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$．

这里仅差一点 u_0：$f(u)$ 连续则允许 $u=u_0$，$f(u)$ 不连续则不考虑 $u=u_0$．因此，如果增加条件，“当 $x\neq x_0$ 时 $\varphi(x)\neq u_0$”结论即能成立．