高等院校力学类系列教材
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

陆明万　　罗学富
Lu Mingwan　　Luo Xuefu

弹性理论基础

Foundations of Elasticity

第 2 版
Second Edition
上册
I

TUP
清华大学出版社

Springer
施普林格出版社

高等院校力学类系列教材

弹性理论基础

（第2版）

上册

陆明万　罗学富

清华大学出版社　施普林格出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书(第 1 版)经教育部高等工业学校工程力学专业教学指导委员会审定,推荐为工程力学专业教学用书。1995 年获全国优秀教材二等奖。第 2 版分上、下两册出版,对第 1 版内容进行了全面的修订、调整、删减和增补。

书中以笛卡儿张量为工具系统阐述经典弹性力学的基本原理和方法,反映弹性力学近代研究成果。在讲述弹性力学各专门问题的章节中注意介绍实用解法和联系工程实际。精选典型解例,讲解解题思路和技巧,附设习题供练习。附录中讲述张量分析等必要的数学预备知识。上册主要内容有:应力理论,应变理论,本构关系,弹性理论的微分提法及一般原理,平面问题及柱形杆扭转问题,张量分析附录。下册主要内容有:复变函数解法,空间问题,能量原理,平板弯曲,热应力,弹性波,以及解析函数和变分法两个附录。

本书可作为工程力学专业本科生及有关专业研究生教材,亦可供从事强度计算和研究工作的科技人员参考。

书　名:弹性理论基础(第 2 版)上册
作　者:陆明万　罗学富
出版者:清华大学出版社　施普林格出版社
(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:清华大学印刷厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:787×1092 1/16　印张:16.5　字数:328 千字
版　次:2001 年 8 月第 2 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　号:ISBN-7-302-04555-0/O・258
印　数:0001～6000
定　价:19.00 元

第 2 版前言

本书出版后被全国多所高等院校和研究生院选为工程力学专业本科生和有关工程专业硕士研究生的教材或教学参考书。

根据各校在使用本书中积累的新的教学经验和提出的改进建议，本书第 2 版对第 1 版进行了全面的修订、调整、删减和增补。清华大学黄克智院士、姚振汉教授、薛明德教授，复旦大学金吾根教授，天津大学蔡宗熙教授，汕头大学谢慧才教授，铁道科学研究院刘越高工等都曾根据自己丰富的教学经验对本书提出过宝贵建议，在此我们表示衷心的感谢。

本书第 2 版分上、下两册出版。上册集中了采用笛卡儿张量讲述的弹性力学基本理论以及弹性力学中最典型的两类专门问题。包括绪论、应力理论、应变理论、本构关系、弹性理论的微分提法及一般原理、柱形杆问题和平面问题，共 7 章。附录“张量分析引论”为读者提供了简明、实用的数学预备知识。对曾经学过弹性力学简明教程，希望进一步学习运用张量分析工具掌握弹性力学一般理论的读者来说，上册是一本较好的入门教材。关于平面问题的论述，从三维基本方程出发严格地讨论了平面应力、平面应变状态的存在条件和判断方法，定义了适用面更广的广义平面应变状态。下册包括能量原理（即弹性理论的变分提法）、复变函数解法以及空间问题、平板弯曲问题、热应力、弹性波等 4 类专门问题。其中，作为弹性理论近似解法（例如有限单元法）之理论基础的能量原理是弹性力学中必修的核心内容；其余专门问题也都是相关应用领域的重要理论基础，但是因学时有限，各专业可以根据自己的特点选讲。附录 A“解析函数的基本性质及运算”和附录 B“泛函极值与变分法”分别为复变函数解法和能量原理两章提供了必备的数学知识。

本书内容较为丰富，除弹性力学基本教学要求外，还引进一些弹性力学近代研究

成果以及供研究生和优秀生因材施教用的补充内容。在第 2 版中基本内容用**宋体字**印刷，补充内容用**楷体字**印刷。

作者衷心感谢潘真微女士、陈朝晖先生为本书第 1、2 版的精心编辑和及时出版所付出的辛勤劳动。

陆明万　罗学富

于北京清华园

2001 年 5 月

第1版前言

本书是为工程力学专业本科生、有关专业硕士研究生以及从事强度计算和研究工作的科技人员编写的弹性力学教材，也可作为各工程专业弹性力学课程的教学参考书。

在内容选择方面本书贯彻“高等工业学校工程力学专业教材委员会”拟定的基本精神，努力做到：

(1) 在系统讲授经典弹性力学基本概念、基本原理和基本方法的同时，及时反映弹性力学的近代进展，为阅读近代力学文献打好基础。为此，书中以笛卡儿张量为工具简洁地讨论弹性力学的一般理论；注意反映近代连续介质力学的研究成果和非线性弹性力学的初步知识；介绍了考虑热固耦合效应的热弹性基本理论；系统讲授了当代计算力学的理论基础——能量原理及相应解法。书中有些内容是为硕士研究生和因材施教的优秀大学生写的，讲课教师可根据具体情况决定取舍。

(2) 在弹性力学专门问题的讲述中注意介绍实用方法和联系工程实际。例如在平面问题中，通过基本方程从三维到二维的简化过程阐明了两类平面问题的简化前提和分类依据；结合小孔应力集中问题介绍了怎样把个别典型弹性力学问题的解答灵活应用于各种复杂的工程实际问题；介绍了求解欧拉型常微分方程的有效方法；最后对平面问题的解和解题方法作了小结。

为了巩固基本概念和训练解题能力，各专题部分都精选了一批典型解例。各章都安排了相应的习题。

(3) 充分运用高等数学中已经学过或在此基础上不难掌握的数学知识，根据各章节的特点选用较有效的数学工具。例如，用张量符号讲述一般理论，书写简洁，推导清晰，对物理意义的表达也比写出一大堆分量表达式更为明确直观。为了帮助读

者掌握这一工具，本书先在上册附录中介绍张量分析的基本知识，然后在正文中结合力学概念反复应用。另一方面，用常规符号处理弹性力学具体问题更为直观方便，本书的应用部分均采用常规符号。在下册附录A和B中从力学应用的角度介绍了复变函数和变分法的有关内容。

本书采用由一般到特殊的讲授方式，便于读者较快地掌握弹性理论的完整体系和内在规律，并在学习和处理各类具体问题时充分发挥自己的理解能力和创造精神。电子计算机的发展使近代力学能处理的问题越来越复杂，加强一般理论的基础训练已成为近代弹性力学教材的普遍趋势。在具体章节的安排和论述上，本书尽量贯彻由浅入深的原则并使力学概念与数学推导紧密结合。

以上是本书的努力方向，限于编者的水平和经验不足，虽几经易稿，书中仍会有不妥或错误之处，请有关专家和读者多多指正。

黄克智院士对本书的编写作了深入全面的指导，书中基本理论部分曾根据他1986年的讲课内容修改而成。本书吸取了清华大学工程力学系有关教授、副教授的多年教学经验。杜庆华院士曾对本书的初稿作过多方面的指导和帮助。徐秉业、余寿文、黄炎、姚振汉、薛明德教授也都热忱地提供了宝贵的教学经验和教学资料。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书编写时参考的国内外弹性力学教材、专著和文献按姓氏笔划或字母顺序列于书后。

胡海昌院士详细审阅了本书有关章节并给予热忱指导。本书各次送审稿的评阅人也都提出了许多宝贵意见。编者衷心感谢他们的指导和帮助。

编者感谢常亮明、王笃美、宋国华同志为本书初稿付出的辛勤劳动。

本书第9章、11至13章、下册附录A和第3、4章的部分内容由罗学富执笔，其余章节由陆明万执笔。

陆明万
罗学富　于北京清华园

目录

第1章 绪论

1.1 弹性理论概述

弹性理论又称**弹性力学**，是研究载荷作用下弹性体中内力状态和变形规律的一门科学。这里所考虑的载荷包括机械力、温度、电磁力等各种能导致物体变形的物理因素；所研究的**弹性体**是指在卸载后能完全恢复其初始形状和尺寸的物体，绝大多数由常用工程材料制成的工程结构，在一定载荷范围内，都可以看作弹性体。

回顾历史，弹性理论是在不断解决工程实际问题的过程中逐步发展起来的。1638 年由于建筑工程的需要，伽里略(Galileo, G.)首先研究了梁的弯曲问题。以后胡克(Hooke, R.)根据金属丝、弹簧和悬臂木梁的实验结果于 1678 年正式发表了弹性体的变形与作用力(更精确地说，应变与应力)成正比的物理定律，为弹性理论打下了坚实的物理基础。但当时仅局限于处理梁、杆、柱、拱等一维工程结构问题。1821—1822 年纳维(Navier, L. M. H.)和柯西(Cauchy, A. L.)导出了弹性理论的普遍方程，为弹性理论奠定了严密的数学基础。此后，许多学者致力于解决二维、三维的典型工程结构问题，例如柱体扭转与弯曲问题、平面问题、接触问题、板壳问题以及开孔、缺口附近的应力集中问题等。为了满足土木、机械、航空、造船、原子能、石油化工等一系列工程需要，20 世纪以来弹性理论取得了重大进展，已成为工程结构强度设计的重要理论依据。由于弹性理论基本方程的复杂性，要精确求解各种复杂工程结构的问题在数学上存在不少困难。里茨(Ritz, W.)和迦辽金(Галёркин, Б. Г.)

分别于 1908 年和 1915 年提出了基于能量原理的直接解法，开创了近似求解弹性理论问题的新途径。随着高速大型电子计算机的发展，有限差分法、有限单元法、边界元法等各种有效的数值计算方法如雨后春笋般地涌现出来。现在要对各种复杂工程结构进行弹性分析已没有原则上的困难。

在形成严密的理论体系和求解各种复杂问题的过程中，弹性理论和数学建立了紧密联系。数学的研究成果被用来有效地求解弹性理论问题。反之，弹性理论从力学角度提出的数学问题又历来是数学家们研究的热门课题。随着自然科学基础理论研究的不断深入，边缘学科的不断涌现，弹性理论与物理学（热学、声学、光学、电磁学）、医学（生物力学）、地学（地质力学、地震学）和材料科学等基础学科也已建立起相当密切的联系。塑性理论、粘弹性与粘塑性理论、连续介质力学、细观与微观力学、复合材料力学等一系列重要的新兴力学分支也都在弹性理论的基础上陆续发展起来。

弹性理论以理论力学、材料力学和高等数学等课程为基础，系统地讲述处理二维、三维弹性体一般问题的基本概念、基本原理和基本方法，为进一步学习塑性理论、连续介质力学、有限单元法、实验应力分析、板壳理论、断裂力学等后续课程打下良好基础。所以在固体力学专业的教学大纲中，弹性理论是一门承上启下的主要专业基础课。

本书着重介绍基础理论和解析解法，有关数值解法和实验方法将由后续课程讲授。

1.2 弹性理论的基本假设

由实际工程材料抽象为“弹性体”这种理想模型时曾引进如下基本假设。

1. **连续性假设**——弹性体是一种密实的连续介质，并在整个变形过程中保持其连续性。

微观物理学业已证明，任何物体都是由分子、原子组成的，是稀疏分布的、不连续的。和其他宏观物理学分支一样，弹性理论不考虑材料的微观粒子结构，而采用由宏观性能试验测定的材料统计物理性质（如质量、弹性常数、膨胀系数等）来描述物体。连续性假设有两层含义：

（1）把物体抽象成一个形状和位置与其相同的、连续而密实的空间几何体，物体的统计物理性质以及位移、应变、应力、能量等物理量都作为空间点位的函数定义在这个几何体上，这种抽象的数学模型称为**连续介质**。

（2）物体在整个变形过程中始终保持连续，原来相邻的两个任意点，变形后仍是相邻点，不会出现开裂或重叠现象。用数学描述即为，定义在该连续介质上的物理性质和物理量，除了在某些孤立的点、线、面上可能奇异或间断外，在变形过程中始终保

持为空间点位的连续函数。基于这个假设就可利用高等数学中的微积分知识来处理连续介质问题。

连续介质是一个普遍概念，给它赋予不同的物理性质就可描述不同的物质，包括弹性体、塑性体、粘弹性体、粘塑性体、理想流体、粘性流体和液晶体等。弹性体的特点反映在下述弹性假设中。

2. 弹性假设——弹性体的变形与载荷在整个加卸载过程中存在一一对应的单值函数关系[①]，且当载荷卸去后变形完全消失，弹性体恢复其初始的形状和尺寸。

这里的"单值函数关系"可以是线性的或非线性的，取决于材料性质与变形大小。当应力小于弹性极限时，大多数工程材料的应力应变关系是线性的，服从胡克定律，称为线性弹性材料或线弹性体。也有少数材料的弹性应力应变关系是非线性的，称为材料非线性效应。

在小变形（变形和物体尺寸相比可以忽略不计）情况下，应变和位移导数间的几何关系是线性的。但对于大变形情况，必须考虑几何关系中的二阶或高阶非线性项，这时即使材料是线性的，也会导致变形与载荷的非线性关系，称为几何非线性效应。

本书着重讨论线弹性体的小变形情况，引进**线性弹性假设**——弹性体的变形与载荷之间存在一一对应的线性关系。基于这个假设的弹性理论称为线性弹性理论；若考虑几何或材料非线性效应则称为非线性弹性理论。

为了简化，进一步引进如下辅助假设：

3. 均匀性假设——物体在不同点处的弹性性质处处相同。实际上，金属材料都可看作是均匀的。对于混凝土、玻璃钢等非均质材料，如果不细究其不同组分交界面处的局部应力，可以采用在足够大的材料试件上测得的等效弹性常数来简化成均匀材料。

4. 各向同性假设——物体在同一点处的弹性性质与考察方向无关。实际上，绝大多数的金属材料都是各向同性的。但是木材、复合材料、地壳结构等必须考虑各向异性。

5. 无初应力假设——物体在加载前和卸载后都处于无初始应力的自然状态。即不考虑由制造工艺（如铸造、焊接等）引起的残余应力和装配应力。

1.3 载荷分类

凡能导致物体变形和产生内力的物理因素都称为**载荷**。根据性质不同载荷可分为两大类。第一类载荷，例如重力、机械力和电磁力等，可以简化为作用在物体上的

---

① 这里不考虑物体在弹性屈曲后的行为。

外力，由外力再引起物体的变形和内力。第二类载荷，例如温度和中子辐照等物理因素，则直接引起物体变形，仅当这种变形受到约束时，物体内才产生内力。

根据作用域的不同，外力可分为体积力和表面力。

体积力是作用在物体内部体积上的外力，简称体力。例如重力、惯性力、电磁力等。通常用体力矢量

$$\boldsymbol{f} \triangleq \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = f_i \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.1}$$

来表示。其中 ΔV 为受体力作用的微体元的体积，$\Delta \boldsymbol{F}$ 为 ΔV 上外力的合力。f_i 是矢量 $\boldsymbol{f}$ 的分量，$\boldsymbol{e}_i$ 是相应坐标的基矢量。一般说 $\boldsymbol{f}$ 是空间点位的函数。符号$\triangleq$表示"定义为"。

在强电磁场等情况下，还存在作用于物体内部体积上的外力偶，用体力偶矢量 $\boldsymbol{m}$ 来表示。对大多数工程问题 $\boldsymbol{m}$ 可以忽略不计。

表面力是作用在物体表面上的外力，简称面力。例如液体或气体的压力、固体间的接触力等。通常用面力矢量

$$\boldsymbol{p} \triangleq \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{G}}{\Delta S} = p_i \boldsymbol{e}_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.2}$$

来表示。其中 ΔS 为受面力作用的微面元的面积，$\Delta \boldsymbol{G}$ 为 ΔS 上外力的合力，p_i 和 $\boldsymbol{e}_i$ 是矢量 $\boldsymbol{p}$ 的分量和相应的基矢量。一般说 $\boldsymbol{p}$ 是表面点位的函数。

在材料力学和结构力学中经常把高度集中的表面载荷简化为集中力。在弹性理论中则把集中力还原成作用在局部表面上的表面力来处理。

第 2 章
应 力 理 论

本章用静力学观点研究物体在外力作用下的平衡状态。介绍应力的概念及其性质。导出应力应满足的平衡方程。本章不涉及物体的材料性质和变形情况，所得结论适用于任何连续介质。

2.1 内力和应力

在外力作用下物体发生变形，变形改变了分子间距，在物体内形成一个随变形而增大的附加内力场。当这个内力场足以和外力相平衡时，变形不再继续，物体达到稳定平衡状态。根据无初应力假设，今后仅考虑这个与外力相平衡的附加内力场。严格地说，该附加内力场作用在变形后的物体上，应该按物体变形后的几何形状来建立内外力的平衡关系。但对于小变形情况，变形前后物体形状几乎不变，可近似地用初始形状来建立平衡关系。

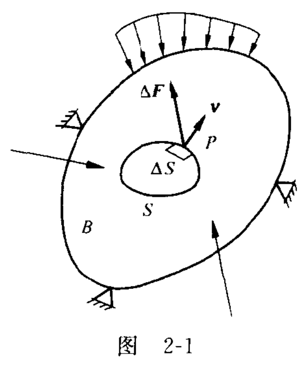

图 2-1

为了描述内力场，柯西引进了**应力**的重要概念。考虑图 2-1 中处于平衡状态的物体 B。用一个假想的闭合曲面 S 把物体分成内、外两部分，简称内域和外域。P 是曲面 S 上的任意点，以 P 为形心在 S 上取出一个面积为 ΔS 的面元。$\boldsymbol{v}$ 是 P 点处沿内域外向法线

的单位矢量(沿外域外向法线的单位矢量为 $-\boldsymbol{v}$)。$\Delta \boldsymbol{F}$ 是外域通过面元 ΔS 对内域的作用力之合力,一般说与法向矢量 $\boldsymbol{v}$ 不同向。假设当面元趋于 P 点 $\Delta S \to 0$ 时,比值 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta S$ 的极限存在,且面元上作用力的合力矩与 ΔS 的比值趋于零,则可定义:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)} \triangleq \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} \tag{2.1}$$

是作用在 P 点处法线为 $\boldsymbol{v}$ 的面元上的应力矢量。若取式中的 ΔS 为变形前面元的初始面积,则上式给出**工程应力**,或称**名义应力**,常用于小变形情况。对于大变形问题,应取 ΔS 为变形后面元的实际面积,得**真实应力**,简称真应力。

应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}_{(\nu)}$ 的大小和方向不仅和 P 点的位置有关,而且和面元法线方向 $\boldsymbol{v}$ 有关。作用在同一点不同法向面元上的应力矢量各不相同,见图 2-2(a)。反之,不同曲面上的面元,只要通过同一点且法线方向相同,则应力矢量也相同,见图 2-2(b)。

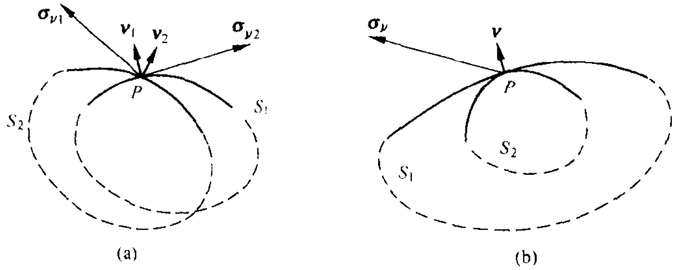

图 2-2

比较(2.1)式和第 1 章(1.2)式可见,应力矢量和面力矢量的数学定义和物理量纲都相同,区别仅在于:应力是作用在物体内截面上的未知内力,而面力是作用在物体外表面上的已知外力。当内截面无限趋近于外表面时,应力也趋近于外加面力的值。还应指出,在刚体力学中,力可以看作自由矢量沿其作用线任意滑移;在变形体力学中力和应力矢量都有自己固定的作用点,不能随意移动。

在笛卡儿坐标系中,用六个平行于坐标面的截面(简称正截面)在 P 点的邻域内取出一个正六面体微元,如图 2-3。其中,外法线与坐标轴 $x_i(i=1,2,3)$ 同向的三个面元称为**正面**,记为 $\mathrm{d}S_i$,它们的单位法向矢量为 $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{e}_i$,$\boldsymbol{e}_i$ 是沿坐标轴的单位矢量,即笛卡儿坐标系的基矢量。另三个外法线与坐标轴反向的面元称为**负面**,它们的法向单位矢量为 $-\boldsymbol{e}_i$。把作用在正面 $\mathrm{d}S_i$ 上的应力矢量 $\boldsymbol{\sigma}_{(i)}(i=1,2,3)$ 沿坐标轴正向分解得:

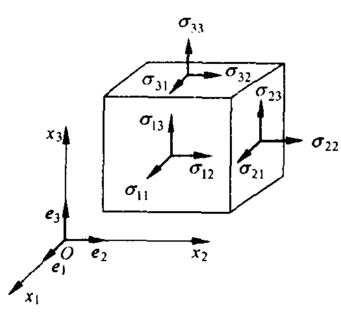

图 2-3

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)} = \sigma_{11}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{12}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{13}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{1j}\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{(2)} = \sigma_{21}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{22}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{23}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{2j}\boldsymbol{e}_j \tag{2.2a}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{(3)} = \sigma_{31}\boldsymbol{e}_1 + \sigma_{32}\boldsymbol{e}_2 + \sigma_{33}\boldsymbol{e}_3 = \sigma_{3j}\boldsymbol{e}_j$$

即

$$\boldsymbol{\sigma}_{(i)} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{2.2}$$

上式中共出现九个应力分量：

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.3a}$$

其中，第一指标 i 表示面元的法线方向，称面元指标。第二指标 j 表示应力的分解方向，称方向指标。当 $i=j$ 时，应力分量垂直于面元，称为**正应力**。当 $i\neq j$ 时，应力分量作用在面元平面内，称为**剪应力**。在不用指标符号的教科书中，九个应力分量常记为：

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

弹性理论中九个应力分量 σ_{ij} 的**正向规定**是：正面上与坐标轴同向为正；负面上与坐标轴反向为正。这个规定正确地反映了作用与反作用原理和“受拉为正、受压为负”的传统观念，数学处理也比较统一。但应注意，剪应力正向和材料力学规定不同。下节将证明，过 P 点任意斜截面上的应力都可用这九个应力分量来表示。所以 σ_{ij} 给出了物体内**一点应力状态**的全面描述。

回到图 2-1，曲面 S 的外域对内域(或反之)的作用力包括：(1) 通过曲面 S 的相互作用力，称为**接触力**或**近程力**，用应力来表示；(2) 越过曲面 S 的相互吸引力，称为**相互体力**或**远程力**。**欧拉**(Euler, L.)-**柯西应力原理**认为：物体各部分间的相互体力可以忽略，外域对内域的作用可等价地用定义在 S 曲面上的应力场来代替。这个原理确定了应力是描述物体内力场的基本物理量。

2.2 斜面应力公式

本节用平衡原理导出斜截面应力计算公式。

考虑图 2-4 中的四面体 $PABC$。它由三个负面和一个法向矢量为

$$\boldsymbol{\nu} = \nu_1\boldsymbol{e}_1 + \nu_2\boldsymbol{e}_2 + \nu_3\boldsymbol{e}_3 = \nu_i\boldsymbol{e}_i \tag{2.4}$$

的斜截面组成，其中

$$\nu_i = \cos(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{2.4a}$$

为 $\boldsymbol{\nu}$ 方向的方向余弦。设斜面 $\triangle ABC$ 的面积为 $\mathrm{d}S$，则三个负面的面积分别为