★ 现代金融方法论丛书 ★

—— 主编 ——

陈工孟 吴冲锋

经济学和金融学中的
随机方法

[美] A.G.马利亚里斯 W.A.布罗克 著

陈守东 李小军 李元 译

上海人民出版社

★ 现代金融方法论丛书 ★

主编

陈工孟 吴冲锋

经济学和金融学中的
随机方法

[美] A. G. 马利亚里斯 W. A. 布罗克 著

陈守东 李小军 李元 译

上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济学和金融学中的随机方法/(美)马利亚里斯
(Malliaris,A. G.),(美)布罗克(Brock,W. A.)著;
陈守东,李小军,李元译.
—上海:上海人民出版社,2004
(现代金融方法论丛书/陈工孟,吴冲锋主编)
书名原文:Stochastic Methods in Economics and
Finance
ISBN 7-208-04877-0

I. 经... II. ①马...②布...③陈...④李...⑤李...
III. ①随机分析—应用—经济学②随机分析—应用—
金融学 IV. F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 095528 号

Stochastic Methods in Economics and Finance
by A. G. Malliaris and W. A. Brock

责任编辑　范蔚文
封面装帧　许晓峰
美术编辑　王晓阳

·现代金融方法论丛书·
经济学和金融学中的随机方法
[美] A. G. 马利亚里斯 W. A. 布罗克　著
陈守东　李小军　李　元　译
世 纪 出 版 集 团
上海人民出版社出版
(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)
世纪出版集团发行中心发行　启东市人民印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 14 插页 4 字数 286,000
2004 年 4 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—5,100
ISBN 7—208—04877—0/F·1074
定价 26.00 元

总　序

自20世纪50年代以来，随着世界经济环境的变化和科学技术的迅猛发展，西方市场经济国家掀起的金融变革和创新热潮，在推动世界各国金融市场和金融产业发展的同时，也为金融经济学的兴起和迅速发展创造了机遇和条件。金融经济学自诞生以来，经过近五十年的发展，今天已基本形成了一个比较完整的学科体系。随着金融理论研究的进一步深入发展，金融经济学的各种理论和分析方法被广泛应用到社会经济的各个层次中，从资本市场的运作、投资组合的构造、交易策略的选择，到理论假设的检验、分析工具的优化、监管制度的设计等等，几乎渗入了现代经济学的各个领域。正是在这个意义上，金融经济学被美国著名经济学家、诺贝尔经济学奖获得者保罗·萨缪尔森赞誉为“社会科学的珠冠”。

近二十年来，以网络技术为中心的信息革命以及包括中国在内的亚洲新兴证券市场的发展，为金融经济学的各种理论和方法提供了实践运用的崭新机遇。随着资本市场的逐步成熟和繁荣，中国改革开放和经济发展的现实需求，对国内金融领域学术界、实务界和有关财经院校等提出了引入、学习和应用国际前沿金融经济学理论与方法的迫切要求。由于金融经济学领域的研究和分析方法综合了微观经济学、数理统计、计量经济学和几乎所有现代数学学科的知识，因此把国外该领域的经典专著和影响广泛的教材翻译引进国内，作为我们学习和掌握金融经济学理论与方法的开端，无疑是一个直接而有效的方法。

为了满足国内金融领域学术界和实务界系统学习和掌握现代金融理论及分析方法的迫切需要，同时也为了解决国内金融学、会计学教材尤其是研究生、博士生教材流于零散而不够系统等问题，香港理工大学中国会计与金融研究中心和上海交通大学金融工程研究中心合作，组织内地和香港该领域的专家学者翻译出版了“现代金融方法论丛书”。这套丛书第一批包括《金融数量方法》、《经济学和金融学中的随机方法》、《金融统计方法》、《金融学中的研究和管理科学》等四部书。这套丛书是我们在咨询国外有关专家学者并调查国内学术界和实务界实际需求的基础上，从国外众多教材和专著中精选出来奉献给读者的。

我们希望这套丛书的出版，能够有助于中国金融领域学术界和实务界借鉴并吸纳国外先进的研究理念、研究方法，能够为国内该领域的学术研究、学术发展和实务运作提供支持和帮助。

翻译出版这套丛书是一项系统工程，从2001年4月我们开始策划翻译这套丛书至今，从咨询专家、选择书目、联系版权，到组织翻译、编校书稿、图书出版，从策划者、翻译者到编校者和出版者都投入了大量时间和精力。在选择书目时，我们主要考虑了所选书目要保证理论体系的完整性、涵盖该研究领域最新的发展状况、内容编排体现循序渐进特色、分析方法力求论述详尽便于操作等几个方面。在翻译过程中，为使译文通俗流畅，我们在综合国内外专家学者意见的基础上，对该领域的专有名词的翻译做出了统一规范，为方便读者阅读理解，我们在注重原书完整性的基础上还深入挖掘了相关的背景信息。

由于时间关系，丛书中难免存在不妥和疏漏之处，敬请读者给予批评指正。

陈工孟　吴冲锋

2003年1月

译者说明

由A. G. 马利亚里斯和 W. A. 布罗克所著的《经济学和金融学中的随机方法》一书，收集了近来经济学和金融学论文中使用的随机方法的有关文献资料，总结了随机方法和它们的应用，包括鞅方法、随机过程、最优停时、利用维纳(Wiener)过程建立不确定性模型、随机微积分工具的 Itô 引理、随机微分方程的基本结果、随机稳定性概念和随机控制方法等，并且大量阐述了它们在经济理论和金融学中的应用。在这些应用中，书中涉及期货定价、工作寻求、随机资本理论、随机经济增长、理性预期假设、随机宏观经济模型、在价格不确定情况下的竞争公司、布莱克-斯科尔斯(Black-Scholes)期权定价理论、最优消费和投资组合规则、指数债券的需求、利率期限结构、项目评估中的市场风险调整、现金平衡需求和资产定价模型等问题。

本书可用作高等院校经济学、数量经济学、金融学等专业的硕士生和博士生的相关课程教学参考书，也可供从事理论研究的人士学习参考。我们希望本书的翻译出版有助于促进随机方法在经济、金融分析中的应用。

参与本书具体翻译工作的还有广州大学理学院讲师罗羡华、吉林大学数量经济学专业博士研究生孟庆顺和薛丰慧。在此，我们感谢罗羡华、孟庆顺、薛丰慧等 3 人为翻译本书所做的辛勤工作。另外，需要说明的是，为了方便读者对文献进行检索，并方便索引制作，正文中的人名均不做翻译。由于时间和水平所限，书中难免存在错漏之处，翻译不当之处敬请读者给予批评指正。

译　者

2003 年 2 月

前　言

《经济学和金融学中的随机方法》一书通过阐述这一课题的理论基础及其应用，为读者介绍了一些数学方法。书中对诸如鞅方法、随机过程、最优停时、利用 Wiener 过程建立不确定模型、作为随机微积分工具的 Itô 引理、随机微分方程的基本结果、随机稳定性概念和随机控制方法等主题都进行了讨论，并且大量阐述了它们在经济理论和金融学中的应用。在这些应用中，我们涉及到了期货定价、工作寻求、随机资本理论、随机经济增长、理性预期假设、随机宏观经济模型、在价格不确定情况下的竞争公司、Black-Scholes 期权定价理论、最优消费和投资组合规则、指数债券的需求、利率期限结构、项目评估中的市场风险调整、现金平衡需求和资产定价模型等问题。

因为经济学和金融学界已经接受动态确定性方法较静态分析方法优越这一事实，所以进一步鼓励朝着应用动态随机模型的趋势发展的时代已经到来。

我们期待这些方法能捕获复杂性、测量误差和与经济现实相联系的不确定性，同时还能给一些研究工作者提供有关完全未知的将来事物的建模方法。了解了这里介绍的技巧和方法将会增强成功地解决经济学和金融学所产生的困难及应用问题的能力。当然，对于准备解决大量需要随机方法的问题的研究人员来说，单单这一本书不可能提供足够的知识资本。写一本满足这个标准的书几乎是不可能的。然而，如果用作高级随机方法的入门综述，本书是大量数学、经济学和金融学文献的一本有效和有用的指南。因此，本书的特点是：应用在经济分析中的高级随机方法的入门综述，附上进一步的注释和参考，为另外的阅读提供向导。

在没有比较接近的代替品的情况下，写一本书存在教学上的挑战。例如，书的内容、理论和应用的结合以及它的讲解水平是三个很难处理的问题。关于内容，我们通过描述几种方法，选择广而不是窄的范围。我们应该指出，一些重要方法，如计量经济学方法、随机差分方程方法和离散时间随机控制，没有包含进来，主要是因为这些主题的优秀资源已经存在。对于理论和应用之间的合适的结合，我们强调尽可能平等对待。一些理论主题由于没有直接的应用而未包

含，例如，测度理论的概率概念和随机积分的概念就属于这种情况。主题是否被包含进书中的辨别标准是它对有直接应用的后续理论发展是否有作用。

在阐述理论和应用之间的相互影响时，我们使用两种方法。在第1章，应用跟在鞅方法和最优停时后面，理论的使用直接说明。本书的其余部分，数学方法包含在第2章中，而第3章和第4章分别含有经济学和金融学的应用。积分理论和应用放在第1章是自然的，但两者分开对维持其他地方的流畅是更有效的。一些方法，如Itô引理，在理论和应用中都进行了深入细致的讨论。其他方法，尽管他们的理论发展已经完备，但还没有广泛地应用，因此必须等待将来研究工作者的工作。这方面的例子包含连续最优停时、随机微分方程和随机控制。进一步探讨经济学和金融学中的一些应用研究领域，如随机稳定性，也产生了一些困难的数学问题，合适的数学方法还没有充分发展。

不利用测度理论的概率论基础解释本书的方法是非常困难的。因为这个原因，我们用到了σ-域概率空间、可测函数、数学期望和条件概率。然而，为了使本书适合更多的读者，我们保持了最少的理论基础框架，而把参考资料提供给有兴趣的读者，那里可以找到大量的深层次理论。

这本书的主要读者包括经济学和金融学中有雄心利用随机方法作为他们的研究工具的博士生们。但是，一些专修金融理论或者定量方法的MBA学生，在他们的课程或者补充资料中也许会发现本书的价值。另外，经济或金融理论工作者也可以利用本书教会自己随机方法。最后，专攻这里所描述的方法的应用数学家也会发现本书有用处，因为它含有许多应用问题。

本书尽力使数学预备知识保持最少。本书的大部分能被具有良好分析和基本概率论基础的人所理解。在第1章的前5节中，我们收集了一些分析和属于概率课程之外而第2、3、4章又需要的结果。

大部分习题分为两类。它们或者告诉读者补充事实，并指出到哪里找答案；或者设计发展计算技巧。然而，有一些习题，如第3章的(5)，(9)和(14)题，它们使读者进入到模型建立领域中。这些是最艰难的问题。这里预先提醒读者，建议他们尽可能地解释，而不是得出确定的结论。

序 言

在《经济学和金融学中的随机方法》一书中，A. G. 马利亚里斯收集了有关近来经济学和金融学论文中使用的随机方法的文献资料。这是一项超乎寻常的艰巨任务，他遇到了下列艰难的平衡问题。

一方面，他必须介绍随机微积分、随机微分方程、最优随机控制、最优停时理论和其他主题的数学文献。另一方面，他必须选择足够低的水平，以使此书能够为广大读者所接受。同时，马利亚里斯必须在这些理论的数学发展和众多应用之间作恰当的平衡，使得读者有充分的准备去阅读和投身到经济学与金融学的前沿研究中去。

进一步，由于从事经济学和金融学研究工作的人们的数学背景几乎覆盖了整个数学领域所拥有的范围，从相当于最好的数学系的博士水平的人到仅仅是初步理解一年级分析理论的人，应有尽有。因此，马利亚里斯要构造一本能吸引如此多层次和不同类型读者的书，这几乎不可能。不仅如此，为了保持较低的价格，这本书的篇幅必须有限。这样，就会带来较大的教学难度。

对于在别处有更进一步介绍的结果，马利亚里斯博士选择了给出详细索引的办法。简而言之，他说明了那些需要说明的东西，然后告诉读者到哪里找额外的材料。采用这种方法，他给巨大的数学—经济学—金融学文献库准备了一本用户指南。

希望备有本书的读者，在利用随机方法从事经济学和金融学研究时，能较之直接从期刊中摘取而更容易找到一条通往学科前沿的道路。

A. G. 马利亚里斯为了写这样一本新奇的作品，做了充分的准备。尽管他已取得经济学博士学位，但他仍然常年在芝加哥大学经济学和数学系修读课程。而且，他是一个有耐心、知识广博的英语语言专家。

让我举一个出现在该书中的有关马利亚里斯阐述技巧的例子。他能够从我们演讲笔记、问题集、试题和口头陈述中提取原始材料，并把它们加工成可读的东西。任何想写点东西的人都知道口头交流比书面交流要容易得多。

总之，在教科书和参考书的写作领域里，A. G. 马利亚里斯给这一职业提出

了一个大胆和新颖的观念。我个人的观点是，他已经令人佩服地解决了一个相当难的有约束的最优化问题。我相信市场也会这样想。

W. A. 布罗克
于芝加哥和麦迪逊

“现代金融方法论丛书”编译委员会

目　录

注:带 * 号的部分是由 W. A. 布罗克教授撰写。

第1章

概率论的若干结论

概率论的发展归功于精确地论述越来越复杂的观测结果。

M. Loève(1977, p. 7)

1.1 引言

在本章中，我们将以定义、定理和例子的形式给出现代概率论的各种概念。这些概念取材于大量的材料，将为读者提供本书后续章节的背景材料。尽管本章的某些节内对于一些概念一带而过，但有些节将详细叙述诸如鞅和最优停时等概念，读者可以从几个例子中看到概率论的鞅论和最优停时理论在经济分析和金融中的应用。阅读本章至少可以从以下两个方面受益：首先，了解各种应用概率模型的理论框架；其次，熟悉应用研究中广泛使用的鞅和最优停时理论。

1.2 概率空间

在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有偶然性的事件称为试验的结果。试验所有的结果构成一个集合，由 Ω 来表示。集合或空间 Ω 的元素由 ω 来表示，称为样本点。Ω 的一个子集称为一个事件。例如，考虑下个月美国失业人数占整个劳动力人数的比例，样本空间 Ω 由[0,1]区间上的所有有理数构成，而 $\omega=0.065$ 即为一个元素或样本点。失业率不超过 0.07，或者失业率介于 0.06 和 0.08 之间均为事件。直观上讲，概率就是对在族上的某类事件的评价。

设 Ω 为由点 ω 组成的任意空间。在概率研究中，如果 Ω 的某一子集族是重要的，可定义 Ω 的该族子集为σ-域或σ-代数，本书中以$\mathscr{F}$来表示。我们称$\mathscr{F}$为一个σ-域，如果它满足以下三个条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$，即$\mathscr{F}$包含了空间 Ω 本身；

(2) $A\in\mathscr{F}$意味着$A^c\in\mathscr{F}$，即如果事件A(A为Ω的一个子集)属于$\mathscr{F}$，则A的补集A^c也属于$\mathscr{F}$；

(3) $A_1,A_2,A_3,\cdots\in\mathscr{F}$意味着$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\in\mathscr{F}$，即如果$\Omega$的可列子集属于$\mathscr{F}$，则这些可列子集的并集也属于$\mathscr{F}$。

我们称$\mathscr{F}$的所有元素为可测集。值得一提的是，对于一个给定的集合Ω，其最小的σ-域是由空集ϕ和集合Ω自身所构成，而最大的σ-域则由Ω的幂集，即Ω的所有子集而构成。最大的σ-域由Ω的2^{Ω}个子集组成。这样一对$(\Omega,\mathscr{F})$称为一个可测空间。

令$\mathscr{G}$为Ω一个子集族。所有包含$\mathscr{G}$的σ-域的交称为由$\mathscr{G}$生成的σ-域，记为$\sigma(\mathscr{G})$。作为例子，我们考虑由实直线R^1的子集$(a,b]$区间族而生成的σ-域，这个σ-域用$\mathscr{R}^1$来表示，其元素称为Borel集。注意，$\mathscr{R}^1$是包含所有R^1区间族的最小的σ-域；特别地，它包含了R^1的所有开集和闭集。直观上来说，$\mathscr{R}^1$是由R^1区间开始，经过一系列所有可能的有限和可列集合理论运算(并、交和补)而得到的。

如前所述，概率是对某类事件族上的评价。现在给出其严格的定义。令$(\Omega,\mathscr{F})$为一可测空间。定义在$\mathscr{F}$上的一个集合函数μ称为一个测度，如果它满足下面的条件：

(1) $\mu(\phi)=0$；

(2) $A\in\mathscr{F}$意味着$0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$；

(3) $A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{F}$，如果$A_n$是两两不相容的，即$A_k\cap A_m=\phi,k\neq m$，则：

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

一个最重要的测度为Lebesgue测度，它定义在实直线R^1的Borel集合族上，由λ来表示。这个测度赋予每一个区间的是其区间的长度，即：

$$\lambda(a,b]=b-a$$

Lebesgue测度可以直接推广到所有的Borel集。要了解详情的读者，请参阅Ash(1972，第1章)。值得注意的是，$\lambda(R^1)=\infty$以及可数集合Lebesgue的测度为0。定义在$\mathscr{R}^1$上的Lebesgue测度λ可以推广到k维空间R^k的Borel集$\mathscr{R}^k$上。

概率是一种特殊测度，记为P，它满足$P(\Omega)=1$。因此对于$A\in\mathscr{F}$，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。三元体$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为概率空间，其中$\Omega$是由试验结果构成的非空的空间，$\mathscr{F}$是由$\Omega$的代表各种事件的子集所构成的$\sigma$-域，而$P$为定义在$\mathscr{F}$上的概率测度。

作为例子，我们来考虑[0,1]区间上的所有有理数构成的集合Ω，它们表示未来某个月中，美国失业人数占总劳动力人数的比例。令$\mathscr{F}$为可列空间Ω的所有子集构成的σ-域，$\mu(\omega)$为定义在Ω上的非负函数，满足$\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)=1$，定义$P(A)=\sum_{\omega\in A}\mu(\omega)$，则$(\Omega,\mathscr{F},P)$就是一个概率空间。

概率空间的一种特殊情形为完备概率空间。令$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一个概率空间，N为Ω的一个子集。如果存在一个集合$A\in\mathscr{F}$使得$N\subset A$，且$P(A)=0$，则称N是可忽略的。如果$\mathscr{F}$包含了Ω的所有对P可忽略的子集，则称概率空间是完备的。这个概念将在本章第7节中用到。

考虑概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的一列事件$\{A_n\}$，定义：

$$\limsup_n A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\{\omega:\omega\text{ 属于无穷多个 }A_n\}$$

和

$$\liminf_n A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\{\omega:\omega\text{ 属于除有限个外所有的 }A_n\}$$

如果所有$A_n\in\mathscr{F}$，则$\limsup\limits_n A_n$和$\liminf\limits_n A_n$都属于$\mathscr{F}$。

在结束本节之前，我们需要给出独立性的定义，并给出一个重要引理。我们由初等概率论知，如果$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件$A$和事件$B$独立。我们将这一概念推广为有限个事件的独立性。事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是相互独立的，如果它们满足对任意一组j个不同的下标$k_1,k_2,\cdots,k_j\in\{1,2,\cdots,n\}$，有：

$$P(A_{k_1}\cap\cdots\cap A_{k_j})=P(A_{k_1})\cdots P(A_{k_j})\qquad(1.1)$$

对于无穷多个事件，如果它的任意有限个事件是独立的，则称这无穷多个事件是独立的。下面的引理非常重要，本章的后面将会用到它。

引理 1.1 (Borel-Cantelli)令$\{A_n\}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一事件列。如果$\sum\limits_n P(A_n)<\infty$，则$P(\limsup\limits_n A_n)=0$。如果事件列$\{A_n\}$是独立的，且$\sum\limits_n P(A_n)=\infty$，则：

$$P(\limsup_n A_n)=1$$

证明：参见 Neveu(1965, pp. 128—129)。

1.3 随机变量

设$(\Omega,\mathscr{F})$和$(\Omega',\mathscr{F}')$为两个可测空间。称映射$X:\Omega\to\Omega'$是$(\mathscr{F},\mathscr{F}')$可测的，如果对每一个$A'\in\mathscr{F}'$，有：

$$X^{-1}(A')=\{\omega:X(\omega)\in A'\}\in\mathscr{F}$$

直观上讲，一个映射的可测性指的是对于像空间Ω'的每一个有意义的事件，定义域空间Ω总有一个有意义的事件与其对应。这里，一个事件有意义指的是它属于一个适当的σ-域。由X生成的σ-域记为$\sigma(X)$，它是使得X可测的最小的σ-域。

一个重要的特殊情形是像空间Ω'为实直线R^1时。这时我们取σ-域为$\mathscr{R}^1$，即Borel集合族。称一个函数$f:\Omega\to R^1$是可测的，如果对于每一个$A'\in\mathscr{R}^1$，有$f^{-1}(A')=\{\omega:f(\omega)\in A'\}\in\mathscr{F}$。在上述意义下，可测的实函数就称为随机变量。