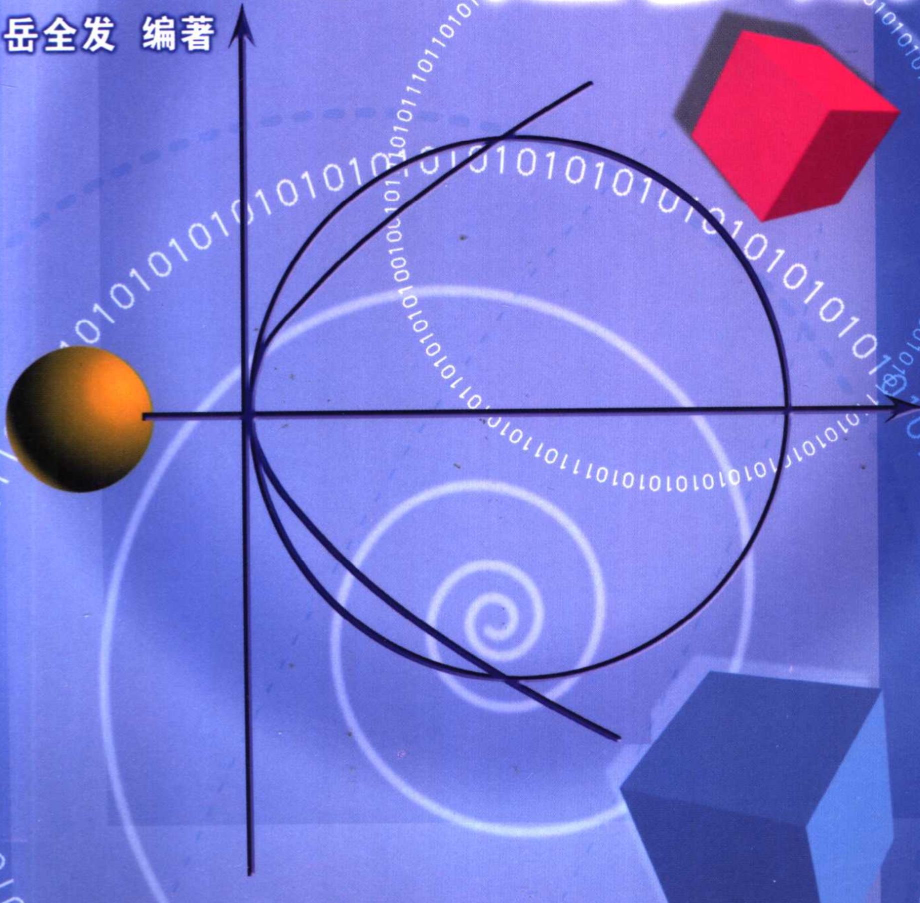
高等数学演算

一题多解

岳全发 编著



新时代出版社

New Times Press http://www.ntp.cn

高等数学演算

岳全发 编著

一题多解

新时代出版社
·北京·

内容简介

《高等数学演算一题多解》选题实用典型,类型新颖多样。本书将高等数学(以数学分析为主)演算方法、证明方法和解题方法作了归纳、整理、提炼、概括和应用,每道题、每种证法和解法都给出详证和详解,某些证法和解法具有独到之处,富有启发性。

本书可作为高等院校师生特别是准备参加硕士研究生应考者的辅导参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学演算一题多解 / 岳全发编著 .—北京:新时代出版社,2004.9

ISBN 7-5042-0885-X

Ⅰ.高... Ⅱ.岳... Ⅲ.高等数学—解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021684 号

新时代出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
新艺印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 12¼ 459 千字
2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册 定价:19.00 元

前　言

数学是现代科学技术的语言和工具。一个学生的数学素质是他文化素质中的核心部分,居于学生认知结构的顶端,是学生智力因素的基础。怎样才能更快更好地学好数学?首先要深入理解、牢固掌握、灵活运用数学概念、公式、法则、定理、定律和性质;第二要熟悉掌握各种数学方法和解题技能、技巧;第三要沟通弄懂数学各科知识与各种方法之间的相互联系。要做到以上三点,最有效的方法就是培养一题多解能力。由于数学演算问题的多样性,且演算方式和方法有所不同,只有熟悉这种演算方法,明了它们的逻辑关系,才能迅速、准确地解不同类型的命题。一题多解对于开阔视野、开发智力、启迪思维都大有裨益。通过多解演算,加深对问题的理解,逐步掌握常用解题方法及基本解题规律,不断提高分析问题和解决问题的能力,培养举一反三、触类旁通的本领。特别是在考试中,所出题目大都是“源于教材、高于教材”的综合题,这类题知识点多,技能要求高,思维去向不明,有令人难以下手之感。因此,平时多做些一题多解方面的练习,掌握多个思维模式,积累总结解题经验,应试中才能理清眉目,快速确定最简捷省时的解题方法,以减少超时失分,进而取得高分考试成绩。总之,培养多解能力,实质上就是提高快速应试能力。基于以上考虑,笔者策划、构思和编写了此书。

本书于1986年完成初稿,根据发展需要,以后又进行了修改完善。在本书编写过程中得到了有关专家学者的帮助和支持,尤

其是山西大学数学系温时良教授为本书审稿，大连理工大学张亚军老师、清华大学胡永盛老师对本书给予认真指导和关心，在此一并表示衷心的感谢！

由于本人水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请广大读者不吝指正。

编　者

2004年6月

目　　录

第1章　函数、极限

函数概念是数学中最重要的概念之一，函数是数学分析研究的主要对象。

极限乃初等数学与高等数学接壤部分，极限概念是高等数学最基本的概念。导数、微分、积分等都是建筑在极限概念的基础上的，数学分析就是以极限方法为主要工具来研究变量与变量之间关系的科学。因此读者必须首先正确理解函数、极限的概念。

本书中求极限的主要方法是：

(1) 应用叙述(或叫描述)性定义求极限；

(2) 应用精确化定义(也称分析定义)求极限；

(3) 应用极限运算法则求极限；

(4) 应用约简分式的方法求极限；

(5) 应用有理化分子或分母求极限；

(6) 应用自然数求和公式求极限；

(7) 应用无穷小量阶的代换求极限；

(8) 应用两边夹原理求极限；

(9) 应用基本极限求极限，常用的有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

(10) 应用单调有界原理求极限；

(11) 应用递推关系式求极限；

(12) 应用罗必塔法则求极限；

(13) 应用泰勒公式展开式求极限；

(14) 应用定积分求和式求极限；

(15) 应用中值定理求极限；

(16) 应用斯笃兹定理求极限;

(17) 应用无穷级数求和法求极限;

(18) 应用逐项微分与逐项积分法求极限;

(19) 应用托布利兹定理求极限;

(20) 应用级数判敛法求极限;

(21) 应用斯特林格公式求极限;

(22) 综合诸法求极限。

1. 已知函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$,求证:$f(-x)=-f(x)$。

证法 1

应用对数性质,证明左式等于右式。

因为
$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \log_a[-x+\sqrt{(-x)^2+1}] \\
&= \log_a(\sqrt{x^2+1}-x) \\
&= \log_a\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right] \\
&= \log_a\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) \\
&= \log_a(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1} \\
&= -\log_a(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x)
\end{aligned}
$$

所以
$$f(-x)=-f(x)$$

证法 2

应用对数性质,证明右式等于左式。

因为
$$
\begin{aligned}
-f(x) &= -\log_a(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= \log_a\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \log_a(\sqrt{x^2+1}-x) \\
&= \log_a[(-x)+\sqrt{(-x)^2+1}] = f(-x)
\end{aligned}
$$

所以原命题正确。

2. 若 $f(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$，求证：$f(y)+f(z)=f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$。

证法 1

证明左式等于右式。

因为

$$
\begin{aligned}
f(y)+f(z) &= \lg\left(\frac{1-y}{1+y}\right)+\lg\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\\
&= \lg\left(\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right) = \lg\left(\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)\\
&= \lg\frac{1+yz-(y+z)}{1+yz+(y+z)} = \lg\frac{\dfrac{(1+yz)-(y+z)}{1+yz}}{\dfrac{(1+yz)+(y+z)}{1+yz}}\\
&= \lg\left(\frac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}\right) = f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)
\end{aligned}
$$

所以原命题成立。

证法 2

证明右式等于左式。

因为

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right) &= \lg\left(\frac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}\right) = \lg\left[\frac{1+yz-(y+z)}{1+yz+(y+z)}\right]\\
&= \lg\left[\frac{(1-z)-y(1-z)}{(1+z)+y(1+z)}\right] = \lg\frac{(1-y)(1-z)}{(1+y)(1+z)}\\
&= \lg\left(\frac{1-y}{1+y}\right)+\lg\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\\
&= f(y)+f(z)
\end{aligned}
$$

所以原式成立。

证法 3

证明左、右两式均等于第三式。

因为

$$
f(y)+f(z)=\lg\left(\frac{1-y}{1+y}\right)+\lg\left(\frac{1-z}{1+z}\right)=\lg\left(\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)
$$

$$=\lg\left(\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$$

$$f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\lg\left(\frac{1-\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+\dfrac{y+z}{1+yz}}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}\right)$$

所以原命题正确。

3. 如图 1.1 所示，已知等腰梯形 $ABCD$ 其两底分别为 $AD=a$，$BC=b$ $(a>b)$，高 $HB=h$，现在有一平行于 HB 的直线在梯形内部移动，问当此直线分别在 l_1，l_2 及 l_3 位置时，怎样写出此直线左边面积 S 的函数式。(假定 A 点到直线距离每次都用 x 表示。)

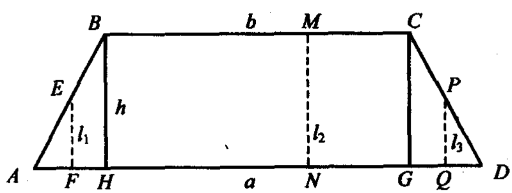


图 1.1

解法 1

分三种情形求出 S。

(1) 当直线在 l_1 位置时，因为$\triangle AFE\backsim\triangle AHB$，则有

$$\frac{EF}{BH}=\frac{AF}{AH}$$

就是
$$EF=\frac{AF}{AH}\cdot BH=\frac{x}{\dfrac{a-b}{2}}\cdot h=\frac{2hx}{a-b}$$

所以
$$S_1=\frac{1}{2}AF\cdot EF=\frac{1}{2}x\cdot\frac{2hx}{a-b}=\frac{h}{a-b}x^2$$

(2) 当直线在 l_2 位置时

$$S_2=S_{梯形ANMB}=\frac{h}{2}(AN+BM)$$

$$= \frac{h}{2}[x + (x - AH)]$$

$$= \frac{h}{2}\left(2x - \frac{a-b}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{4}[4x - (a - b)]$$

(3) 当直线在 l_3 位置时，因为

$$\frac{PQ}{CG} = \frac{DQ}{DG}$$

就是

$$PQ = \frac{DQ}{DG} \cdot CG = \frac{a-x}{\frac{a-b}{2}} \cdot h = \frac{2(a-x)h}{a-b}$$

所以

$$S_{\triangle PQD} = \frac{1}{2}PQ \cdot DQ = \frac{2(a-x)h}{2(a-b)} \cdot (a-x)$$

$$= \frac{h}{a-b}(a-x)^2$$

从而有

$$S_3 = S_{AQPCBA} = S_{梯形ABCD} - S_{\triangle PQD}$$

$$= \frac{h}{2}(a+b) - \frac{h}{a-b}(a-x)^2$$

$$= \frac{h}{2(a-b)}[(a^2 - b^2) - 2(a-x)^2]$$

解法 2

用解析几何方法建立参数方程。

如图 1.2 所示，容易求得直线方程式为

$$AB: y = x\tan\theta = x \cdot \frac{h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{2h}{a-b}x$$

$$CD: y = (x-a)\tan(180^\circ - \theta) = \frac{2h(a-x)}{a-b}$$

于是本题的解为：

(1) 当直线在 l_1 位置时，据题意，因为 F 点坐标为 $F(x,0)$，E 点坐标为 $E\left(x, \frac{2h}{a-b}x\right)$，所以

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}|AF| \cdot |EF| = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2h}{a-b}x = \frac{h}{a-b}x^2$$

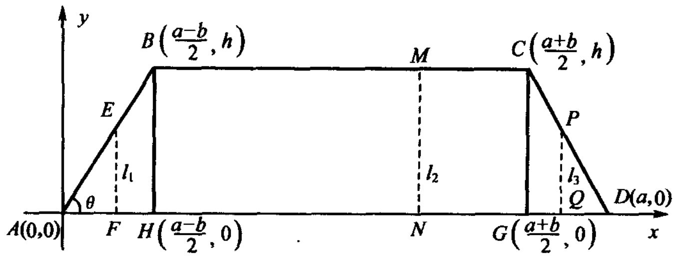


图 1.2

(2) 当直线在 l_2 位置时，按题意，因为 N 点坐标为 $N(x,0)$，M 点坐标为 $M(x,h)$，所以

$$S_{梯形ABMN}=\frac{1}{2}(|AN|+|BM|)\cdot|HB|$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+\sqrt{\left(x-\frac{a-b}{2}\right)^2+(h-h)^2}\right]\cdot h$$

$$=\frac{h}{4}[4x-(a-b)]$$

(3) 当直线在 l_3 位置时，依题意，因为 Q 点坐标为 $Q(x,0)$，P 点坐标为 $P\left[x,\frac{2h(a-x)}{a-b}\right]$，所以

$$S_{ABCPQA}=S_{梯形ABCD}-S_{\triangle PQD}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)h-\frac{1}{2}|QD|\cdot|PQ|$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)h-(a-x)\frac{2h(a-x)}{a-b}\right]$$

$$=\frac{h}{2(a-b)}[(a^2-b^2)-2(a-x)^2]$$

解法 3

应用定积分法。

由解法 2 知，AB 和 CD 两腰方程式分别为

$$AB:\ y=\frac{2h}{a-b}x$$

$$CD:\ y=\frac{2h(a-x)}{a-b}$$

于是沿 x 轴积分本题的解为：

(1) 当直线在 l_1 的位置时，因为 F 点坐标为 $F(x,0)$，所以

$$S_{\triangle AEF}=\int_0^x y\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{2h}{a-b}x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2h}{a-b}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^x=\frac{h}{a-b}x^2$$

(2) 当直线在 l_2 的位置时，因为 N 点的坐标为 $N(x,0)$，又因为 BC 方程式为 $y=h$，所以

$$S_{梯形ABMN}=S_{\triangle ABH}+S_{矩形BMNH}$$
$$=\int_0^{\frac{a-b}{2}}\frac{2h}{a-b}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{a-b}{2}}^x h\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2h}{a-b}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{a-b}{2}}+hx\bigg|_{\frac{a-b}{2}}^x$$
$$=\frac{h}{a-b}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)$$
$$=\frac{h}{4}[4x-(a-b)]$$

(3) 当直线在 l_3 位置时，因为 Q 点坐标为 $Q(x,0)$，所以

$$S_{ABCPQA}=S_{梯形ABCD}-S_{\triangle PQD}$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)h-\int_x^a\frac{2h(a-x)}{a-b}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{h}{2}(a+b)-\frac{2h}{a-b}\left[\int_x^a a\mathrm{d}x-\int_x^a x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{h}{2}(a+b)-\frac{2h}{a-b}\left[ax\bigg|_x^a-\frac{x^2}{2}\bigg|_x^a\right]$$
$$=\frac{h}{2}(a+b)-\frac{h}{a-b}(a^2-2ax+x^2)$$
$$=\frac{h}{2(a-b)}[(a^2-b^2)-2(a-x)^2]$$

4. 讨论函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调性。

解法 1

设 x_1 和 x_2 为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的任意两点，且有 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)=\sin x_1,\quad f(x_2)=\sin x_2$$

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= \sin x_2-\sin x_1 \\ &= 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} \end{aligned}$$

因为 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,且有 $x_2-x_1>0$,所以

$$0<\frac{x_2+x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\quad 0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2}$$

从而
$$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0,\quad \sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$$
因此有
$$f(x_2)-f(x_1)>0$$
就是
$$f(x_2)>f(x_1)$$

由函数单调性定义,可知函数 $\sin x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增。

解法 2

设 x 为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内的任意一点,Δx 是它的增量(可正可负),$x+\Delta x$ 也属于 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,那么

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\ &= \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \end{aligned}$$

因为在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内讨论问题,所以 $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)>0$,$\sin\frac{\Delta x}{2}$ 与 Δx 同号,所以有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$$

故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调递增的。

5. 已知一次函数 $f(x)$ 在 x_0,x_1 的值为 $f(x_0),f(x_1)$,求函数 $f(x)$ 的解析表达式。

解法 1

设函数为 $f(x)=ax+b$,则由条件得

$$\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b \\ f(x_1) = ax_1 + b \end{cases}$$

解此关于 a,b 的方程组得

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad b = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

所以
$$f(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{(x - x_0)f(x_1) - (x - x_1)f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

解法 2

由解析几何知道,求函数 $f(x)$,相当于求过 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(x_1, f(x_1))$ 两点的直线方程。直线方程为

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

所以有
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$
$$= \frac{(x - x_0)f(x_1) - (x - x_1)f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

解法 3

如果能够设法找到两个一次函数 $g_0(x)$ 与 $g_1(x)$,使它们满足

$$g_0(x_0) = 1, \quad g_0(x_1) = 0$$
$$g_1(x_0) = 1, \quad g_1(x_1) = 1$$

那么所求的函数 $f(x)$ 就可以表示为

$$f(x) = f(x_0)g_0(x) + f(x_1)g_1(x)$$

容易看出,函数 $\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ 与 $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ 适合条件,故设

$$g_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad g_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

于是有
$$f(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{(x - x_0)f(x_1) - (x - x_1)f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

6．求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$。

解法 1(应用叙述性定义法)

因为

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2!}$$

所以
$$\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}$$

当 n 充分大时，$\frac{2}{n-1}$可任意小，比如，要想使$\frac{2}{n-1}<\frac{1}{100}$，则只需使

$$n-1>\frac{2}{\frac{1}{100}}=200$$

就是 $n>201$ 即可。

也就是说，要想使$\left|\frac{n}{2^n}-0\right|=\frac{n}{2^n}$小到某程度，只需使 n 增大到一定程度即可，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

解法 2(应用两边夹原理)

因为

$$0<\frac{n}{2^n}=\frac{n}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}<\frac{n}{C_n^2}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{C_n^2}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

[说明]应用两边夹原理求极限是常用的一种方法，其原理叙述如下：若 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}z_n$ 存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$。应用此原理，本题还可以这样做：

因为

$$0<\frac{n}{2^n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{(n-2)\text{个}}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{n+2}{2}\right)\right]^n$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\sqrt{n}-2}{n}\right)\right]^n\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^n\quad(n\geqslant 9)$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

解法3

应用公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1,\quad k>0)$$

可得 $k=1,a=2$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$$

解法4(应用罗必塔法则)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n2^{n-1}}=0$$

解法5(应用斯笃兹定理)

因为 $x_n=n\to\infty,n\to\infty$;$y_n=2^n\to+\infty,n\to\infty$;且 $y_n=2^n>y_{n-1}=2^{n-1}$ 对任何自然数皆成立。因此,满足斯笃兹定理,于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-n+1}{2^n-2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$$

[说明]若数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$,且至少从某项开始 y_n 是单调增加的,即存在 N,当 $n>N$ 时有 $y_{n+1}>y_n$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

这就是斯笃兹定理。在应用此定理时,一定要先验证数列是否满足定理条件。

解法6(应用级数判敛法)

取 $a_n=\frac{n}{2^n}$,根据比值判定法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}<1$$

因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛,从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$。