SHUXUE
JIANMO JICHU

数学建模基础

薛 毅 主编

北京工业大学出版社

数学建模基础

薛 毅 主编

薛 毅 常金钢 程维虎 杨士林 编著

北京工业大学出版社

内　容　摘　要

本书深入浅出地介绍了与数学建模基础有关的内容．其重点放在微分方程模型、运筹学模型和数理统计模型方面，着重讲述建模的基本思想和模型求解的基本方法，以及运用数学软件求解数学问题的方法．其内容包括数学建模入门、微分方程模型、线性规划模型、动态规划模型、最优化模型、图论与网络模型、实用统计分析方法和计算机模拟，同时还给出 LINGO 软件包的使用．本书的重点是放在数学模型的建立以及问题的分析与描述上，读者可以举一反三，运用计算机软件解决实际问题．

本书可作为本科生和研究生“数学模型”课程的教材，也可作为大学生参加全国大学生数学建模竞赛的辅导材料以及科技人员和工程技术人员学习的参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

数学建模基础/薛毅主编．—北京：北京工业大学出版社，2004.4

ISBN 7-5639-1373-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．薛…　Ⅲ．数学模型　Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 012623 号

数学建模基础

薛　毅　主编

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编：100022　电话：(010)67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2004 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 1 次印刷

787mm × 1092mm　16 开本　21.25 印张　520 千字

印数：1～2000 册

ISBN 7-5639-1373-4/G·718

定价：32.00 元

前 言

“数学建模”一词对大家已经不陌生了，随着数学建模竞赛的开展和数学建模教育的普及，越来越多的人已认识到数学建模教育对培养学生的重要性．运用数学方法解决实际问题，是当代大学生必不可少的技能，是培养具有竞争力的高素质人才必不可少的课程，是素质教育发展的必然趋势．为适应这一发展的需要，我们编写了这本工科专业本科生、研究生适用的“数学建模基础”教材．

数学建模的书现在已有不少，本书的重点放在微分方程模型、运筹学模型和数理统计模型等方面，其中，微分方程模型的重点是介绍常用的微分方程模型；运筹学模型的重点是介绍线性规划、动态规划、最优化方法和图论与网络模型；数理统计模型的重点是介绍常用的数理统计方法，如回归分析、方差分析和判别分析等．本书还介绍了基本的计算机模拟知识，如 Monte Carlo 方法．

本书的特色之一是增加了用计算机软件求解问题的内容．在书中主要涉及三种数学软件——MATLAB，LINGO 和 R 软件．MATLAB 软件是大家常见的软件，这里主要用它求解微分方程模型．由于它是常见的软件，本书没有过多地介绍它的基本功能．LINGO 软件和 R 软件，对于大家可能比较陌生，因此本书用了两章的内容对其基本运算规则作了介绍．LINGO 软件是用来求解线性规划、非线性规划和组合优化等问题的软件．R 软件是用来求解统计问题的软件，它的格式基本上与 S-plus 格式相同．

本书的另一个特色是在各章中增加了用软件求解相应问题的方法和实例分析．各章中的例题，基本上是由数学软件求解(简单的例子除外)得到的，这样做的目的是使学生快速地掌握用软件求解问题的方法，从繁琐的计算中解放出来，从分析问题与解决问题中去体会成功的快乐，提高学生解决问题的能力．

本书是在我们已有的《数学建模基础》讲义和学习其他学校的经验的基础上，根据多年的教学实践，修改而成的．在书中，包含了我们培训学生参加全国大学生数学建模竞赛的内容，包含了北京工业大学数学建模竞赛的试题，包含了使用数学软件解决实际问题的经验．这些是本书的第三个特色．

本书的基础是“高等数学”、“线性代数”和“概率论与数理统计”．如果有“计算方法”或“数值分析”的基本知识，对本书内容的理解将有一定的帮助．为了能更好地掌握书中数学软件的使用，读者最好具备一定应用计算机的水平与能力．

本书的基本内容是：第一章，数学建模入门，介绍数学模型的基本知识，使学生对数学模型有一个初步的了解．第二章，微分方程模型，介绍常用的微分方程模型．第三章，线性规划问题，介绍线性规划问题的建立以及相应的求解方法．第四章，动态规划，介绍动态规划的基本原理与求解方法．第五章，最优化模型，介绍无约束和约束问题的建立与基本算法．第六章，图论与网络模型，介绍常用的图论与网络模型与相应的算法．第七章，实用统计分析方法，介绍最基本的统计模型与统计分析方法．第八章，计算机模拟，介绍 Monte Carlo 方法和其他常用的模拟方法．

本书的第一、二章由常金钢、杨士林编写，第七、八章由程维虎和薛毅编写，其余各章均由薛毅编写，最后由薛毅统一编写定稿.

从大的编排来看，是以微分方程模型、运筹学模型和概率统计模型为主线，但各章之间基本上相互独立. 教师和学生可根据需要选择部分或全部内容来学习. 根据我们以往的教学经验，完成本书的全部内容大约需要60学时. 在讲课方面，以介绍模型建立与模型分析为主，而数值实验则以数学软件的应用为主. 教师可以安排40~44学时的讲课内容，16~20学时的上机实习(一次MATLAB实习,两次LINGO实习,一至两次R软件的实习,每次实习四个学时)，让学生通过上机实习完成各章后面的较难的习题.

本书可作为工科各专业本科生、研究生"数学建模"课的教材或教学参考书，也可作为数学建模竞赛的强化培训教材. 书中大量的应用实例，相应的计算机软件的介绍，以及用这些软件求解问题的方法，对于研究生、科技工作者和工程技术人员都会有很大的帮助，可供他们学习与参考.

本书是集体智慧的结晶，数学建模教练组的教师和数理学院的部分数学教师对本书的讲课方法、内容的编排提出了许多宝贵意见，有的教师为本书的内容提供了他们的部分教学、科研成果. 数理学院机房教师对软件的开发以及相关的软件资料提供了很大的帮助. 他们是：高旅端、张忠占、杨中华、陈立萍、王仪华，在这里向他们表示衷心的感谢.

由于受编者水平限制，可能在内容的取材、结构的编排以及课程的讲法上存在着不妥之处，我们希望使用本书的教师、学生、同行专家以及其他读者提出宝贵的批评和建议.

在本书出版之际，我们谨向对本书提供过帮助的各位老师和专家，以及给予我们大力支持的北工大出版基金委员会和北工大出版社表示衷心的感谢.

编 著 者

2004.1

目　　录

第一章　数学建模入门

信息时代的一个重要而显著的特征是数学的应用向一切领域渗透，进而产生了许多与数学相结合的新学科或边缘学科，像生物数学、经济数学和地质数学等等．现在，社会正日益数学化，如家电的模糊控制、人工智能技术、系统工程设计等，所有这些都与数学科学息息相关．从本质上看现代高技术通常可归结为一种数学技术，这是由于它能为组织和构造知识提供方法，当用于技术时就能使科学家和工程师们生产出系统的、能复制的、并且是可以传播的知识，在经济竞争中，它是一种关键的、普遍的、能够实行的技术，科学家们的这些论述已逐步为人们所认识．

为解决各种复杂的实际问题，建立数学模型是一种十分有效并被广泛使用的工具或手段．数学建模是一种包含数学模型的建立、求解和验证的复杂过程，其关键是如何运用数学语言和方法来刻画实际问题，未来具有竞争力的优秀人才应具备较高的数学素质，能够利用数学手段创造性地解决实际问题．数学建模教育的核心是引导学生从“学”数学向“用”数学方面转变．强调数学学习的目的在于应用，完全符合理论必须联系实际的客观要求和国民经济现代化的需要．

近年来，计算机的高速发展极大地改变了世界的面貌，Mathematica，Maple，MATLAB，LINGO，SAS，SPSS，R 等各种数学工具软件包的大量涌现及使用，强有力地推动数学建模技术的广泛应用．过去使人望而生畏的大量复杂的符号演算、数值计算、图形生成以及优化与统计等工作现在大都能很方便地用计算机来实现，这使得数学建模工作已不再单纯是少数科学家的“专利”，而可以被广大科研人员和工程技术人员所掌握，从而促使数学教育和研究发生了深刻的变革．

1.1　从现实对象到数学模型

1.1.1　原型和模型

事物的原型系指人们所研究的实际对象、系统或过程，而模型则是为了某种特定的目的、加工提炼出的一种替代物，它集中反映了事物的本质．

1.1.2　数学模型

数学模型是用数学描述实际问题的产物，一般可表述为：对于现实对象，为了某种目的，根据有关的信息和规律，通过抽象简化所得到的一个数学结构，它可以是反映该事物的性态和数量规律的数学公式、图形或算法．

数学模型是对现实世界部分信息加以分析提炼加工的结果，其数学解答最终需翻译为实际解答，并应符合实际及人们的要求，从而得出对现实对象的分析、预测、决策或对结果进

行控制.

1.1.3 数学模型的分类方法

根据数学模型的数学特征和应用范畴，我们可将其进行分类，一般常见的有以下几种.

(1) 根据其应用领域，大体可分为生物数学、医学数学、经济数学模型等，再有如人口模型、生态模型、交通模型等.

(2) 根据其数学方法，可将其分为初等模型、微分方程模型、图论模型、规划模型、统计模型等.

(3) 根据模型的数学特性、可分为离散和连续模型、确定性和随机性模型、线性和非线性模型、静态和动态模型等.

(4) 根据建模目的，我们可将其分为分析、预测、决策、控制、优化模型等.

我们实际建立模型时，模型的数学特征和使用的数学方法应该是重点考虑的对象，同时这也依赖于建模的目的. 例如微分方程模型可用于不同领域中的实际问题. 学习时应注意对不同问题建模时的数学抽象过程，数学技巧的运用，以及彼此之间的联系或差异. 一般情况下确定性的、静态的、线性模型较易处理，于是在处理复杂的事物时，常将它们作为随机性的、动态的、非线性问题的初步近似；同时连续变量离散化，离散变量作为连续变量来近似处理也是常用的手段. 特别要说明的是对同一事物由于对问题的了解程度或建模目的不同，常可构造出完全不同的模型.

1.1.4 数学建模的过程

数学建模的建立过程可简略表示如图 1.1.1 所示.

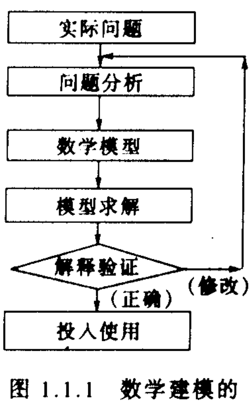

图 1.1.1 数学建模的基本过程

学习数学模型基本的目的在于学会如何利用有效的数学知识、计算机工具和科学实验手段来创造性地解决实际问题.

数学建模的基本组成部分为：

(1) 用适当的数学方法对实际问题进行描述；

(2) 求数学模型的数值解；

(3) 对模型结果的定性和定量分析.

较好的数学模型通常具备以下特点：考虑问题较全面，具有独到性或创新性，结果合理，稳定性好，适用性强.

注意数学模型解答不应由于系统参数的微小扰动或舍入误差的扩散而产生大的变化或失真.

下面简要概括一下数学建模的基本步骤及其应注意的一些问题.

1.1.5 问题分析

1. 总体设计

将分析过程中的问题要点用文字记录下来，在其框架中标示出重点、难点，是一种好的

思考方法；将问题结构化，即层层分解为若干子问题，会利于讨论交流和修改；要花费足够时间进行调研分析，以尽量避免走不必要的弯路或误入歧途.

2. 合理分析、选取基本要素

(1) 因素：主要、次要、可忽略因素的分析.

(2) 数据：对数据数量的充分性和可靠性应进行判断，并归纳或明确数据所提供的信息.

(3) 条件：分析已知条件中哪些是不变的，哪些是可变动的.

(4) 正确选择输入、输出量.

3. 启发式的思维方法

首先，应集思广益充分发挥集体的力量，然后从各种角度来分析考虑问题，例如：整体—局部，分解—组合，正面—反面，替代—转换等等. 在深入研讨过程中，“悟性”是十分重要的，即所谓的灵机一动，茅塞顿开，它是认识升华的产物.

1.1.6 合理假设

1. 基本假设

变量、参数的定义，以及根据有关“规律”作出的变量间相互关系的假定.

2. 其他假设

暂忽略因素、限定系统边界、说明模型应用范围以及局部进程中的二次假设等.

1.1.7 模型构造

应根据问题的特征和建模目的来选择恰当的数学方法，对不同处理方案的模拟结果进行比较. 从中选择“最优”方案也不失为一种策略.

简化问题的假设或处理方法，目的是要提供建模方法所需满足的前提或条件，但必须要符合实际，这样才有意义.

充分利用现有成果和简明方法，从理想化的、简单的模型逐步过渡到实际的、复杂的模型，这是一种十分有效的途径.

1.1.8 模型求解和检验

在模型求解和分析时，应注意以下三个方面.

(1) 充分利用先进的工具和数值试验技术.

(2) 结果合理性分析，其中包括误差、敏感性、稳定性分析等.

(3) 对模型检验最根本的是实践的检验，对新模型则可从合理性、精确性、复杂性、普适性等方面来进行分析评价，一般还需指明模型的改进方向.

数学建模是一个动态反复的迭代过程，没有固定的模式可以套用，特别是它与数学建模工作者自身素质密切相关，这就是说，它直接依赖于人们的直觉、猜想、判断、经验和灵感. 在这里想像力和洞察力是非常重要的. 所谓想像力实质上就是一种联系或联想能力，它表现为对不同的事物通过相似、类比、对照找出其本质上共同的规律，或将复杂的问题通过

近似、对偶、转换等方式简化为易于处理的等价问题，而洞察力则体现在抓主要矛盾或关键的把握全局的能力．由于人们的经历、素质和视野的差异，不同人所构造的模型水平则往往不同，因此数学建模是一种创造性的劳动或“艺术”．

1.1.9 在数学建模学习中一般应注意的几个方面

（1）要深刻领会数学的重要性不仅体现在数学知识的应用，更重要的是数学的思维方法，这里包括思考问题的方式，所运用的数学方法及处理技巧等，特别应致力于“双向”翻译、逻辑推理、联想和洞察四种基本能力的培养．

（2）要提高动手能力，这包括自学、文献检索、计算机应用、科技论文写作和相互交流能力，特别应有意识地增强文字表述方面的准确性和简明性．

（3）要勇于克服学习中的困难，消除畏难情绪．由于数学建模课程属于拓宽性的、启发性强的、难度较深的课程，它提倡创造性思维方法的训练，因而文字习题解题中找不到感觉或做得有出入是一种正常现象，对此不必丧失信心．相信通过摸索会逐步有所改进，如能解决好几个问题或真正动手完成一两个实际题目都应视为有所收获．从长远看这种学习有益于开阔人们的思路和眼界，有利于知识结构的改善和综合素质的提高．

附录 美国《未来学家》1998 年 5 月号文章

像天才那样思考

天才的见解是如何产生的？创造出《蒙娜·丽莎》和相对论的思维方式有哪些共同之处？爱因斯坦、爱迪生、达·芬奇、达尔文、毕加索、米开朗琪罗、伽利略、弗洛伊德和莫扎特这样的天才们的思维方式有哪些特点？我们能从他们身上还学到些什么？

一、创造性思维与复制性思维

我们的思维方式通常是复制性的，也就是说以过去遇到的相似问题为基础．遇到问题的时候，我们就会这样想：“我在生活、教育及工作中学到的知识是怎样教我解决这个问题的？”然后，我们就会选择出以经验为基础的最有希望的方法，排除其他一切方法，并且沿着这个明确界定的方向去解决问题．这些以经验为基础而采取的步骤的可靠性，使我们对于结论的正确性非常自负．

相比之下，天才的思维则是创造性的．遇到问题的时候，他们会问“能有多少种方式看待这个问题？”“怎样反思这些方法？”“有多少种解决问题的方法？”他们常常能对问题提出多种解决方法；有些方法是非传统的，甚至可能是独特的．

运用创造性的思维，你就会找到尽可能多的可供选择的解决方法．你在考虑可能性最大的方法时也考虑了可能性最小的方法．重要的是乐意挖掘所有方法，即使你已经发现了一种很有希望的方法．曾经有人问爱因斯坦，他与普通人的区别在哪里．爱因斯坦回答说，如果让一位普通人在一个干草垛里寻找一根针，那个人在找到一根针以后就会停下来；他则会把整个草垛掀开，把可能散落在草垛里的针全都找出来．

诺贝尔奖获得者理查德·费因曼在遇到难题的时候总会萌发出新的思考方法．他觉得，自己成为天才的秘密就是不理会过去的思想家们如何思考问题，而是创造出新的思考方法．

复制性的思维方式会使思想僵化．如果你永远按照惯常的思路去思考，你得到的也将永远是惯常的东西．

二、天才的思维策略

之所以说天才的思维与生物进化相似，是因为天才需要对事物作出多种多样的无法预知的选择和推测．天才在众多的选择中保留下最佳的思路，以便于进一步的发展和交流．这种理论的一个重要方面是，你需要掌握某些创造不同思路的方法；而且，要使创造不同思路的方法确实有效，它必须是“盲目的”．盲目的变化意味着脱离（已经获得的）复制性知识．

越来越多的学者试图总结天才们的思维方式．这些学者在研究了世界上最伟大的思想家的笔记、信件、谈话和思想以后，归纳出天才们具体采用的思维方法和思维策略，这些方法与策略使天才们产生了无数种新奇而独到的见解．

三、八种策略

下面简要介绍历史上在科学、艺术和工业等领域富有独创性的天才们常用的思维方式．

1．天才们以多种角度考虑问题

天才往往产生于发现某个他人没有采取过的新角度．达·芬奇认为，为了获得有关某个问题的构成的知识，首先要学会如何从许多不同的角度重新构建这个问题．他觉得，他看待某个问题的第一种角度太偏向于自己看待事物的通常方式．他就会不停地从一个角度转向另一个角度，重新构建这个问题．他对问题的理解随着视角的每一次转换而逐渐加深，最终他便抓住了问题的实质．

事实上，爱因斯坦的相对论就是对不同视角之间的关系的一种解释．弗洛伊德的精神分析法旨在找到与传统方法不符的细节，以便发现一个全新的视角．

2．天才使自己的思想形象化

文艺复兴时期，人类的创造性得到了迅速发展．这种发展与图画和图表对大量知识的记录和传播密切相关．比如，伽利略用图表形象地体现出自己的思想，从而在科学上取得了革命性的突破；而他的同时代人使用的还是传统的数学方法和文字方法．

天才们一旦具备了某种起码的文字能力，似乎就会在视觉和空间能力方面形成某种技能，使他们得以通过不同途径灵活地展现知识．当爱因斯坦对一个问题做过全面思考以后，他往往会发现，用尽可能多的方式（包括图表）表述思考对象是必要的．他的思想是非常直观的，他运用直观和空间的方式思考，而不是沿着纯数学或文字的推理方式思考．爱因斯坦认为，文字和数字在他的思维过程中发挥的作用并不重要．

3．天才善于创造

天才的一个突出特点就是具有无限的创造力．托马斯·爱迪生拥有 1 093 项专利，这个记录迄今仍然无人打破．他给自己和助手确立了提出新想法的定额，以此来保证创造力．他的个人定额是每 10 天一项小发明，每半年一项大发明．

巴赫每星期都要创作一首大合唱，即使在他生病或疲倦的时候也不例外．莫扎特一生中创作了 600 多首乐曲．爱因斯坦最著名的作品是关于相对论的论文，但他还发表了另外 248 篇论文．

4．天才进行独创性的组合

西蒙顿在他撰写的《科学天才》一书中提出，天才们进行的新颖组合比仅仅称得上有才的人要多．就像面对着一桶积木的顽皮儿童一样，天才会在意识和潜意识中不断地把想法、形象和见解组合并重新组合成不同的形式．

想一想爱因斯坦的方程式．爱因斯坦并未发明关于光的能量、质量或速度的概念，而是以一种新颖的方式把这些概念重新组合起来．而对着与其他人一样的世界，他却能够看到不同的东西．构成现代遗传学基础的遗传学法则就是奥地利僧侣格雷戈尔·孟德尔在综合了数学和生物学之后提出来的．

5. 天才设法在事物之间建立联系

如果说天才身上突出了一种特殊的思想风格，那就是把不同的对象放在一起进行比较的能力．这种在没有关联的事物之间建立关联的能力使他们得以看到他人看不到的东西．

达·芬奇在铃声与石头入水时发出的声音之间建立了联系，这使他得出了声音以波的形式传播的结论．德国化学家弗里希·凯库勒梦到一条蛇咬住自己的尾巴，从而凭直觉理解了苯分子的环状结构．塞缪尔·莫尔斯在设法制造出强大的足以越过大洲大洋的电报信号时一筹莫展．一天，他看到拉车的马匹在驿站被换下来；于是，他由更换马匹的驿站想到了电报信号的中继站．他终于找到了解决办法：每隔一段距离就把电报信号放大．

6. 天才从相对的角度去思考问题

物理学家和哲学家戴维·博姆认为，天才之所以能够提出各种不同的见解，因为他们可以容纳相对立的观点或两种互不相容的观点，研究创造过程的著名学者艾伯特·罗腾伯格指出，许多天才——包括爱因斯坦、莫扎特、爱迪生、巴斯德、康拉德和毕加索等等都有这种能力．

物理学家尼尔斯·玻尔认为，如果你把两种对立的思想结合到一起，你的思想就会暂时处于一个不定的状态，然后发展到一个新的水平．这种思想的“悬念”使思考能力之上的智力活跃起来并创造出一种新的思维方式．对立的思想的纠结缠绕为新观点的奔涌而出创造了条件．玻尔创造并协原理的能力来源于他把光想像成一种粒子和一种波．托马斯·爱迪生发明的实用照明装置就需要在灯泡中把并联线路与高电阻细金属丝相结合．而持传统观点的人认为，这两样东西根本不可能结合．因为爱迪生能够允许两种互不相容的事物同时存在，他就能够看到一种他人看不到的关系，从而有所突破．

7. 天才善于比喻

亚里士多德把比喻看作天才的一个标志．他认为，那些能够在两种不同类事物之间发现相似之处并把它们联系起来的人具有特殊的才能．如果相异的东西从某种角度看上去确实是相似的，那么，它们从其他角度看上去可能也是相似的．亚历山大·格雷厄姆·贝尔把耳朵的内部构造比作一块极薄的能够振动的钢片，并由此发明了电话．

8. 天才对变化有所准备

当我们试图做某一样事情而失败的时候，就会去做另一样事情．这就是在不经意之中有所创造的第一个原则，我们可能会自问，为什么自己会失败？这种问题很有道理．但是，使人发挥创造性的偶然因素却提出了一个不同的问题：我们做了什么？以一种新颖而意外的方式回答这个问题是能否有所创造的关键．这不是运气，而是在最高层次上富有创造性的洞察力．

亚历山大·弗莱明不是第一位研究致命的细菌并注意到暴露在空气中的培养基上会生出

霉菌的医生．一个天分不如他的医生会忽视这种看似无关的现象，而弗莱明却认为这“很有趣”，并且想知道这种现象是否有利用的可能．对这种“有趣”现象的观察最终产生了青霉素．

在思考如何制作碳丝的时候，爱迪生无意中把一块腻子在手指间绕来绕去．当他低头看手的时候，顿时眼前一亮：把碳像绳子一样缠绕起来．美国心理学家伯尔休斯·斯金纳强调，科学方法论学者的一个重要原则是：当你发现某种有趣的事物时，放弃所有其他的事情，专心研究这个事物，太多的人没能理睬机会的敲门，因为他们不得不完成事先做好的计划．天才们不会等待时机的馈赠，而是主动地寻求偶然的发现．

四、学会运用这些方法

富有创造性的天才们知道如何运用这些思维方法，并且教其他人使用这些方法．社会学家哈丽雅特·朱克曼发现，恩里科·费密培养出六名像他一样获得诺贝尔奖的学生．欧内斯特·劳伦斯和尼尔斯·玻尔各有四名学生获得诺贝尔奖．英国物理学家约瑟夫·汤姆森和欧内斯特·卢瑟福一共培养出 17 位诺贝尔奖获得者．上述这些诺贝尔奖得主不仅自己富有创造力，而且能够教授其他人如何创造性思考问题．

认识到天才们共同采用的思想方法，并且运用这些方法可以帮助你提高在工作和个人生活中的创造力．

1.2 数学建模示例

1.2.1 椅子问题

1．问题

四条腿长度相同的方椅放在不平的地面上，是否能使它四脚同时着地呢？在简单条件下答案是肯定的，其证明体现了想像力所发挥的卓越作用．

2．模型假设

（1）椅子：四腿长度相同并且四脚连线呈正方形．

（2）地面：略微起伏不平的连续变化的曲面．

（3）着地：点接触，在地面任意位置处椅子应至少有三只脚同时落地．

上述假定表明方椅是正常的，排除了地面有坎及有剧烈升降等异常情况．

3．模型建立

该问题的关键是要用数学语言把条件及结论表示出来，需运用直观和空间的方式来思考．将椅脚连线构成的正方形的中心称为椅子中心，椅子处于地面任一地点，总可想像为椅子中心处于该处——某直角坐标系的原点 O 处，而用 A，B，C，D 表示椅子四脚的初始位置．椅子总能着地，则意味着通过调整，四脚定能达到某一平衡位置，即使四脚与地面距离均为零．这可想像为使椅子以原点 O 为中心旋转角度 θ．此时四脚位置变为 A'，B'，C'，D'，如图 1.2.1 所示．显然椅子的位置可用 θ 来表示，而椅脚与地面距离应是 θ 的连续函数．

令 A，C 两脚，B，D 两脚与地面距离之和分别为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$，则该问题易归结为：

已知连续函数 $f(\theta) \geqslant 0$，$g(\theta) \geqslant 0$ 且 $f(\theta)g(\theta) = 0$，若 $f(0) > 0, g(0) = 0$，则一定存在 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$，使得

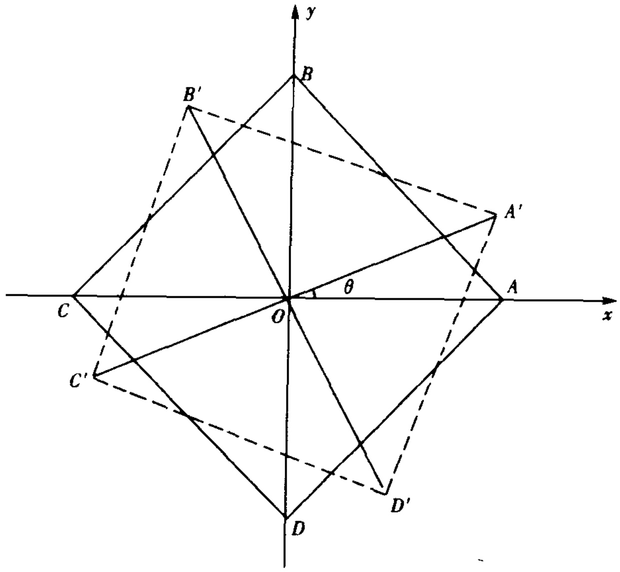

图 1.2.1 用 θ 表示椅子的位置

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$$

证明：令 $\theta = \pi/2$（即旋转 90°，对角线 AC 与 BD 互换），则 $f(\pi/2) = 0, g(\pi/2) > 0$. 定义 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$，得到 $h(0) \cdot h(\pi/2) < 0$. 根据连续函数的零点定理，则存在 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$，使得

$$h(\theta_0) = f(\theta_0) - g(\theta_0) = 0$$

结合条件 $f(\theta_0) g(\theta_0) = 0$（假设 3），从而得到

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$$

即四个点均在地面上.

1.2.2 商人安全过河

1. 问题

三名珠宝商人各带一名随从欲乘船过河，一只小船需自己划且每次至多只能容纳二人. 随从密谋：在河的任一岸，一旦他们人数多于商人人数就杀人越货. 商人事先知悉随从欲图谋不轨，此时商人怎样才能安全过河？

这是一典型的智力竞赛题，但它具有代表性，即从数学上可归结为多步决策过程，并利用状态转移法来描述和求解.

2. 基本步骤

(1)定义状态：$S_k = (x_k, y_k)$. S_k 表示第 k 次过河时此岸商人数为 x_k，随从数为 y_k，其可能取值为 x_k，$y_k = 0,1,2,3$. 对商人安全的合法状态之集合称为允许状态集合，记作

$$S = \{(x,y) \mid x = 0, y = 0,1,2,3;\ x = 3,\ y = 0,1,2,3;\ x = y = 1,2\}$$