



北京朗曼教学与研究中心

# Peculiar

北京朗曼教学与研究中心

宋伯涛 总主编

# 非常讲解

储建国 主编

Explanations

初三几何  
教材全解全析

天津人民出版社

北京朗曼教学与研究中心教研成果

PECULIAR EXPLANATIONS

# 非常讲解

江苏工业学院图书馆

初三几何教材全解全析 章

主编 储建国

天津人民出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

非常讲解. 几何. 初三/储建国主编. - 天津:天津人民出版社,2002  
ISBN 7-201-04102-9

I. 非… II. 储… III. 几何课-初中-教学参考资料 IV. G634  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028496 号

# 非常讲解 初三几何教材全解全析

主编 储建国

天津人民出版社出版

出版人: 刘晓津

(天津市张自忠路 189 号 邮政编码: 300020)

北京市昌平长城印刷厂印刷 新华书店发行

\*

2004 年 5 月第 3 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

890 × 1240 毫米 32 开本 11.75 印张

字数:390 千字 印数:1-20,000

定价:14.00 元

ISBN 7-201-04102-9

# 敬告读者

《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书汇集了北京朗曼教学与研究中心最新教学科研成果。值此再版之际,北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意!

在购买《中学 1+1》《非常讲解》系列丛书时,请读者认准封面上“北京朗曼教学与研究中心教研成果”“宋伯涛总主编”等字样,以防假冒。

近年来,发现个别出版物公然冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌或大量盗用书中内容。在此,本中心**严正声明:凡冒用《中学 1+1》《非常讲解》品牌,盗用书中内容的行为,均为侵犯知识产权行为,本中心将根据有关法规追究侵权者的法律责任。**

保护知识产权,打击盗版、盗用行为是每一个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现侵权行为,请及时告知北京朗曼教学与研究中心,本中心对您的正直行为表示由衷的感谢。

如您在使用本书过程中发现有疏漏之处或疑难问题,可来信与本中心联系,我们将悉心听取您的意见和建议,竭诚为您排忧解难。让我们携手共勉,共同打造朗曼光辉形象!

本书在全国各地均有销售,您也可以来信邮购。

**来信请寄:**北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱,北京朗曼教学与研究中心**蒋雯丽(收)**;邮编:100101。

**联系电话:**010-64925885; 64925887; 64943723; 64948723。

另外,北京朗曼教学与研究中心新建大型教学网站“朗曼 1+1 网”将于 2004 年 5 月 18 日正式开通。网站内容丰富,科目齐全,欢迎登录!

轻松浪漫的学习旅程,将从点击“朗曼 1+1 网”开始!

网址:<http://www.lmedu.com.cn>

## 再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已有三年，义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大，新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受，我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心，对于教师来说，就是改变角色定位；对于学生来说，就是变革学习方式。本着这样的精神，同时为了适应课程改革深入发展的需要，今年再版时，我们在广泛征集专家、教师、学生和家長意见的基础上，作了较大程度的修改。修改的主要内容是：

本书按照源于新教材又高于新教材的原则进行修改，对它的各个知识点以及能力要求进行全面的讲解，分析和指导，每节设如下栏目：**大纲考纲要求、教材解析、方法指引、巩固练习**等。其中教材解析为本书各节的重点，它在新教材的基础上，对章节的各知识点逐个进行详细的讲解和分析，着重知识和技能的拓展与培养和规律方法的揭示与总结，通过典型常规题，创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验，并按以下三点进行设计：

1.对典型例题进行全面剖析，并设以下四个栏目：①**思路点拨**：点拨解题思路，提供解题策略。②**解答**：按照解题方案，给出规范解答。③**误点剖析**：指出解题常见错误，并点击错误产生的原因，进行防错提示。④**评注**：总结解题过程的注意点，剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目，其目的是，开启学生思路，着眼规律方法总结。

2.试解变式题(或相关题)。从不同角度提出与上述典型题相关或相近的问题，供学生在练习中通过模仿，达到融会贯通，举一反三的目的。

3.每道典型题都针对教材中某一知识点，旨在通过对例题的探索，获得对教材相关内容的实践与体验。

作者在编写过程中,力求讲解教材全部内容,信息量大,做到精讲精析精选,讲解透彻且具有深度,辨析清晰细致,讲解分析方法新颖独到,与众不同,别具一格,不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致,分析透彻,层次分明,条理清晰,内容丰富,对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点,对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性,是朗曼中心继《中学1+1》系列丛书后又一成功力作,两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同,前者偏重于对教材的讲解与分析,后者偏重于对重点及疑难问题的讲解与测试,它们既是一个整体,又互为补充,相得益彰。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修改正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,同时也期待着来自广大师生和教育专家的批评和指教。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系。联系电话:010-64925885,64925887,64943723,64948723;通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱;邮编:100101。

宋伯涛

2004年5月于北师大

# 目录 CONTENTS

## 第六章 解直角三角形

一、锐角三角函数	1
<b>6.1 正弦和余弦</b>	1
大纲考纲要求	2
中考命题方向	2
教材解析	2
方法指引	8
巩固练习	10
巩固练习答案	12
<b>6.2 正切和余切</b>	13
大纲考纲要求	14
中考命题方向	14
教材解析	14
方法指引	19
巩固练习	23
巩固练习答案	25
二、解直角三角形	26
<b>6.3 解直角三角形</b>	26
大纲考纲要求	26
中考命题方向	26
教材解析	27
方法指引	30
巩固练习	33
巩固练习答案	36
<b>6.4 应用举例</b>	38
大纲考纲要求	38
中考命题方向	38
教材解析	39

方法指引	43
巩固练习	46
巩固练习答案	49
<b>本章专题总结</b>	50
学习目标	50
知识结构	50
知识归纳	51
学法指导	52
思想方法小结	52
典型例题	53
本章测试	58
本章测试解答	60

## 第七章 圆

一、圆的有关性质	63
<b>7.1 圆</b>	63
大纲考纲要求	64
中考命题方向	64
教材解析	64
方法指引	70
巩固练习	71
巩固练习答案	72
<b>7.2 过三点的圆</b>	73
大纲考纲要求	73
中考命题方向	73
教材解析	73
方法指引	78
巩固练习	79

巩固练习答案	80	教材解析	129
<b>7.3 垂直于弦的直径</b>	81	方法指引	132
大纲考纲要求	81	巩固练习	134
中考命题方向	81	巩固练习答案	136
教材解析	82	<b>7.8 切线的判定和性质</b>	137
方法指引	86	大纲考纲要求	137
巩固练习	89	中考命题方向	137
巩固练习答案	91	教材解析	138
<b>7.4 圆心角、弧、弦、弦心距</b>		方法指引	144
之间的关系	91	巩固练习	149
大纲考纲要求	92	巩固练习答案	152
中考命题方向	92	<b>7.9 三角形的内切圆</b>	153
教材解析	92	大纲考纲要求	154
方法指引	98	中考命题方向	154
巩固练习	100	教材解析	154
巩固练习答案	103	方法指引	160
<b>7.5 圆周角</b>	103	巩固练习	162
大纲考纲要求	103	巩固练习答案	165
中考命题方向	104	<b>*7.10 切线长定理</b>	165
教材解析	104	大纲考纲要求	165
方法指引	109	中考命题方向	166
巩固练习	113	教材解析	166
巩固练习答案	117	方法指引	170
<b>7.6 圆的内接四边形</b>	117	巩固练习	174
大纲考纲要求	118	巩固练习答案	177
中考命题方向	118	<b>*7.11 弦切角</b>	179
教材解析	118	大纲考纲要求	180
方法指引	122	中考命题方向	180
巩固练习	125	教材解析	180
巩固练习答案	127	方法指引	187
<b>二、直线和圆的位置关系</b>	128	巩固练习	191
<b>7.7 直线和圆的位置关系</b>	128	巩固练习答案	195
大纲考纲要求	128	<b>*7.12 和圆有关的比例线段</b>	197
中考命题方向	128		



大纲考纲要求	197	巩固练习	259
中考命题方向	197	巩固练习答案	260
教材解析	197	<b>7.17 正多边形的有关计算</b>	261
方法指引	205	大纲考纲要求	261
巩固练习	208	中考命题方向	261
巩固练习答案	212	教材解析	261
<b>三、圆与圆的位置关系</b>	213	方法指引	266
<b>7.13 圆与圆的位置关系</b>	213	巩固练习	267
大纲考纲要求	214	巩固练习答案	269
中考命题方向	214	<b>7.18 画正多边形</b>	270
教材解析	214	大纲考纲要求	270
方法指引	223	中考命题方向	270
巩固练习	225	教材解析	270
巩固练习答案	228	方法指引	273
<b>7.14 两圆的公切线</b>	230	巩固练习	274
大纲考纲要求	230	巩固练习答案	275
中考命题方向	230	<b>7.19 圆周长、弧长</b>	275
教材解析	230	大纲考纲要求	275
方法指引	238	中考命题方向	275
巩固练习	242	教材解析	275
巩固练习答案	245	方法指引	279
<b>7.15 相切在作图中的应用</b>	246	巩固练习	281
大纲考纲要求	246	巩固练习答案	283
中考命题方向	246	<b>7.20 圆、扇形、弓形的面积</b>	284
教材解析	246	大纲考纲要求	284
方法指引	249	中考命题方向	284
巩固练习	250	教材解析	284
巩固练习答案	251	方法指引	292
<b>四、正多边形和圆</b>	252	巩固练习	296
<b>7.16 正多边形和圆</b>	252	巩固练习答案	300
大纲考纲要求	252	<b>7.21 圆柱的侧面展开图</b>	300
中考命题方向	253	大纲考纲要求	301
教材解析	253	中考命题方向	301
方法指引	257	教材解析	301

方法指引	304
巩固练习	305
巩固练习答案	306
<b>7.22 圆锥的侧面展开图</b>	306
大纲考纲要求	306
中考命题方向	307
教材解析	307
方法指引	311
巩固练习	311
巩固练习答案	313
<b>本章专题总结</b>	313
学习目标	313
知识结构	314
知识归纳	315
学法指导	317
思想方法总结	320
典型例题	320
本章测试	326
本章测试解答	330
<b>教科书习题参考答案</b>	333



## 第六章 解直角三角形

有一座山,欲测量山的高度,但不能到达山顶,因此山的高度不能直接测得.有一人在山脚用测角器测得山顶的仰角为  $45^\circ$ ,然后再后退 1000 米,测得此时山顶的仰角为  $30^\circ$ ,能否利用以上数据求得山的高度呢?

上面的问题可归结为:在  $\text{Rt}\triangle PAC$  中, $B$  为  $AC$  上一点,已知  $\angle PAC=30^\circ$ , $\angle PBC=45^\circ$ , $AB=1000$  来求  $PC$ .

学习本章的知识后,你就能解决这个问题.

本章的内容分为两个单元,第一单元学习有关锐角三角函数的基础知识,包括锐角三角函数的定义、特殊角的三角函数、同角三角函数关系、互余两角的三角函数关系.第二单元学习直角三角形中边与角的关系,利用这些关系解直角三角形,并能利用解直角三角形的有关知识,解决实际问题.

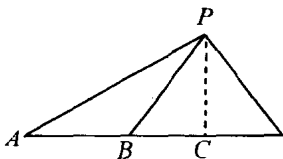


图 6.1

本章的重点是:锐角三角函数的概念和解直角三角形及其应用,特别要熟练应用特殊锐角的三角函数和三角函数值之间的对应关系,要能够说出已知特殊角的四个三角函数值,并且已知某角的一个三角函数值,说出该角的度数与该角的其余三角函数值.

本章的难点和关键是锐角三角函数的概念.

学好本章知识,将为高中阶段继续学习三角学的主体部分(包括解斜三角形、三角函数、反三角函数和三角方程)打下扎实的基础.

### 一、锐角三角函数

#### 6.1 正弦和余弦

本节主要学习正弦和余弦两种三角函数的概念,着重解决的问题是:正确使用  $\sin\alpha$  和  $\cos\alpha$  表示直角三角形中两边的比,并能够使用“计算器”,由已知锐角求出它的正弦值和余弦值,由已知三角函数值求出它对应的锐角.其中重点是正弦和余弦的概念及特殊锐角与其三角函数值之间的对应关系、互余的两角正弦和余弦的关系.难点是灵活应用正弦与余弦的关系解决问题.

**大纲考纲要求**

1. 了解正弦和余弦的概念. 能正确地应用  $\sin\alpha$  和  $\cos\alpha$  表示直角三角形中两边之比.
2. 熟记  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  以及  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  角的正弦和余弦的值, 会计算含有特殊角的正弦和余弦的式子的值.
3. 掌握互余两角的正弦和余弦关系, 并能进行相互转换.
4. 了解同角的正弦和余弦的关系式, 会利用这一关系式由一个三角函数值求该角的另一个三角函数值.
5. 会使用计算器, 查出已知角的三角函数值, 了解正弦和余弦的增减性, 并由已知某角的三角函数值求出该角.

**中考命题方向**

1. 考查直角三角形中锐角的正弦和余弦, 常在填空题中出现, 目的是考查锐角的正弦和余弦函数的定义和函数值范围, 了解锐角三角函数值与角的大小关系.
2. 考查特殊角的正弦和余弦值的计算, 常出现在计算题和填空题中, 目的是要求学生熟记特殊角的三角函数值.
3. 考查  $0^\circ$ — $90^\circ$  正余弦表的查表, 常在填空题中考查查表方法及修正值的问题, 以及三角函数值随角的大小变化而变化的规律.
4. 把正弦、余弦函数融入到二次根式、一元二次方程等知识体系中, 可构成未来中考命题的着眼点.

**教材解析****1. 正弦、余弦的概念:**

如图 6.1-1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ , 我们把锐角  $A$  的对边与斜边的比叫做  $\angle A$  的正弦, 记作  $\sin A$ , 即  $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$ ; 把锐角  $A$  的邻边与斜边之比叫做  $\angle A$  的余弦, 记作  $\cos A$ , 即  $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$ .

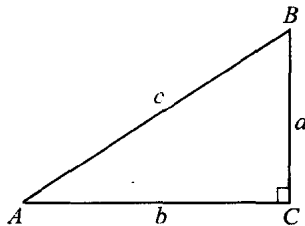


图 6.1-1

**说明:** (1) 正弦、余弦的概念是在直角三角形中相对其锐角而定义的, 其本质是两条线段长度之比, 它只是一个数值, 没有单位, 其大小只与角的大小有关, 而与三角形的大小无关.

(2) 由于在  $\text{Rt}\triangle$  中, 斜边大于直角边, 且各边长度均为正数, 因此有如下结论:



$$0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

(3)“ $\sin A$ ”和“ $\cos A$ ”是一个完整的符号,不能拆开,记号中常省去角的符号“ $\angle$ ”,但是,若用三个字母表示的角(如 $\angle ABC$ ),其正弦要写成 $\sin \angle ABC$ ,而不能写成 $\sin ABC$ .

**【例1】**如图 6.1-2,已知 $\triangle ABC$ 中: $\angle C=90^\circ$ , $BC=6$ , $CD \perp AB$ 于 $D$ , $AC=8$ .

(1)求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值;

(2)求 $\cos \angle ACD$ 的值.

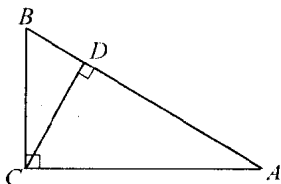


图 6.1-2

**思路点拨** (1)求 $\sin A$ 、 $\sin B$ 的值时,应先找出分别以 $\angle A$ 、 $\angle B$ 为锐角的直角三角形,再求出它们的对边与斜边之比,因此必须先由勾股定理算出斜边 $AB$ 的长.

(2)求 $\cos \angle ACD$ 时,可以在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,求 $\frac{CD}{AC}$ ,但计算 $CD$ 时,比较麻烦,因此可以利用直角三角形的性质 $\angle ACD = \angle B$ ,将 $\cos \angle ACD$ 转化成 $\cos B$ .

解:(1) $\because AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ,

$\therefore$  在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ , $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ .

(2) $\because \angle ACB = 90^\circ$ , $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$ .又 $\because CD \perp AB$ , $\therefore \angle ACD + \angle A = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACD = \angle B$ , $\therefore \cos \angle ACD = \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

**误区剖析** 误把 $\sin A$ 写成 $\frac{AC}{AB}$ ,把 $\cos A$ 写成 $\frac{BC}{AC}$ ,因此要正确理解“对边”与“邻边”的概念,正确运用正弦、余弦的定义.

**评注:**(1)解这类题的关键是找准 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的对边和邻边,同时要注意,锐角的正弦和余弦值只与角的大小有关,而与所在的三角形的大小无关,因此在某一三角形中较难计算时,可以转换到与它相等的另一角,在另一三角形中求解.

(2)对于 $\angle A$ 的每一个确定值,它的正弦和余弦均有唯一确定的值和它相对应.

**试解变式题 1-1:**已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$ 、 $AB=13$ 、 $BC=5$ 、 $CD \perp AB$ 于 $D$ ,求 $\sin A$ 、 $\cos A$ 和 $\sin \angle BCD$ .

答案: $\sin A = \frac{5}{13}$ ;  $\cos A = \frac{12}{13}$ ;  $\sin \angle BCD = \frac{5}{13}$ .

## 2. 特殊角的正弦和余弦值:

根据正弦和余弦定义,可得到如下表中常用的特殊角的正弦和余弦值.



角度 $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
三角函数					
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

注意:(1)上述结论必须熟记,记忆时结合含有这些特殊的角的直角三角形,也就是两块三角板,利用这些直角三角形中边的关系记忆,如记忆  $60^\circ$  的正弦和余弦时,可以构造  $\text{Rt}\triangle ABC$ ,使  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $c = m$ ,根据  $\angle B = 30^\circ$ ,

$$\therefore b = \frac{m}{2}, \text{由勾股定理得: } a = \frac{\sqrt{3}}{2}m, \therefore \sin 60^\circ = \sin A = \frac{a}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}.$$

(2)记忆时既要能由角度写出三角函数值,也要能由已知三角函数值写出相应的特殊角,如已知  $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ,则锐角  $\alpha = 30^\circ$ .

**【例 2】** 求下列各式的值.

(1)  $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 60^\circ}$ .

(2)  $(\cos 30^\circ + \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ - \cos 45^\circ)$

**思路点拨** 按照特殊角的三角函数值代入,再化简.

$$\text{解:原式} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(2) \text{原式} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}^2}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**误区剖析** 这类题关键是熟记特殊角的三角形函数值,常出现的错误是

误写成  $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$  等.

评注:题中出现的角均是特殊角,可以直接代入计算,但有时运算较繁,要注意运用其它知识,先化简,再代入计算.

**试解变式题 2-1:** 计算下列各式的值.

(1)  $\sin 60^\circ \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \cos 30^\circ$

(2)  $\sqrt{1 - 2\sin 30^\circ \sin 60^\circ}$



答案: (1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (2)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  (注  $2-\sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$ )

**【例 3】** 试根据下列条件, 确定锐角  $\alpha$  的值:

(1)  $2\cos\alpha - 1 = 0$ ; (2)  $2\sin^2\alpha - 3\sqrt{3}\sin\alpha + 3 = 0$ .

**思路点拨** 由已知等式可以先分别求得  $\cos\alpha$  或  $\sin\alpha$ , 然后根据特殊角的三角函数求得锐角  $\alpha$ .

解: (1)  $\because 2\cos\alpha - 1 = 0, \therefore \cos\alpha = \frac{1}{2}, \therefore$  锐角  $\alpha = 60^\circ$ .

(2)  $\because 2\sin^2\alpha - 3\sqrt{3}\sin\alpha + 3 = 0, \therefore (2\sin\alpha - \sqrt{3})(\sin\alpha - \sqrt{3}) = 0,$

$\therefore \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $\sin\alpha = \sqrt{3}$  (不合题意, 舍去),  $\therefore$  锐角  $\alpha = 60^\circ$ .

**误区剖析** 错误地写成: 当  $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\alpha = 30^\circ$ ; 当  $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $\beta = 60^\circ$ .

**评注:** 求一个锐角时, 往往先求出它的正弦值或余弦值, 但要时刻记住, 对于锐角  $\alpha$ , 一定有  $0 < \sin\alpha < 1, 0 < \cos\alpha < 1$ , 因此, 若它的正弦或余弦值不在此范围内, 应舍去.

**试解变式题 3-1:** 试根据下列条件确定锐角  $A$  的值:

(1)  $2\sin A - \sqrt{2} = 0$ ; (2)  $2\cos^2 A + 5\cos A - 3 = 0$ .

答案: (1)  $\angle A = 45^\circ$ , (2)  $\angle A = 60^\circ$ .

### 3. 同角的正弦和余弦关系:

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中:  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A, \angle B, \angle C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 则  $\sin A = \frac{a}{c}$ ,

$\cos A = \frac{b}{c}$ , 又  $\because a^2 + b^2 = c^2, \therefore \sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$ . 即

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  这就是同角的正弦和余弦的一个重要关系, 我们称之为“平方关系”. 对于任何一个锐角  $\alpha$ , 都有  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . (今后, 我们甚至可以把这一关系推广到除锐角以外的范围).

利用这一关系式, 当已知某角的正弦和余弦值之一时, 我们可以求出该角的一个三角函数.

**【例 4】** 已知: 锐角  $A$  满足  $\cos A = \frac{5}{13}$ , 求  $\sin A$  的值.

**思路点拨** 要求  $\sin A$  的值, 可以利用  $\angle A$  构造  $\text{Rt}\triangle ABC$ , 再利用正弦的定义求  $\sin A$ . 也可以利用关系式  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , 由  $\cos A$  的值求出  $\sin A$ .

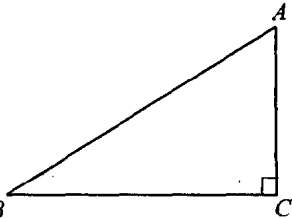


图 6.1-3



解:解法一:构造  $\text{Rt}\triangle ABC$ , 使  $\angle C=90^\circ$  (如图 6.1-3)

$$\because \cos A = \frac{5}{13}, \therefore \text{设 } AC=5k, AB=13k;$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12k,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}.$$

解法二: $\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1,$

$\therefore \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ , 又  $A$  为锐角, 则  $0 < \sin A < 1$ .

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

**误区剖析** 把平方关系错写成  $\sin A = \sqrt{1 - \cos A}$ , 或  $\sin A = 1 - \cos^2 A$ .

评注:(1)上述两种解法各有优点,第一种解法比较直观,第二种方法比较直接.究竟选择哪一种方法,看具体情况而定,今后熟练之后,尽量用解法二.

(2)一般情况下,由  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ , 我们应该得到  $\sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$ , 但注意到  $\angle A$  为锐角, 才把  $-\sqrt{1 - \cos^2 A}$  舍去, 但今后学了其它角的三角函数后, 要注意不要随意舍去.

试解变式题 4-1: 已知:  $\angle \alpha$  为锐角, 且  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ , 求  $\cos \alpha$ .

试解变式题 4-2: 化简  $\sqrt{1 - 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}$

答案: 4-1  $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ .

4-2: 利用  $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$  将原式化简为  $|\sin 60^\circ - \cos 60^\circ|$ , 然后再计算的原式  $= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ .

#### 4. 互余两角的正弦和余弦关系:

由图 6.1-4, 可以发现, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $BC$  边既是  $\angle A$  的对边, 也是  $\angle B$  的邻边,  $AC$  边既是  $\angle A$  的邻边,

也是  $\angle B$  的对边. 因此:  $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ ,  $\cos B = \frac{BC}{AB} =$

$\frac{a}{c}$ , 即  $\sin A = \cos B$ , 同理  $\cos A = \sin B$ .

注意: $\because \angle A + \angle B = 90^\circ$ , 上面两式也可以写成  $\sin A = \cos(90^\circ - A)$ ,  $\cos A = \sin(90^\circ - A)$ .

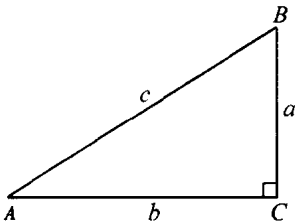


图 6.1-4

一般地: 对于任意两个锐角  $\alpha$  和  $\beta$ , 若  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , 则  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,  $\cos \alpha = \sin \beta$ , 也可以写成, 对于任意一个锐角  $\alpha$  有:  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ ,  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ .

因此, 今后解题中, 若某角的正弦比较难求时, 可以转化为它的余角的余弦, 某





角的余弦,也可以转化为它的余角的正弦.

**【例 5】** (1) 计算  $\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ$  的值.

(2) 计算:  $\sqrt{\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ} - 2\cos 60^\circ \cos 45^\circ$

**思路点拨** (1)  $50^\circ$  与  $40^\circ$  均非特殊角,无法直接求出它们的值,注意到  $50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$ ,

$\therefore$  可以利用  $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ ,把上式化简.

(2) 利用  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ, \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ ,将原式化简.

**解:** (1)  $\because \sin 50^\circ = \cos 40^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ ,

$\therefore$  原式  $= \sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ = 1$ .

(2) 原式  $= \sqrt{\sin^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ} - 2\sin 30^\circ \sin 45^\circ$   
 $= \sqrt{(\sin 30^\circ - \sin 45^\circ)^2} = |\sin 30^\circ - \sin 45^\circ|$   
 $= \sin 45^\circ - \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

**误区剖析** 这类题需综合运用正弦和余弦的两种关系,常见错误是误写成  $\sin 50^\circ = \sin 40^\circ, \cos 50^\circ = \cos 40^\circ$ ,或误写成  $\sin 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ), \cos 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ)$ .

**评注:** (1) 互余两角的正余弦关系是从直角三角形中推导出来的,但不要错误地认为它只适用于同一直角三角形中的两个锐角,它对于任意互余的两角都成立,不管它们是否在同一直角三角形中.

(2) 使用这一关系时,要注意三角函数的名称改变的同时,角也要改变为原角的余角,只改变其中之一是错误的.

**试解变式题 5-1:** (1) 计算  $\sin 53^\circ \cos 37^\circ + \cos 53^\circ \sin 37^\circ$ .

(2) 已知  $\angle A + \angle B = 90^\circ, \cos A = \frac{1}{3}$ , 求  $\sin B$ .

**答案:** (1) 1; (2)  $\frac{1}{3}$ .

### 5. 用科学计算器计算三角函数值

在实际生活与科学研究中,我们涉及的角度往往是一个任意的锐角,钝角,那么这些角的三角函数值怎么求得呢?

我们要学会用计算器求任意一个锐角的正弦、余弦和由一个锐角三角函数值求出所对应的角.(以 CZ1206 型计算器为例)

#### 1. 用计算器求整数度数的锐角三角函数值

例如求  $\sin 35^\circ$

操作过程:首先按键  $\boxed{\text{ON/C}}$ , 开机,对于  $\boxed{\text{DEG}}$  状态,再依次按键  $\boxed{3} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{\sin}$

就可得到答案 0.573576436