

一套适合家长辅导孩子、学生自学的书



最新修订版

小学数学奥数辅导丛书

小学数学

奥数

辅导新教案

黄凤胜 左丽华
小学数学奥数研究组

主编
审定

(五年级同步)



名师导航
自学辅导
挑战奥数

名题精讲
举一反三
走向名校



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

小学数学奥林匹克丛书

小学数学奥赛 辅导新教案 (五年级同步)

丛书主编 韩新生 王家银

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 秀 王 峰 王家银 左丽华 田朝光
刘华彬 刘晓波 李双平 李晋渊 李道军
孙新爱 杨 磊 沈勤龙 苏 静 陈龙清
陈自文 范科科 徐焯辉 曹继国 黄凤胜
董培吉 覃 岳 韩新生 靳 强 廖康强
潘淑丽

策 划 蔡 晔
本书主编 黄凤胜 左丽华



机械工业出版社

本书是由一批有丰富教学经验的专家、一线优秀教师,根据小学生学习、记忆、思维的规律,精心设计、编写的。本书立足于小学数学教学大纲,紧扣数学奥林匹克竞赛主导思想,引导学生跳出常规的思维定式,通过对知识网络的概括、学习方法的指导、经典例题的讲解和发散思维训练、总结延伸性的点津、学习效果阶段检测、仿真模拟综合训练等栏目,使学生逐步学会数学奥林匹克竞赛的解题思维方法,并能举一反三,不断提高解题能力和自学能力。

图书在版编目(CIP)数据

小学数学奥赛辅导新教案.五年级同步/黄凤胜,左丽华主编.

—3版.—北京:机械工业出版社,2004.5

(小学数学奥赛辅导丛书)

ISBN 7-111-10254-1

I.小... II.①黄...②左... III.数学课—小学—

教学参考资料 IV.G623.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 044606 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:邝 鸥 版式设计:郑文斌

封面设计:鞠 杨 责任印制:李 妍

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 6 月第 3 版·第 1 次印刷

890mm×1240mm A5·9.875 印张·326 千字

定价:15.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话:(010) 88379646、68993821

封面无防伪标均为盗版

写在前面的话

数学是思维的体操。大文豪雨果将数学誉为开启人类智慧的“钥匙”。古希腊哲学家柏拉图曾经在他的哲学学校门口张榜声明：不懂几何学的人不得入内。他认为，未经过数学训练的人，尤其是没有掌握严格的演绎推理方法的人，难以深入讨论他所开设的课程。在英国大学里的律师专业和美国西点军校，许多高深的数学课程都是学生的必修课。著名数学教育家米山国藏说过一段寓意深刻的话：“学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一两年就忘记了，然而不管他们从事什么业务工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要的作用。”

可见，数学教育主要不在于培养数学家，而在于培养人的数学思想，通过开拓头脑中的数学空间，促进全面素质的提高和发展。

编写意图

数学奥赛，集中体现了素质教育思想，它脱胎于传统教学，以开放性、创造性的思维模式，吸引了无数渴望探索数学迷宫的孩子们。同时，数学奥赛又是传统数学教学有益的补充，可以起到激发兴趣、开拓思路、提高能力、扩展知识等多重作用。正因为如此，许多重点中学开设的实验班，以数学奥林匹克的水平测试作为录取新生的首要条件。但是学校的普通数学教学与数学奥赛的要求差距很大，老师、学生和家长迫切需要一本既能作为学生自学又可帮助家长指导孩子的辅导书。

基于以上想法，我们精心策划编著了这套《小学数学奥赛辅导丛书》，希望能为提高我国小学生的数学素质出一份力，为有志进入重点中学学习的孩子们提供一个有力的帮手。

编写特点

数学素质集中体现为数学解题能力，而数学解题能力的提高取

决于三个因素：牢固的基本数学知识、正确的思维方法和丰富的解题经验。本书紧扣数学奥赛主导思想，针对小学数学奥赛中常用的解题技巧，归纳总结了具有代表性的基本解题方法，将知识与方法融为一体，引导学生跳出常规的思维定式，打开思路，举一反三。通过发散思维训练和综合训练题，让学生边学边用，温故知新，不断提高解题能力，形成系统的数学思维。

编写力量

本套丛书以三年级为起点共分为六册，可供不同层次的读者选用。丛书的主编是特级教师韩新生和数学博士王家银。参加各分册编写的均为来自北京四中、北师大实验中学、人大附中、清华附中、北京八中、首都师大附中等著名中学的一线优秀教师。

修订说明

《小学数学奥赛辅导丛书》出版以来，得到了广大读者的好评。丛书的编写本着：“立足于自学辅导，服务于初学者；从基础到奥数，逐步提高；讲、练有机结合，归纳、发散全面培训”这一指导思想。事实证明，我们的做法是正确的，是符合读者需要的。

事物在变化，时代在发展。随着中小学课程改革的推进，奥数的思维方法在中小学教材里逐渐凸现出来，数学奥赛作为惟一一项带有政府背景的全国性竞赛，受到了更加广泛的关注。

丛书的全体作者遵照与时俱进、更好的服务于读者的宗旨，经过充分的调研、讨论，对本丛书进行了全面修订，使之能第一时间体现教育的趋势，有效提高学生的数学思维能力。

此次修订，增加了经典例题和能力训练题的数量，增设了阶段评估测试A、B卷，答案讲解更加详细。

让数学学习不再枯燥乏味，让数学奥林匹克不再高深莫测，让数学成绩快速提高，让重点中学的大门为你敞开。细读本书让你眼睛一亮：奥赛数学原来没那么难！

丛书编委会

2004年5月

目 录

写在前面的话

第 1 讲 数的整除特征 (一)	(1)
第 2 讲 数的整除特征 (二)	(7)
第 3 讲 质数与合数	(13)
阶段评估测试一	(18)
第 4 讲 分解质因数	(21)
第 5 讲 最大公约数与最小公倍数	(28)
第 6 讲 奇偶数	(37)
阶段评估测试二	(45)
第 7 讲 解应用题	(48)
第 8 讲 简单消长、工程、浓度问题	(57)
第 9 讲 列方程解应用题	(68)
第 10 讲 行程问题	(77)
阶段评估测试三	(88)
第 11 讲 巧算	(92)
第 12 讲 分数	(98)
第 13 讲 填数字	(106)
第 14 讲 “数字 24” 游戏	(118)
阶段评估测试四	(126)
第 15 讲 平面图形的面积	(129)
第 16 讲 图形分割	(140)
第 17 讲 立体图形的表面积	(152)
阶段评估测试五	(159)
第 18 讲 逻辑推理与递推	(163)
第 19 讲 抽屉原理	(173)
第 20 讲 抽屉原理的应用	(182)
阶段评估测试六	(190)
综合训练一	(194)

综合训练二	(197)
综合训练三	(201)
答案与精析	(204)



第1讲 数的整除特征(一)

+++++名师导航+++++

知识精讲

数的整除性质主要有:

- (1)若甲数能被乙数整除,乙数能被丙数整除,则甲数能被丙数整除。
- (2)若两个数能被一个自然数整除,那么这两个数的和与差都能被这个自然数整除。
- (3)几个数相乘,若其中有一个因数能被某一个数整除,那么它们的积也能被这个数整除。
- (4)若一个数能被两个互质数中的每一个数整除,那么这个数也能被这两个互质数的积整除。
- (5)若一个数能被两个互质数的积整除,那么这个数也能分别被这两个互质数整除。
- (6)若一个质数能整除两个自然数的乘积,那么这个质数至少能整除这两个自然数中的一个。

(7)个位上是0、2、4、6、8的数都能被2整除。

(8)个位上是0或者5的数都能被5整除。

(9)若一个整数各位数字之和能被3整除,则这个整数能被3整除。

(10)若一个整数末尾两位数能被4整除,则这个数能被4整除。

(11)若一个整数末尾三位数能被8整除,则这个数能被8整除。

(12)若一个整数各位数字之和能被9整除,则这个整数能被9整除。

数的整除概念、性质及整除特征为解决一些整除问题带来了很大方便,在实际问题中应用广泛。要学好数的整除问题,就必须找到规律,牢记上面的整除性质,不可似是而非。

自学指导

能被2和5,4和25,8和125整除的数的特征是分别看这个数的末一位、末两位、末三位。我们可以综合推广成一条:末 n 位数能被 2^n (或 5^n)整除的数,本身必能被 2^n (或 5^n)整除;反过来,末 n 位数不能被 2^n (或 5^n)整除的数,本身必不能被 2^n (或 5^n)整除。例如,判断253200、371601能否





被 16 整除, 因为 $16 = 2^4$, 所以只要看各数的末四位数能否被 16 整除。

+++++ 经典例题 +++++

【例 1】在 568 后面补上三个数字, 组成一个六位数, 使它能分别被 3、4、5 整除, 且使这个数尽可能小。



思路剖析

这个六位数分别被 3、4、5 整除, 故它应满足如下三个条件:

- (1) 各位数字和是 3 的倍数;
- (2) 末两位数组成的两位数是 4 的倍数;
- (3) 末位数为 0 或 5。

按此条件很容易找到这个六位数。



解答

不妨设补上三个数字后的数为 $\overline{568abc}$, 由于这个六位数被 4、5 整除, 因为 $\overline{bc}$ 被 4 整除, 所以 c 不能是 5 而只能是 0, 且 b 只可能是 2、4、6、8、0。

又因 $3 \mid \overline{568abc}$, 所以 $3 \mid (5+6+8+a+b+0)$, 所以:

当 $b=2$ 时, $3 \mid (5+6+8+a+2)$, a 可为 0、3、6、9;

当 $b=4$ 时, $3 \mid (5+6+8+a+4)$, a 可为 1、4、7;

当 $b=6$ 时, $3 \mid (5+6+8+a+6)$, a 可为 2、5、8;

当 $b=8$ 时, $3 \mid (5+6+8+a+8)$, a 可为 0、3、6、9;

当 $b=0$ 时, $3 \mid (5+6+8+a+0)$, a 可为 2、5、8。

为了使六位数 $\overline{568abc}$ 尽可能地小, 则 a 应取 0、 b 应取 2、 c 应取 0。

故能被 3、4、5 整除的最小六位数 $\overline{568abc}$ 应为 568020。

【例 2】四位数 $\overline{8A1B}$ 能同时被 2、3、5 整除, 问这个四位数是多少?



思路剖析

$\overline{8A1B}$ 能同时被 2、3、5 整除, 所以 $\overline{8A1B}$ 满足以下三个条件: 个位数字 B 在 0、2、4、6、8 之中, 各位数字之和是 3 的倍数, 个位数字 B 在 0、5 之中。第一个和第三个条件都是针对个位数字的, 所以先根据它们确定个位数字 B , 再根据第二个条件确定百位数字 A 。



解答

要使 $\overline{8A1B}$ 能同时被 2 和 5 整除, 个位数字只能是 $B=0$; 又要使 $\overline{8A10}$ 能被 3 整除, 所以各位数字之和 $8+A+1+0=9+A$ 应能被 3 整除。可以





看出,当 A 取 0、3、6、9 时,各位数字之和 $9 + A$ 可以被 3 整除。所求的四位数是 8010、8310、8610、8910。

【例 3】 有一个四位数 $\overline{3AA1}$ 是 9 的倍数,求 A 的值。



思路剖析

四位数 $\overline{3AA1}$ 是 9 的倍数,即能被 9 整除,根据能被 9 整除的数的特征,这个四位数的各个数字之和一定是 9 的倍数。



解答

(1) 当和是 9 时, $3 + A + A + 1 = 9$, 即 $2A = 5$, 所以 $A = 2.5$ (舍);

(2) 当和是 18 时, $3 + A + A + 1 = 18$, 即 $2A = 14$, $A = 7$;

(3) 当和是 27 时, $3 + A + A + 1 = 27$, $A = 11.5 > 10$ (舍)。

所以, A 的值是 7。

【例 4】 一位马虎的采购员买了 72 只桶,洗衣服时将购货发票洗烂了,只能依稀看到:72 只桶,共 $\square 67.9 \square$ 元($\square$ 内的数字洗烂了),请你帮他算一算,一共用了多少钱?



思路剖析

用整除性质:一个数能被两个数的积整除,那么这个数就能同时被这两个数整除。例如,整数 a 能被 15 整除,那么这个数一定能同时被 3 和 5 整除。这种方法是分析整除问题的基本方法。



解答

将 $\square 67.9 \square$ 元看做 $\square 679 \square$ 分,这是 72 只桶的总价,因为单价 $\times 72 = \square 679 \square$, 所以 $\square 679 \square$ 能被 72 整除。 $72 = 8 \times 9$, 所以 $\square 679 \square$ 应该能同时被 8 和 9 整除。

如果 $\square 679 \square$ 能被 8 整除,那么它的末三位一定能被 8 整除,即 $8179 \square$, 容易算出 $\square$ 内应是 2。

因为 $\square 6792$ 能被 9 整除,所以其各数位上数字之和能被 9 整除。 $\square + 6 + 7 + 9 + 2 = \square + 24$, 显然, $\square$ 中的数只能是 3。

所以这笔账是 367.92 元。

答:一共用了 367.92 元。

【例 5】 在 $\square$ 里填上适当的数字,使得六位数 $\square 678 \square \square$ 能被 8、9 和 25 整除。





解 答

☆解法一:根据8、9和25整除的数的特征很容易解出此题。

这个六位数能被25整除,根据能被25整除的数的特征,六位数的末两位数可能是00、25、50、75;该数又能被8整除,所以这个六位数的末三位数应能被8整除,而在800、825、850、875中只有800满足条件,所以这个六位数的个位、十位都是0;又因为这个六位数能被9整除,所以这个六位数的各位数字之和(不妨设首位为 x)为:

$$x + 6 + 7 + 8 = 21 + x$$

能被9整除,可推出 x 只能为6,所以这个六位数为667800。

☆解法二:根据数的整除性质(4):如果一个数能被两个互质数中的每一个数整除,那么这个数也能被这两个互质数的积整除。

因为 $8 \times 25 = 200$,而且8与25互质,根据整除的性质(4),所求的六位数能被200整除,所以个位、十位都应该是0。然后由这个六位数能被9整除,和解法一一样的方法可知这个六位数为667800。

【例6】有一水果摊一天进货6筐,分别装着香蕉和苹果,重量为8千克、9千克、16千克、19千克、23千克和27千克。头一天只卖出一筐苹果,在剩下的5筐中,香蕉的重量是苹果重量的2倍。问卖掉的那筐苹果重多少千克?剩下的5筐,哪几筐是苹果,哪几筐是香蕉?



思路剖析

根据已知条件:剩下的5筐中香蕉的重量是苹果重量的2倍。可推出:剩下的5筐中香蕉重量与苹果重量之和是3的倍数,即能被3整除。



解 答

因为6筐水果的总重量: $8 + 9 + 16 + 19 + 23 + 27 = 102$ (千克),根据题意,剩下的5筐中香蕉重量与苹果总重量之和是3的倍数,那么卖出一筐苹果也必须是3的倍数。从6筐水果数中可知有两种情况,卖出一筐苹果可能是9千克或27千克。

如果卖出一筐苹果是9千克,那么 $102 - 9 = 93$ (千克)。根据剩下的5筐中香蕉的重量是苹果重量的2倍,则苹果为 $93 \div (1 + 2) = 31$ (千克)。从剩下的8、16、19、23和27中可知8千克和23千克为两筐苹果($8 + 23 = 31$)。最后剩下16千克、19千克和27千克这三筐为香蕉。

如果卖出一筐苹果是27千克,同理, $102 - 27 = 75$ (千克),苹果为 $75 \div (1 + 2) = 25$ (千克),即16千克与9千克这两筐。香蕉便是最后剩下的8





千克、19 千克和 23 千克这三筐。

所以本题有两种答案:如果卖出的那筐是 9 千克苹果,则剩下的 5 筐中 8 千克、23 千克两筐为苹果,16 千克、19 千克和 27 千克三筐为香蕉。如果卖出的那筐是 27 千克苹果,则剩下的 5 筐中 9 千克、16 千克两筐为苹果,8 千克、19 千克、23 千克三筐为香蕉。

【例 7】把 1 至 1997 这 1997 个自然数依次写下来,得一个多位数 12345678910111213...1994199519961997,试求这个多位数除以 9 的余数。



思路剖析

根据一个数能被 9 整除的特征可以知道:一个自然数除以 9 的余数,等于这个自然数各个数位上数字和除以 9 的余数。所以上面求多位数除以 9 的余数问题,便转化为求 1 至 1997 这 1997 个自然数中所有数字之和是多少的问题。



解答

☆解法一:将 0 至 1999 这 2000 个自然数一头一尾搭配分成如下的 1000 组:

(0, 1999), (1, 1998), (2, 1997), (3, 1996), (4, 1995), (5, 1994), (6, 1993), (7, 1992), (8, 1991), (9, 1990), (10, 1989), ..., (994, 1005), (995, 1004), (996, 1003), (997, 1002), (998, 1001), (999, 1000), 以上各组两数之和都为 1999, 并且每一组两数相加时都不进位, 这样 1 至 1999 这 1999 个自然数的所有数字之和等于:

$$(1 + 9 + 9 + 9) \times 1000 = 28000$$

1998、1999 这两个数各数位上的数字和为 27、28。28000 - 27 - 28 = 27945, 9 能整除 27945, 所以多位数除以 9 余 0。

☆解法二:因为依次写出的任意连续 9 个自然数所组成的多位数,一定能被 9 整除。而从 1 至 1997 一共有 1997 个数, $1997 \div 9 = 221 \cdots 8$, 1990、1991、1992、1993、1994、1995、1996、1997 这 8 个数所有数位上的数字和为 $19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 = 180$, 180 能被 9 整除, 所以多位数除以 9 余 0。



点拨

为什么依次写出的任意连续 9 个自然数所组成的多位数一定能被 9 整除呢? 下面解释一下。因为任意连续的 9 个自然数的各数位上的数字和除以 9 的余数, 必定是 0、1、2、...、7、8 这 9 个数, 而这 9 个数的和为 36。





36 能被 9 整除,所以任意依次写出的 9 个连续自然数组成的多位数一定能被 9 整除。

+++++ 发散思维训练 +++++

1. $\overline{45ab}$ 这个四位数,同时能被 2、3、4、5、9 整除,求此四位数。

2. 55 块糖分给甲、乙、丙三人,甲分到糖的块数是乙的 2 倍,丙最少,但也多于 10 块,三个人各分到糖多少块?

3. 4205 和 2813 都是 29 的倍数,问 1392 和 7018 是不是 29 的倍数?

4. 已知 45 整除 $\overline{x1993y}$,求所有满足条件的六位数 $\overline{x1993y}$ 。

5. 求无重复数字,能被 75 整除的五位数 $\overline{3a6b5}$ 。

6. 一个三位数能被 3 整除,去掉它的末位数后,所得的两位数是 17 的倍数,这样的三位数中,最大是几?

7. 将自然数 1、2、3、4、5、6、7、8、9 依次重复写下去组成一个 1993 位数,试问这数能否被 3 整除?

8. 有这样的两位数,它的两个数字之和能被 4 整除,而且比这个两位数大 1 的数,它的两个数字之和也能被 4 整除。所有这样的两位数的和是_____。

9. 小马虎在一张纸上写了一个无重复数字的五位数: $3\square6\square5$,其中十位数字和千位数字看不清了,但是已知这个数是 75 的倍数,那么满足上述条件的五位数中,最大的一个是多少?

10. 五位数 $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数,其中 $\overline{abcd}$ 是 4 的倍数,那么 $\overline{abcde}$ 的最小值是几?(不同字母表示不同的数字)

11. 有 0、1、4、7、9 五个数字,从中选出四个数字组成不同的四位数,如果把其中能被 3 整除的四位数从小到大排列起来,第五个数的末位数字是_____。

12. 三个自然数,每一个数都不能被另二个数整除,而其中任二个数的积都能被第三个数整除,那么这三个数和的最小值是几?





第2讲 数的整除特征(二)

+++++名师导航+++++

知识精讲

上一讲我们已经学习了被 2、3、5、8、9、25、125 等整除的数的特征和一些整除的基本性质,但作为奥林匹克竞赛仅仅掌握以上知识还不够,这一讲继续学习有关数的整除知识。

(1)能被 7、11 和 13 整除的数的特征:如果一个数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数的差(一定要大数减小数)能被 7、11 或 13 整除,那么这个数就能被 7、11 或 13 整除。

(2)能被 11 整除的数的特征还有:一个数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差(大减小)是 11 的倍数。

自学指导

上面数的整除特征可以结合例子来理解。例如:443716,判断它能否被 7、11、13 整除的方法是: $716 - 443 = 273$ 。因为 273 能被 7 整除,所以 443716 能被 7 整除;因为 273 不能被 11 整除,所以 443716 不能被 11 整除;因为 273 能被 13 整除,所以 443716 能被 13 整除。做题时要理论联系实际。

同学们在牢记上面整除的数的特征的同时,重点应弄清楚能被 7、11、13 整除的数为什么有上面的特征。

+++++经典例题+++++

【例 1】 用 6、7、8、9 四个数字组成的,各位数字互不相同的四位数中,能被 11 整除的有多少个?

思路剖析

在给定的四个数字中,因为只有 $(6+9) - (7+8)$ 一种情况是 11 的倍数,所以把 6 和 9 要相隔一个数,7 和 8 要相隔一个数。

根据这个特点,可组成如下 8 个数,它们分别是 6798、6897、7689、7986、8679、8976、9768、9867。





再用能被 11 整除的数的特征检验, $6 + 9 = 15$ $7 + 8 = 15$ $15 - 15 = 0$, 6798 能被 11 整除。同理, 其余七个数也能被 11 整除。

解答

由上述分析可知有 8 个数符合题意。

【例 2】 如果下面这个 41 位数 $\underbrace{555\cdots 5}_{20\text{个}5} \square \underbrace{999\cdots 9}_{20\text{个}9}$ 能被 7 整除, 那么中间方格内的数字是几?

思路剖析

对于数 555555, 由于 $555 - 555 = 0$ 是 7 的倍数, 根据能被 7 整除的数的特征, 555555 也能被 7 整除; 同理 999999 也能被 7 整除, 所以 $\underbrace{555\cdots 5}_{18\text{个}5}$ 和 $\underbrace{999\cdots 9}_{18\text{个}9}$ 也能被 7 整除, 所以我们可以把这个 41 位数分解成几个数的和, 其中部分数能被 7 整除。

解答

$\underbrace{555\cdots 5}_{20\text{个}5} \square \underbrace{999\cdots 9}_{20\text{个}9} = \underbrace{555\cdots 5}_{18\text{个}5} \underbrace{00\cdots 0}_{2\text{个}0} + 55 \square \underbrace{99}_{18\text{个}0} \underbrace{00\cdots 0}_{2\text{个}0} + \underbrace{999\cdots 9}_{18\text{个}9}$, 上式等号右边的三个加数中, 第一个和第三个加数都能被 7 整除, 由此可推出 $55 \square \underbrace{99}_{18\text{个}0}$ 能被 7 整除, 所以 $55 \square 99$ 能被 7 整除。根据能被 7 整除的数的特征, $\square 99 - 55 = \square 44$ 也能被 7 整除, 可推理得 $\square$ 内应为 6。

【例 3】 有一堆苹果, 要装在 46 个箱子里, 其中有 45 个大箱子和一个小箱子, 而小箱子装的苹果只相当于大箱装的数量的一半, 现有 $\underbrace{497949794979\cdots 49794979}_{99\text{个}4979}$ 个苹果, 如果规定按箱子大小平均分装苹果数是否能办到?

思路剖析

由于大小箱子装的苹果的数量不一致, 不便于解题, 所以我们可以统一成小箱子, 则应有 $2 \times 45 + 1 = 91$ 个小箱子, 那么是否恰好装完, 并符合要求, 关键看总苹果数 $\underbrace{497949794979\cdots 49794979}_{99\text{个}4979}$ 能否被 91 整除, 由于 $91 = 7 \times 13$, 所以由整除的性质, 只需要考虑 7、13 是否能整除总苹果数。

由于 13 整除 4979, 而 7 整除 497949794979, 那么必定有 91 整除 497949794979, 因为 $99 \div 3 = 33$, 所以容易推出 91 整除





497949794979...49794979, 所以能把苹果按规定装入箱子中。

99个4979



解答

$2 \times 45 + 1 = 91$ (个), $7 \times 13 = 91$, 因为 13 整除 4979, 7 整除 497949794979, 所以 91 整除 497949794979, 则 91 整除 497949794979...4979。

99个4979

答: 可以做到按箱子大小平均分装苹果。

[例 4] 从 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数中选出 5 个不同的数, 组成一个五位数, 使它能被 3、5、7、13 同时整除, 这个数最大是多少?



思路剖析

这道题如果从 10 个数字中选出 5 个不同的数, 组成一个五位数, 再逐个判断每个五位数能否同时被 3、5、7、13 整除, 那是非常麻烦的。可以先从整体上考虑, 因为 3、5、7、13 这四个数两两互质, 且 $3 \times 5 \times 7 \times 13 = 1365$, 那么我们要找的数就是在五位数中能被 1365 整除的最大的那个数。那我们只需用一个自然数去与 1365 相乘, 使积尽可能大且是一个五位数即可(注意, 五位数中不能出现相同数字)。



解答

设 $1365 \times a$ (a 是自然数) 的积是要求的五位数, 可知: $1365 \times a < 100000$, 则 $a \leq 73$ 。当 $a = 73$ 时, 这个五位数是 $1365 \times 73 = 99645$, 数字重复了, 舍去; 当 $a = 72$ 时, 这个五位数是 $1365 \times 72 = 98280$, 数字重复; 当 $a = 71$ 时, 这个五位数是 $1365 \times 71 = 96915$, 数字重复; 当 $a = 70$ 时, 这个五位数是 95550, 数字重复; 当 $a = 69$ 时, 这个五位数是 94185, 符合题目条件, 所以, 这个数是 94185。



点评

这道题从整体入手, 先用 3、5、7、13 相乘得 1365, 在五位数中通过找 1365 的最大倍数得到解答。最后用枚举的方法时, 虽然要计算 1365 与 73、72、71、70、69 的积, 但比起漫无边际地去找这样的五位数要简便得多。

[例 5] 用数字 6、7、8 各两个组成一个六位数, 使它能被 168 整除。这个六位数是多少?



思路剖析

$168 = 3 \times 56$, 3 与 56 互质。因为 $6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 = 42$, 42 是 3 的倍数, 所以用 6、7、8 各两个组成的所有六位数都能被 3 整除。问题转化为使





组成的六位数能被 56 整除。因为 $56 = 7 \times 8$, 7 与 8 互质, 所以只要组成的数既能被 7 整除, 又能被 8 整除即可。要能被 8 整除, 只要看末三位数, 如果能仅用 6、7、8 各一个数组成能被 8 整除的三位数, 那么把它连写两遍得到的六位数就合乎要求。而用 6、7、8 各一个数不难组成被 8 整除的三位数。

解答

768 能被 8 整除, 768768 也就能被 8 整除, 它又能被 7 整除, 而 7 与 8 互质, 所以它能被 7 与 8 的积 56 整除。 $7+6+8+7+6+8=42$, 3 整除 42, 所以 768768 能被 3 整除, 由于 3 与 56 也互质, 因此, 768768 就能被 3 与 56 的积 168 整除。

点拨

本题初看无处下手, 但是我们应用整除性质“一个数能被互质的两个自然数整除, 就一定能被这两个互质数的积整除”, 把问题逐步转化, 实现了化难为易的目的。

【例 6】 甲、乙两人进行了下面的游戏。两人先约定一个整数 N , 然后由甲开始, 轮流用 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字之一组成一个六位数的一位, 数字可重复。如果这个六位数能被 N 整除, 就算乙胜; 如果这个六位数不能被 N 整除, 就算甲胜。设 N 小于 15, 那么当 N 取哪几个数时, 乙才能取胜?

思路剖析

我们先列出乙不能获胜的 N 的取值情况。 N 取偶数, 甲可以在最右边方格里填一个奇数(六位数的个位), 就能使六位数不能被 N 整除, 乙不能获胜。 $N=5$, 甲可以在六位数的个位填一个不是 0 或 5 的数, 甲就获胜。

解答

如果 $N=1$, 很明显乙必获胜。如果 $N=3$ 或 9, 那么乙在填最后一个数时, 总是能把六个数字之和凑成 3 的整数倍或 9 的整数倍。因此乙必获胜。

当 $N=7, 11, 13$ 时是本题最困难的情况。

注意到 $1001 = 7 \times 11 \times 13$, 乙就有一种必胜的办法。我们左右数这个六位数, 把第一位与第四位, 第二位与第五位, 第三位与第六位配对,

