21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书

6

线性代数
习题与解析

湛少锋 编著

Exercise & Analysis

清华大学出版社

▶21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书

线性代数习题与解析

湛少锋　编著

清　华　大　学　出　版　社

北　京

内容简介

线性代数是研究有限空间中线性关系的理论和方法的一门基础数学课程，通过对本书的学习，能够帮助读者加深对线性代数基本内容的理解，进而掌握解题的方法和技巧，以达到复习巩固教学内容，培养分析问题和解决问题的能力的目的。全书共分6章，分别介绍了行列式、矩阵及其运算、向量及向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换。每一章按如下部分展开：基本知识点，对每章的知识点进行详细归纳，注重各章节前后的衔接，便于读者对该章节内容的复习与总结；例题分析，列举了相关知识点的大量例题，特别是精选了大量的考研真题作解题分析，对典型例题从不同角度、用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解，对多种类型基础题目的训练和对综合解题能力的培养。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生线性代数课程的辅导教材或复习参考用书，也可作为考研学生的复习参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题与解析/湛少锋编著.—北京：清华大学出版社，2004

（21世纪计算机专业重点课程辅导丛书）

ISBN 7-302-08139-5

Ⅰ.线… Ⅱ.湛… Ⅲ.线性代数—高等学校—解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第012999号

出版者： 清华大学出版社 **地　址：** 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn **邮　编：** 100084
社总机：010-62770175 **客户服务：** 010-62776969

组稿编辑： 夏非彼
文稿编辑： 洪英
封面设计： 付剑飞
版式设计： 佩芸
印 刷 者： 北京市耀华印刷有限公司
发 行 者： 新华书店总店北京发行所
开　本： 787×1092 1/16 **印张：** 20.375 **字数：** 496千字
版　次： 2004年3月第1版 2004年3月第1次印刷
书　号： ISBN 7-302-08139-5/TP・5883
印　数： 1~6000
定　价： 27.00元

丛　书　序

“计算机专业教学辅导丛书——习题与解析系列”自 1999 年推出以来，一直被许多院校采用并受到普遍好评，广大师生也给我们反馈了不少中肯的改进建议。这些都是我们修订、扩充该丛书的动力之源。同时，计算机科学与技术的持续发展和不断演化，使得传统的计算机专业教学模式也随之扩充与革新。随着计算机教学教材改革不断深化，如何促进学生将理论用于实践，提高分析与动手能力，以及通过实践加深对理论的理解程度，都是我们 21 世纪计算机教学亟待解决的问题。正是基于这样的需求，经过对原有丛书的使用情况的深入调研，并组织专家和一线教师对自身教学经验进行认真总结提炼之后，我们重新修订了这套“21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书”。本丛书根据计算机专业普遍采用的课程体系，在原有丛书的基础上新增了“高等数学”、“线性代数”、“概率统计”、“计算机系统结构”等专项分册，同时，依据各门课程的最新教学大纲，对原有图书内容进行了全面的修订和扩充，使其更加完备、充实。修订之后的新版丛书几乎囊括了计算机专业的各个科目，与现行计算机专业课程体系更加吻合。

“21 世纪计算机专业重点课程辅导丛书”包括：

- 《高等数学习题与解析》
- 《线性代数习题与解析》
- 《概率统计习题与解析》
- 《离散数学习题与解析》（第 2 版）
- 《C 语言习题与解析》（第 2 版）
- 《C++语言习题与解析》（第 2 版）
- 《数据结构习题与解析》（第 2 版）
- 《数据库原理习题与解析》（第 2 版）
- 《操作系统习题与解析》（第 2 版）
- 《编译原理习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机网络习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机组成原理习题与解析》（第 2 版）
- 《计算机系统结构习题与解析》
- 《汇编语言习题与解析》
- 《软件工程习题与解析》

本套丛书除保留原有丛书的体例风格外，还强化了如下特点：

☑ **以典型题目分析带动能力培养**

本丛书注重以典型题目的分析为突破口，点拨解题思路，强化各知识点的灵活运用，启发解题灵感。所有例题不仅给出了参考答案，还给出了详细透彻的分析过程，便于读者在解题过程中举一反三，触类旁通，从而提高分析问题和解决问题的能力。

☑ **全面复习，形成知识体系**

本丛书以权威教材为依托，对各知识点进行了全面、深入的剖析和提炼，构成了一个完备的知识体系。往往在各类考试中，一个微小的知识漏洞，就可能造成无法弥补的损失，因此复习必须全面扎实。

☑ **把握知识间的内在联系，拓展创新思维**

把握知识点之间的关系，这样，掌握的知识就能变“活”。本丛书通过对知识点的分解，找出贯穿于各知识之间的内在联系，并配上相关的例题，阐明如何利用这些内在联系解决问题，从而做到不仅授人以“鱼”，更注重授人以“渔”。

本套丛书由长期坚持在教学第一线的教授和副教授编写，他（她）们结合自己的教学经验和见解，把多年的教学实践成果无私奉献给读者，希望能够提高学生素质、培养学生的综合分析能力。

如果说科学技术的飞速发展是 21 世纪的一个重要特征的话，那么，教学改革将是 21 世纪教育工作不变的主题，也是需要我们不断探索的课题。要紧跟教学改革，不断更新，真正满足新形势下的教学需求，还需要我们不断地努力实践和完善。本套教材虽然经过细致的编写与校订，仍然难免有疏漏和不足之处，需要不断地补充、修订和完善。我们热情欢迎使用本套丛书的教师、学生和读者朋友提出宝贵意见和建议，使之更臻成熟。

本丛书作者的电子邮件：licb@public.wh.hb.cn
本丛书出版者的电子邮件：info@khp.com.cn

2004 年元月

前　　言

线性代数是高等学校工科各专业的最重要的基础理论课之一，学生对该课程知识掌握的好坏，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对今后的工作会产生重要的影响。通过本课程的教学，应使学生理解线性代数的基本概念，掌握基本理论和方法，提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合运用等方面的能力。

本书是根据课程的基本要求，面对广大学生编写的一本辅导教材，与教材同步，力求能让学生将这门课程学懂、学透、学精。希望本书能帮助读者加深对线性代数基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以达到复习巩固教学内容，培养分析问题和解决问题的能力的目的。

全书共分 6 章，分别介绍了行列式、矩阵及其运算、向量及向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换。每一章按如下部分展开：基本知识点，对每章的知识点进行详细的归纳总结，注重各章节前后的衔接，便于读者对该章节内容的复习与归纳；例题分析，列举了相关知识点的大量例题，以基本概念、基本理论、基本方法为重点，难度由浅入深，有较简单的基本知识点，也有较难的考研模拟题，特别是精选了大量的考研真题作解题分析，对典型例题从不同角度、用多种解法进行讲解，注重对基本概念的理解、多种类型基础题目的训练和综合解题能力的培养。

本书可作为高等学校工科、理科各专业本科生线性代数课程的辅导教材或复习参考用书，也可供考研者阅读研习。

本书是根据编者的教学实践与经验编写的。本书初稿曾多次在工科专业的学生中结合教学使用，深受学生的欢迎，对提高教学质量、培养学生能力起到了积极的作用。

作者在编写本书时参考了众多的教材、教学参考资料和考研辅导书，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在这里谨向有关的作者表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不足之处，敬请读者与同仁不吝指教。

目　　录

第1章　行　列　式

本章学习要点

- 掌握 n 阶行列式的定义，熟悉行列式的性质并能熟练地应用。
- 理解行列式按行（列）展开定理，了解余子式、代数余子式的概念，熟练掌握按某一行（列）展开行列式。
- 了解计算 n 阶行列式的一般方法，会计算一些简单的 n 阶行列式。
- 了解范德蒙行列式，并能正确应用其结果。
- 理解克莱姆法则，并能熟练地应用其求解线性方程组。

1.1　基本知识点

行列式是一个重要的数学工具，是线性代数的最基本内容之一。在讨论线性方程组的解、矩阵的秩、向量组的线性相关性、方阵的特征值和特征向量等问题时行列式起着至关重要的作用。

本章重点　n 阶行列式的定义及其计算。

本章难点　n 阶行列式的定义及其计算。

1.1.1　排列及其主要结论

1．排列

（1）**n 阶排列**　由 n 个不同的元素 $1, 2,\cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列，记作 $p_1p_2\cdots p_n$。n 阶排列共有 $n!$ 种不同的排法。称 $12\cdots n$ 为标准排列。

（2）**逆序（顺序）**　在一个排列中，如果大数排在小数之前，则称这两个数构成一逆序（在一个排列中，如果小数排在大数之前，则称这两个数构成一个顺序）。

（3）**逆序数**　一个排列中逆序的总个数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

（4）**对换**　在一个排列中交换两个元素的位置，称为对换。

（5）**奇、偶排列**　逆序数为奇数的排列称为奇排列，而逆序数为偶数的排列称为偶排列（奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数）。

2．主要结论

（1）对换改变排列的奇偶性。

（2）n 个自然数 $1, 2,\cdots, n$ 组成的 $n!$ 个排列中，奇偶排列个数相等，各占一半。

（3）任一个 n 阶排列都可经过一些对换变成标准排列，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。

1.1.2 n 阶行列式的定义及其性质

1. n 阶行列式的定义

定义 1 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$

定义 2 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$

定义 3 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{p_1j_1}a_{p_2j_2}\cdots a_{p_nj_n}$

2. n 阶行列式的性质

（1）行列式的行与列互换，其值不变。即 $D^{\mathrm{T}}=D$。

（2）行列式的任意两行（列）互换，行列式反号。

（3）行列式中某一行（列）的所有元素都乘以数 k，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

（4）如果行列式中有两行（列）元素相同（对应成比例），则行列式为零。

（5）如果行列式中某一行（列）的所有元素都等于零，则行列式为零。

（6）如果行列式的某一行（列）元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{vmatrix}$$

（7）将行列式的某一行（列）的各元素乘以同一常数 k 后加到另一行（列）对应的元素上，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{j,n-1} & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1}+ka_{i1} & b_{j2}+ka_{i2} & \cdots & b_{j,n-1}+ka_{i,n-1} & b_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

1.1.3 行列式按行（列）展开及其主要结论

1. 代数余子式定义

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

设 N 是 D 的某个 k 阶子式，把 N 所在的行和列都划去，则剩余的 $n-k$ 阶子式 M 称为 N 的余子式，又设 N 所在的行序数是 $i_1, i_2,\cdots, i_k$，所在的列序数是 $j_1, j_2,\cdots, j_k$，则 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$ 称为 N 的代数余子式。

2. 行列式按行（列）展开主要结论

（1）按行（列）展开定理

n 阶行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。n 阶行列式中任意一行（列）的各个元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

按行展开公式 $\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}D & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$

按列展开公式 $\displaystyle\sum_{s=1}^{n}a_{si}A_{sj}=\begin{cases}D & l=j\\ 0 & l\neq j\end{cases}$

（2）拉普拉斯（Laplace）定理

设 D 是一个 n 阶行列式，在 D 中取定某 k（$1\leq k\leq n$）行，则这 k 行中所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和等于 D。

1.1.4 克莱姆（Cramer）法则

含有 n 个未知量 n 个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad ①$$

（1）方程组①有惟一解的充要条件是其系数行列式不等于零，即

$$D=|a_{ij}|\neq 0\ \ (i,j=1,2,\cdots,n)$$

且惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_i 是把系数行列式 D 中第 i（$i=1,2,\cdots,n$）列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的 n 阶行列式。

（2）如果方程组①无解或有多个不同解，则它的系数行列式 $D=0$。

（3）当方程组①的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都等于零时，方程组①称为齐次线性方程组；当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，方程组①称为非齐次线性方程组。如果系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组没有非零解；而齐次线性方程组有非零解的充要条件是其系数行列式 $D=0$。

1.1.5 特殊行列式

（1）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

（2）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

（3）
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

（4）
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & c_{k1} & \cdots & c_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

（5）$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1k} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kk} & a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{nk} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{vmatrix}$$

1.2 例题分析

1.2.1 选择题

题型一：行列式部分项符号的确定

【例 1.1】 下列各选项中，为五阶行列式带正号的项是______。

A. $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$　　B. $a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$

C. $a_{23}a_{31}a_{12}a_{45}a_{54}$　　D. $a_{31}a_{15}a_{44}a_{22}a_{53}$

[提示与分析] 确定行列式某项的符号就是判断此项行、列标排列逆序数之和的奇偶性。所以这类题一般只须计算行、列标排列逆序数之和即可获得答案。

解 D。分别计算各项行、列标的逆序数之和。选项 A 之行标排列逆序数为：$0+1+0+3+0=4$，之列标排列逆序数为：$0+0+1+1+3=5$；选项 B 之行标排列逆序数为：$0+0+0+0+0=0$，之列标排列逆序数为：$0+0+2+2+1=5$；选项 C 之行标排列逆序数为：$0+0+2+0+0=2$，之列标排列逆序数为：$0+1+1+0+1=3$；选项 D 之行标排列逆序数为：$0+1+0+2+0=3$，之列标排列逆序数为：$0+0+1+2+2=5$，只有选项 D 的行、列标排列逆序数之和为偶数，故该项带正号。

题型二：行列式的性质与计算

【例 1.2】 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$，则 $M=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{21}-a_{31} & -a_{31} \\ 3a_{12} & 4a_{22}-a_{32} & -a_{32} \\ 3a_{13} & 4a_{23}-a_{33} & -a_{33} \end{vmatrix}=$______。

A. $-3D$　　B. $-4D$

C. $-12D$　　D. $-4D^{\mathrm{T}}$

[提示与分析] 在已知某行列式之值，要求解另一行列式之值时，往往是根据所求行列式，利用行列式的性质将其转化为与已知行列式相关的形式，从而获得答案。

解 C。利用行列式的性质计算。

$$M=\begin{vmatrix}3a_{11} & 4a_{21} & -a_{31}\\ 3a_{12} & 4a_{22} & -a_{32}\\ 3a_{13} & 4a_{23} & -a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a_{11} & -a_{31} & -a_{31}\\ 3a_{12} & -a_{32} & -a_{32}\\ 3a_{13} & -a_{33} & -a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=-(3\times4)\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+3(-1)^2\begin{vmatrix}a_{11} & a_{31} & a_{31}\\ a_{12} & a_{32} & a_{32}\\ a_{13} & a_{33} & a_{33}\end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+0=-12D$$

【例 1.3】 行列式 $\begin{vmatrix}a & b & a+b\\ b & a+b & a\\ a+b & a & b\end{vmatrix}=$______。

A. $(a+b)^3-3a^2b$　　　　B. $2(a^3+b^3)$

C. $-2(a^3+b^3)$　　　　D. $3a^2b-(a+b)^3$

[提示与分析] 对于每一行（列）元素之和都相等的行列式，通常采用的方法是，将所有行（列）同时加到第 1 行（列）上去，然后提取公因子，并利用行列式的性质将第 1 行（列）除第 1 个元素外的其余元素化为零，再利用行列式展开定理计算获得答案。

解 C。

$$\begin{vmatrix}a & b & a+b\\ b & a+b & a\\ a+b & a & b\end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & a+b & a\\ a+b & a & b\end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & a & a-b\\ a+b & -b & -a\end{vmatrix}$$

$$=2(a+b)(-a^2+ab-b^2)=-2(a^3+b^3)$$

【例 1.4】 行列式 D 非零的充分条件是______。

A. D 所有元素都不为零

B. D 至少有 n^2-n 个元素不为零

C. D 的任意两列元素之间不成比例

D. 以 D 为系数行列式的线性方程组有惟一解

[提示与分析] 直接利用行列式的定义、性质和克莱姆法则即可获得答案。

解 D。由行列式的定义、性质和克莱姆法则知，本题的正确答案为 D。

【例 1.5】 四阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=$______。

A. $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　B. $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　D. $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

[提示与分析] 由于第 1、第 4 行和第 1、第 4 列只有两个非零元素，其余元素为零，由行列式展开定理即可获得答案。

解 D。

方法 1 由行列式按行（列）展开定理，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$$

方法 2 由拉普拉斯定理，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$$

题型三：行列式方程的根的判定

【例 1.6】 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & c & d-x \\ a & b & c-x & d \\ a & b-x & c & d \\ a-x & b & c & d \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 的根为_____。

A. a, b, c, d

B. $a+b, c+d, a+d, b+c$

C. $0, a+b+c+d$（其中 0 为三重根）

D. $0, -a-b-c-d$（其中 0 为三重根）

[提示与分析] 这类题可以从两个角度来考虑：

（1）直接从行列式的定义和性质出发获得答案。

（2）利用行列式的性质将 $f(x)$ 的行列式形式转化成 x 的多项式，然后解代数方程获得答案。

解 C。

方法 1　由行列式的定义知，$f(x)$含 x 的最高次数的项为 $(-1)^3(d-x)(c-x)(b-x)(a-x)$，其 x 的次数为 4，故 $f(x)=0$ 最多只有 4 个根；又由行列式的性质知

$$f(0)=\begin{vmatrix} a & b & c & d-0 \\ a & b & c-0 & d \\ a & b-0 & c & d \\ a-0 & b & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{vmatrix}=0$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的根，而当 $x\neq 0$ 时，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & c & d-x \\ a & b & c-x & d \\ a & b-x & c & d \\ a-x & b & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c+d-x & b & c & d-x \\ a+b+c+d-x & b & c-x & d \\ a+b+c+d-x & b-x & c & d \\ a+b+c+d-x & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d-x)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d-x \\ 1 & b & c-x & d \\ 1 & b-x & c & d \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix}=(a+b+c+d-x)f_1(x)=0$$

所以 $x=a+b+c+d$ 是 $f(x)=0$ 的根，而

$$f_1(a+b+c+d)=\begin{vmatrix} 1 & b & c & -a-b-c \\ 1 & b & -a-b-d & d \\ 1 & -a-c-d & c & d \\ 1 & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -a-b-c-d & a+b+c+d \\ -a-b-c-d & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 0 & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} -a-b-c-d & a+b+c+d \\ 0 & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c+d)^3\neq 0$$

故 $x=a+b+c+d=0, x=0$ 是 $f(x)=0$ 的根，且 $x=a+b+c+d=0$ 为单根，而 $x=0$ 为三重根。

方法 2　利用行列式性质将 $f(x)$转化为多项式，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} a & b & c & d-x \\ a & b & c-x & d \\ a & b-x & c & d \\ a-x & b & c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b+c+d-x & b & c & d-x \\ a+b+c+d-x & b & c-x & d \\ a+b+c+d-x & b-x & c & d \\ a+b+c+d-x & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d-x)\begin{vmatrix}1 & b & c & d-x\\1 & b & c-x & d\\1 & b-x & c & d\\1 & b & c & d\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d-x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -x\\1 & 0 & -x & 0\\1 & -x & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d-x)(-x)^3$$

由 $f(x)=0$ 知，$x=a+b+c+d=0$、$x=0$ 是 $f(x)=0$ 的根，且 $x=a+b+c+d$ 为单根，而 $x=0$ 为三重根。

【例 1.7】 记行列式

$$\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$$

为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为______。

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

[提示与分析] 由于 $f(x)$ 是以行列式形式给出，故可先利用行列式的性质将 $f(x)$ 的行列式形式转化成 x 的多项式，然后解代数方程获取答案。

解 B。

方法 1

$$f(x)\xlongequal[i=1,2,3]{c_i-c_1}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\2x-2 & 1 & 0 & -1\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_2}\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & 0\\2x-2 & 1 & 0 & 0\\3x-3 & 1 & x-2 & -1\\4x & -3 & x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2 & 1\\2x-2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2 & -1\\x-7 & -6\end{vmatrix}$$

$$=5x(x-1)$$

故 $f(x)=0$ 有两个根。