

click gold medal



初二数学

奥林匹克竞赛

解题方法

主编 周春荔
王中峰

大全



掌握一个解题方法 比做一百道题更重要

山西教育出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

初二数学奥林匹克竞赛解题方法大全/周春荔、王中峰主编. —太原: 山西教育出版社, 2004. 8

(点击金牌)

ISBN 7-5440-2789-9

I. 初… II. ①周…②王… III. 数学课—初中—解题
IV. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 066868 号

山西教育出版社出版发行

(太原市迎泽园小区 2 号楼)

山西新华印业有限公司人民印刷分公司印刷

新华书店经销

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月山西第 1 次印刷

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 8.125

字数: 345 千字 印数: 1—20000 册

定价: 9.00 元

出版宣言

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“竞赛辅导”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，竞赛成绩不理想，这是为什么？



究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好各门功课的根本保证；掌握方法，是攻克奥赛难题的有力武器。只有弄清原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种竞赛，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《点击金牌·中学生奥林匹克竞赛解题方法大全》就是期望为同学们提供最全面、最系

统、最实用、最完备的奥赛解题方法。

——我们以新课标为指导，以“突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能”为宗旨，按照新教材的全部知识点和奥赛的测试范围分类编写。书中既有方法点拨，思维开拓；又有例题分析，针对性的训练。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点评恰到好处。所讲所练虽源于教材，但高于教材，能使你在通向奥赛的道路上取得成功。

——我们时刻关注奥赛前沿动态，收集了大量最新的奥赛信息，为同学们增补了当前最具实战意义的试题；使之成为迄今最为系统、最为实用、最为完整的奥赛解题“教材”。

——我们奉行以学生为本的原则，恳切听取参赛同学的心声，使该书遴选的赛题更具前沿性、针对性和新颖性。

——我们吸收了最新的奥赛教学科研成果，在例题解析中为同学们提供了更多的解题方法，恳望有效激发同学们的创新思维，提高同学们的解题技能。

一分耕耘，一分收获。希望的种子已经播下，让我们共同期待开花结果的时刻吧！

编 者

2004年6月

本书导读



作者主编的《初中数学奥林匹克竞赛解题方法大全》(山西教育出版社 2002 年 7 月版)问世至今印数已达 19 万册。在本书使用过程中,深感“精讲多练”对学好数学的重要性。因此编写了这套《初一(二、三)数学奥林匹克竞赛解题方法大全》。

本套书按初一到初三的知识依次递进的形式分三册编写。课内与课外知识交互穿插。全书与教材基本同步,又是教材的补充。本套书以习题的讲练为重点,是《初中数学奥林匹克竞赛解题方法大全》一书的配套学习读物。

阅读本书的程序是,可根据自己的情况选定一节的内容。先读“知识精要”,掌握其中列举的要点;再看“例题精讲”,通过精选的几道例题,重点反复研读;然后,独立演练“习题精练”的 A、B、C 三组问题,每组 10 题左右,由易到难。对数学只有一般要求的,可做 A 组题;有进一步要求的再加做 B 组题;对数学能力有更高要求的再加做 C 组题。这对初中阶段的数学爱好者一般已经足够。到底自己做的如何?每个单元后面都有题目的详细提示和解答,供研习选用。每册书学完了,可以做第四编的数学科普活动模拟练习题来进行检测,为参加数学竞赛作准备。

众所周知,问题是数学的心脏,要学好数学,除了掌握学习方法外,还有一个重要的途径就是要解题。不但要解一般性的习题,而且要解一些有一定挑战性的、一定背景的习



题。不下水就学不会游泳，不亲自做数学学习题，就体会不到学数学的要领。这就是“通过做数学才能学好数学”的道理。那么，是否见题就做，拼命多做题就一定能学好数学呢？其实不然，凡事都有内在的规律，有个“度”。做一定数量的典型习题，感悟到其中的“理”和“法”，就能够举一反三，触类旁通，你的数学学习就会大有收益，多有长进！因此学习数学，要掌握基本概念、学会基本技能、领悟基本方法。编写本书时，我们本着“少而精”的原则，尽可能引导学生在学好课本基础知识的前提下，开拓数学视野，激发对数学的兴趣，通过知识的学习与习题的演练，领悟数学的思维方法；使大家感到，数学抽象但并不神秘，奥林匹克数学灵活有趣但并非高不可攀，刻苦学习是前提，打好基础是关键。训练与不训练大不一样。本书将给同学们以知识精要、例题精讲、习题精练的学习空间。

本书是对上述设想的一次尝试，也是对编写新的数学习题集的一次探索。虽然作者们多有相当的数学教学实践经验，但选的题目是否得当，编排是否合理，还需要在使用中来检验。特别是因编写和出版的时间仓促，难免他山攻错。愿与读者一道不断共同来修订它、充实它和完善它。

周春荔

2004年5月



目 录

第一编 代数与数论



一、因式分解	1
知识精要	1
例题精讲	1
习题精练	2
二、分式运算	5
知识精要	5
例题精讲	5
习题精练	7
三、根式运算	10
知识精要	10
例题精讲	11
习题精练	12
四、不定方程初步	16
知识精要	16
例题精讲	16
习题精练	17
五、应用问题选谈	20
知识精要	20
例题精讲	20
习题精练	22
第一编习题精练参考解答	26



第二编 几何与图形



一、三角形内角和	50
知识精要	50
例题精讲	50
习题精练	52
二、三角形不等式	55
知识精要	55
例题精讲	56
习题精练	57
三、三角形全等的判定	60
知识精要	60
例题精讲	61
习题精练	62
四、三角形的中位线	66
知识精要	66
例题精讲	67
习题精练	68
五、勾股定理	73
知识精要	73
例题精讲	73
习题精练	75
六、四边形的分类与判定	79
知识精要	79
例题精讲	79
习题精练	80
七、平行四边形的问题	84
知识精要	84
例题精讲	85
习题精练	87



八、梯形的判定与中位线定理	92
知识精要	92
例题精讲	92
习题精练	94
九、正方形的问题	99
知识精要	99
例题精讲	99
习题精练	101
十、相似三角形	106
知识精要	106
例题精讲	107
习题精练	109
十一、角平分线定理	114
知识精要	114
例题精讲	114
习题精练	116
十二、面积证题初步	120
知识精要	120
例题精讲	120
习题精练	122
第二编习题精练参考解答	127

第三编 思路与方法



一、平均数原理	183
知识精要	183
例题精讲	183
习题精练	185
二、余数问题	188
知识精要	188
例题精讲	188
习题精练	189



三、平面图形的几何变换	191
知识精要	191
例题精讲	192
习题精练	194
四、染色问题	197
知识精要	197
例题精讲	198
习题精练	199
第三编习题精练参考解答	203

第四编 模拟练习题



初二年级数学竞赛模拟练习题(第一组)	232
初二年级数学竞赛模拟练习题(第二组)	235
初二年级数学竞赛模拟练习题(第三组)	238
第四编模拟练习题参考解答	241



第一编



代数与数论



一、因式分解

知识精要

把一个多项式化成几个整式积的形式叫做把这个多项式因式分解. 初中教材中介绍了提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法. 除此之外, 还有拆项、添项法, 换元法, 待定系数法等.

因式分解的思路是: (1) 先看多项式的各项有没有公因式, 若有公因式, 则先提取公因式. (2) 若各项没有公因式, 再看能否运用公式法, 对于二次三项式看能否利用十字相乘法. (3) 用分组分解法. (4) 若用以上方法不能分解, 再考虑用拆项、添项法, 换元法, 待定系数法等方法.

例题精讲

例 1 分解因式 $(a-c)^2 - 4(a-b)(b-c)$.

【分析】 若先展开再分解非常麻烦, 观察其特点, 不难发现 $(a-b) + (b-c) = a-c$. 若将 $a-c$ 换成 $(a-b) + (b-c)$ 便容易找到分解的办法.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad & (a-c)^2 - 4(a-b)(b-c) \\ &= [(a-b) + (b-c)]^2 - 4(a-b)(b-c) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + 2(a-b)(b-c) - 4(a-b)(b-c) \\
 &= (a-b)^2 + (b-c)^2 - 2(a-b)(b-c) \\
 &= [(a-b) - (b-c)]^2 \\
 &= (a-2b+c)^2
 \end{aligned}$$

例 2 分解因式 $(x+y-2xy)(x+y-2) + (1-xy)^2$.

【分析】 本题的代数式是由 $x+y, xy$ 表示的代数式, 若将它们用其他字母表示, 可给分解带来方便.

【解】 设 $x+y=a, xy=b$, 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (a-2b)(a-2) + (1-b)^2 \\
 &= a^2 - 2ab - 2a + 4b + 1 - 2b + b^2 \\
 &= (a^2 - 2ab + b^2) - 2(a-b) + 1 \\
 &= (a-b)^2 - 2(a-b) + 1 \\
 &= (a-b-1)^2 \\
 &= (x+y-xy-1)^2 \\
 &= [(x-1) - y(x-1)]^2 \\
 &= (x-1)^2(1-y)^2
 \end{aligned}$$

【说明】 本题用 a, b 表示 $x+y, xy$, 将原式换成关于 a, b 的代数式, 这种换元称为整体换元. 有些题目换元后, 代数式中仍含换元前的字母, 这种换元称之为局部换元. 不论哪种换元, 要将新的代数式分解, 分解后还要注意还原.

例 3 分解因式 $(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^4(1-y)^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 原式} &= (1+y)^2 + 2x^2(1+y)(1-y) + x^4(1-y)^2 - 2x^2(1+y^2) - 2x^2(1-y^2) \\
 &= [(1+y) + x^2(1-y)]^2 - 4x^2 \\
 &= (1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y-2x) \\
 &= [(x+1)^2 - y(x^2-1)][(x-1)^2 - y(x^2-1)] \\
 &= (x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy-y)
 \end{aligned}$$

【说明】 本题是利用添项法分解的. 它是将第一、三项看成两数的平方和, 添上这两项积的 2 倍, 再利用分组分解法进行分解因式.

习题精练

A 组

1. 下列各式从左到右的变形, 是因式分解的是 ()



A. $a^2 - 4 + 3a = (a+2)(a-2) + 3a$

B. $(x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10$

C. $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$

D. $x^2y + xy^2 = x^2y^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

2. 若 $x^2 + 2(m-3)x + 16$ 是完全平方式, 则 m 的值等于 ()

A. -5

B. 3

C. 7

D. 7 或 -1

3. $y - 2x + 1$ 是 $4xy - 4x^2 - y^2 - k$ 的一个因式, 则 k 的值是 ()

A. 0

B. -1

C. 1

D. 4

(“希望杯”邀请赛试题)

4. 用提公因式法分解因式

(1) $-8a^mb^3 + 12a^{m+1}b^2 + 16a^{m+2}b$;

(2) $x^3(x+y-z)(y+z-a) + x^2z(z-x-y) + x^2y(z-x-y)(x-z-a)$.

5. 用公式法分解因式

(1) $(x+y)^2 + 4(x-y)^2 - 4(x^2 - y^2)$;

(2) $4a^4b^4 - (a^4 + b^4)^2$.

6. 用分组分解法分解因式

(1) $x^2 + 4xy - 4 + 4y^2$;

(重庆市数学竞赛题)

(2) $x^4 + x^3 + x^2 + x$.

7. 分解因式: $2x^2 - 7xy + 6y^2 + 2x - y - 12$.

(四川省初中数学竞赛题)

8. 分解因式: $m^3 - 2m^2n + mn^2 - 4m^2 + 4mn + 4m$.

9. 分解因式: $(1-a^2)(1-b^2) - 4ab$.

10. 若 $3x^2 - x - 1 = 0$, 求 $6x^3 + 7x^2 - 5x + 2001$ 的值.

B 组

1. 若 $\triangle ABC$ 三边长是 a, b, c , 且满足 $a^4 = b^4 + c^4 - b^2c^2$, $b^4 = c^4 + a^4 - a^2c^2$, $c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 钝角三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等边三角形

(“希望杯”邀请赛试题)

2. 已知二次多项式 $21x^2 + ax - 10$ 可分解成两个整系数的一次因式的积, 那么 ()

A. a 一定是奇数

B. a 一定是偶数

C. a 可为奇数也可为偶数

D. a 一定是负数

3. 如果 $x^3 + ax^2 + bx + 8$ 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$, 则 $a+b=$ ()

A. 7

B. 8

C. 15

D. 21 (武汉市选拔赛试题)



4. 分解因式: $x^5 + x + 1$.

5. 分解因式: $2x^4 - 15x^3 + 38x^2 - 39x + 14$.

6. 分解因式: $x^3 + (2a+1)x^2 + (a^2+2a-1)x + a^2 - 1$.

7. 分解因式: $(a-b)^4 + (a+b)^4 + (a^2-b^2)^2$.

8. 分解因式: $xy(xy+1) + (xy+3) - 2\left(x+y+\frac{1}{2}\right) - (x+y-1)^2$.

(天津市竞赛题)

9. 分解因式: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$.

10. 已知: a, b, c 为三角形的三边长, 且满足 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$, 试判断三角形的形状.

C 组

1. 设 $y = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 5$, 其中 x 为任意数, 则 y 的取值范围是 ()

A. 一切数

B. 一切正数

C. 一切大于或等于 5 的数

D. 一切大于或等于 2 的数

(第 13 届“希望杯”邀请赛试题)

2. 数 $\underbrace{44\cdots4}_{n\uparrow 4} \underbrace{88\cdots8}_{(n-1)\uparrow 8} 9$ 是下列哪个数的平方 ()

A. $\underbrace{55\cdots57}_{(n-1)\uparrow 5}$

B. $\underbrace{66\cdots67}_{(n-1)\uparrow 6}$

C. $\underbrace{66\cdots67}_{n\uparrow 6}$

D. $\underbrace{55\cdots57}_{n\uparrow 5}$

3. 若 x, y 是整数, 且 $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, 则 $3x^2y^2$ 的值为 ()

A. 218

B. 588

C. 473

D. 643

4. 分解因式: $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$.

5. 分解因式: $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

6. 分解因式: $(ax-by)^3 + (by-cz)^3 - (ax-cz)^3$.

7. 求证: 当 m 为正整数时, $m^4 - 20m^2 + 4$ 是合数.

8. 已知 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 的系数均为整数, 且 $bd + cd$ 为奇数, 求证: 此多项式不能分解成两个系数均为整数的因式.

9. 已知 $a + b + c = abc$.

求证: $a(1-b^2)(1-c^2) + b(1-c^2)(1-a^2) + c(1-a^2)(1-b^2) = 4abc$.

10. 已知 x 和 y 都是正整数, 并且满足条件 $xy + x + y = 71$, $x^2y + xy^2 = 880$, 求 $x^2 + y^2$ 的值.





二、分式运算

知识精要

1. 分式的概念与性质

定义 若用 A, B 表示两个整式, $A \div B$ 可以写成 $\frac{A}{B}$ 的形式, 如果 B 中含有字母, 式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式.

性质 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m} \quad (m \neq 0)$

2. 分式的运算

(1) 加减法: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

(2) 乘法: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(3) 除法: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

(4) 乘方: $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

3. 常用的技巧

对于分式的加、减法常采用如下技巧: (1) 先约分再通分; (2) 逐项通分; (3) 分组通分; (4) 将一个分式拆成两个分式差的形式.

对于给定条件求分式的值, 常采用如下技巧: (1) 换元; (2) 恰当引入参数; (3) 利用倒数关系; (4) 整体代入.

例题精讲

例 1 要使分式 $\frac{1}{1-|x|}$ 有意义, 求 x 的取值范围.

(“希望杯”邀请赛试题)



【分析】 本题分式中有两个分母,一个为 $|x|$,另一个为 $\frac{1-|x|}{|x|}$,要使分式有意义,这两个分母都不等于零.

【解】 要使分式有意义,必须

$$\begin{cases} |x| \neq 0, \\ \frac{1-|x|}{|x|} \neq 0. \end{cases}$$

解得 $x \neq 0, x \neq \pm 1$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$.

【说明】 要使分式有意义,求字母取值范围,即求使分母不为零时字母的值,当分式中有多分母时,一定要全面考虑,本题容易漏掉 $x \neq \pm 1$.

另外,当分子、分母可分解因式并且有相同因式时,不能先约分,再求取值范围,这样扩大了字母的取值范围.

已知 $xyz = 1, x + y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 16$, 求 $\frac{1}{xy+2z} + \frac{1}{yz+2x} + \frac{1}{zx+2y}$ 的值.

(北京市初中数学竞赛题)

【分析】 若直接通分,计算复杂,故考虑将 $x + y + z = 2$ 代入分母中,再分解,通分计算.

【解】 $\because x + y + z = 2$

$$\therefore xy + 2z = xy + 2(2 - x - y) = (x - 2)(y - 2)$$

同理可得

$$yz + 2x = (y - 2)(z - 2)$$

$$zx + 2y = (z - 2)(x - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } xy + yz + zx &= \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 16 = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{(x-2)(y-2)} + \frac{1}{(y-2)(z-2)} + \frac{1}{(z-2)(x-2)} \\ &= \frac{z-2+x-2+y-2}{(x-2)(y-2)(z-2)} \\ &= \frac{x+y+z-8}{xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8} \\ &= \frac{2-8}{1-2 \times (-6)+4 \times 2-8} \\ &= -\frac{6}{13} \end{aligned}$$

【说明】 对于给定条件的求值问题,常将所求式进行适当变形,然后将已知条件代入求值或将已知条件进行适当变形,再代入求值.



例 3 已知实数 a, b, c, d 互不相等, 且 $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = d + \frac{1}{a} = x$, 试求 x 的值.

(全国初中数学联合竞赛题)

【解】 由已知有 $a + \frac{1}{b} = x$ ①

$b + \frac{1}{c} = x$ ②

$c + \frac{1}{d} = x$ ③

$d + \frac{1}{a} = x$ ④

由①解出 $b = \frac{1}{x-a}$ ⑤

代入②得 $c = \frac{x-a}{x^2-ax-1}$ ⑥

将⑥代入③得 $\frac{x-a}{x^2-ax-1} + \frac{1}{d} = x$

即 $dx^3 - (ad+1)x^2 - (2d-a)x + ad+1 = 0$ ⑦

由④得 $ad+1 = ax$, 代入⑦得

$(d-a)(x^3-2x) = 0$

由已知 $d-a \neq 0$, $\therefore x^3-2x=0$

若 $x=0$, 则由⑥可得 $a=c$, 矛盾, 故 $x^2=2, x=\pm\sqrt{2}$.

习题精练

A 组

1. 已知式 $\frac{(x-8)(x+1)}{|x|-1}$ 的值为零, 则 x 的值为 ()

A. ± 1

B. -1

C. 8

D. -1 或 8

(第十五届江苏省竞赛题)

2. 分式 $\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ 有意义, x 的取值范围是 ()

A. $x \neq 3$

B. $x \neq \pm 1$

C. $x \neq 3$ 或 $x = -1$

D. $x \neq 3$ 且 $x \neq -1$

3. 如果分式 $\frac{2ab}{a+b}$ 中的 a 和 b 都扩大 10 倍, 那么分式的值 ()

A. 扩大 10 倍

B. 缩小 10 倍

