高中数学巧妙解法400例

贾士代　翟连林　主编

北京教育出版社

高中数学巧妙解法400例

贾士代　翟连林　主编

北京教育出版社

(京)新登字 202 号

高中数学巧妙解法 400 例

gaozhong shuxue qiaomiao jiefa sibaili

贾士代　翟连林　主编

*

北京教育出版社出版
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码：100011
北京出版社总发行
新华书店北京发行所经销
中国青年出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　17.25印张　385000字
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
印数 1—29000
ISBN 7-5303-0284-1/G·261
定　价：5.90元

前　言

从多年的教育实践证明，对学生进行有关数学巧妙解法的教育，有利于激发他们的学习兴趣，增进求知的欲望，有利于沟通不同知识之间的内在联系，培养其思维的发散性、敏捷性和创造性。为此，我们编写了《高中数学巧妙解法400例》一书，奉献于社会，以飨广大读者。

本书是按照高中现行数学课本知识结构顺序编写的，每章中都有典型例题，各个例题由一般解法为始，然后给出巧妙解法。知识覆盖面广，题型新颖，方法齐全，几乎涉及到高中数学的全部巧妙解法，是该书的主要特点。

在解题的同时，我们注意到向学生进行数学方法的教育。书中贯穿了分析法、综合法、归纳法、类比法、概念思维法、逆向思维法、发散思维法、坐标法、三角法、复数法、数形结合法、构造法、参数法、换元法、化归法等思维方法与解题技巧，不仅有益于提高学生灵活运用知识和解题技巧的能力，而且会给他们带来无穷的乐趣和美的享受。

在编写过程中，我们参考了全国各中等数学杂志的大量文章内容，在此对这些文章的作者一并表示感谢。

参加本书编写工作的还有马十成、李济克、刘会荣、周玉合、贾玲娟、施英杰、刘尚宽、刘世红。

由于我们水平有限，加之时间仓促，书中错误难免，恳切希望广大师生批评指正，使之日臻完善。

编　者

1991年1月

目　录

第一章　集合与函数

一、集　合

例1　(选择题)*若集合$P=\{x|x=3m+1, m\in N\}$，$Q=\{y|y=5n+2, n\in N\}$，则　$P\cap Q=($　　$)$。

(A) $\{z|z=15k-7, k\in N\}$；

(B) $\{z|z=15k-8, k\in N\}$；

(C) $\{z|z=15k+8, k\in N\}$；

(D) $\{z|z=15k+7, k\in N\}$。

【一般解法】

依题意，要使$3m+1=5n+2$，即$3m=5n+1$，必须且只须$5n+1$是3的倍数。因n是正整数，故可表示为$3k-2, 3k-1, 3k(k\in N)$，代入$5n+1$中，验算知，只有$n=3k-2$时，$5n+1$是3的倍数。因此，$z=5(3k-2)+2=15k-8$。

于是，应选（B）。

【巧妙解法】

当$m=2$，$n=1$时，得$7\in P\cap Q$。而7不是（A）、（C）、（D）中的元素，只是（B）中的元素，故(A)、（C）、（D）都不对，应选（B）。

例2　已知全集$I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合$P=\{(x,y)\left|\frac{y+5}{x+3}=1, x,y\in R\right.\}$，$Q=\{(x,y)|y=x-2, x,y\in R\}$，

---

*　本书的选择题都是单项选择题，即给出代号为A、B、C、D的四个备选答案中，有且只有一个是正确的。

求集合$\overline{P}\cap Q$。

【一般解法】

显然，方程$\dfrac{y+5}{x+3}=1$与方程$y+5=x+3(x\neq-3,\ y\neq-5)$同解，即与方程$y=x-2(x\neq-3,\ y\neq-5)$同解。

因此，$\overline{P}=\overline{Q}\cup\{(-3,-5)\}$。

于是，$\overline{P}\cap Q=(\overline{Q}\cup\{(-3,-5)\})\cap Q$

$$=\{(-5,\ -3)\}.$$

【巧妙解法】

在直角坐标系xOy中，点集P表示直线$y+5=x+3$，即$y=x-2$去掉点$(-3,-5)$，而点集Q表示直线$y=x-2$，因此，点集$\overline{P}\cap Q$表示点$(-3,-5)$。故$\overline{P}\cap Q=\{(-3,-5)\}$。

例3 已知集合$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=m+1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|(m^2-1)x+(m-1)y=15\}$，当实数$m$为何值时，$A\cap B=\varnothing$（$\varnothing$表示空集）。

【一般解法】

依题意，$A\cap B=\varnothing$等价于

$$\text{方程组}\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=m+1, & ①\\ (m^2-1)x+(m-1)y=15 & ②\end{cases}$$

无解。

由①，得 $y=(m+1)(x-2)+3(x\neq2)$，代入②中，得$(m^2-1)x+(m^2-1)(x-2)+3(m-1)=15$，

即 $2(m^2-1)x=2m^2-3m+16\ (x\neq2)$。

由此可得：

（1）当$x=2$时，

$2(m^2-1)\times 2=2m^2-3m+16$，

解之，得　$m=-4$，或　$m=\frac{5}{2}$。

这时，方程组无解。

（2）当$\begin{cases}2(m^2-1)=0,\\ 2m^2-3m+16\neq 0,\end{cases}$

即　$m=1$，或-1时，方程组无解。

于是，由（1）、（2）知

当$m\in\left\{-4,\frac{5}{2},\ 1,\ -1\right\}$时，$A\cap B=\varnothing$。

【巧妙解法】

在直角坐标系xOy中，集合A表示直线l_1：$(m+1)x-y+1-2m=0$（除去点$P(2,3)$），集合B表示直线l_2：$(m^2-1)x+(m-1)y=15(m\neq 1)$和空集$\varnothing(m=1)$。

显见，当$m=1$时，$A\cap B=\varnothing$；

当l_2过点$P(2,3)$，也就是$2(m^2-1)+3(m-1)-15=0$，

即　$m=-4$，或　$m=\frac{5}{2}$时，$A\cap B=\varnothing$；

当$l_1\parallel l_2$，也就是$m+1=0$，即$m=-1$时，$A\cap B=\varnothing$。

故　当$m\in\left\{-4,\frac{5}{2},\ 1,\ -1\right\}$时，$A\cap B=\varnothing$。

例4　已知集合$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6x-4=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2+6y-28=0\}$，$C=\{(x,y)\mid ax+by+c=0,\ abc\neq 0\}$，且　$A\cap B\subset C$，求　$a:b:c$。

【一般解法】

由已知，易得

方程组$\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0,\\x^2+y^2+6y-28=0\end{cases}$的解适合方程$ax+by+c=0$，从而解这个方程组，把其解分别代入$ax+by+c=0$中，可求出 $a:b:c$。（略）

【巧妙解法】

集合A的图形是圆$x^2+y^2+6x-4=0$，

即 $(x+3)^2+y^2=(\sqrt{13})^2$。

集合B的图形是圆 $x^2+y^2+6y-28=0$，

即 $x^2+(y+3)^2=(\sqrt{37})^2$。

∵ $\sqrt{(-3-0)^2+[0-(-3)]^2}<\sqrt{13}+\sqrt{37}$，

∴ 这两个圆相交。

∵ 它们的公共弦所在的直线方程为

$6(x-y)+24=0$，

即 $x-y+4=0$。

又 $A\cap B\subset C$，

∴ 直线$x-y+4=0$与直线$ax+by+c=0$重合。

于是，$a:b:c=1:(-1):4$。

例5 设$m\in R$，$A=\{(x,y)\,|\,y=-\sqrt{3}x+m\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ 0<\theta<2\pi\}$，且 $A\cap B=\{(\cos\theta_1,\sin\theta_1),(\cos\theta_2,\sin\theta_2)\}$，求：（1）$m$的取值范围；（2）$\theta_1+\theta_2$的值。

【一般解法】

∵ $A=\{(x,y)\,|\,y=-\sqrt{3}x+m\}$，

$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1$，且$x\neq1\}$，

且 $A\cap B$中有两组不同的元素，

$$\therefore \quad \text{方程组}\begin{cases} y=-\sqrt{3}x+m, & ① \\ x^2+y^2=1, & ② \\ x\neq 1 & ③ \end{cases}$$

有两组不同的解。

把①代入②中，得

$$x^2+(-\sqrt{3}x+m)^2=1,$$

即 $4x^2-2\sqrt{3}mx+m^2-1=0$。 ④

$\because$ $(-2\sqrt{3}m)^2-16(m^2-1)>0$,

$\therefore$ $m^2<4$，即 $-2<m<2$。

由①、③，得 $m-\sqrt{3}\neq 0$，$\therefore$ $m\neq\sqrt{3}$。

故 m 的取值范围是

$$-2<m<\sqrt{3} \text{ 或 } \sqrt{3}<m<2。$$

（2）对方程④，由韦达定理，得

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}m,$$

又 $\sin\theta_1+\sin\theta_2=-\sqrt{3}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)+m$

$$=-\frac{3}{2}m+2m=\frac{m}{2},$$

且 $m\neq 0$,

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{\cos\theta_1+\cos\theta_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\because \quad 0<\frac{\theta_1+\theta_2}{2}<2\pi,$$

$$\therefore \quad \frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{\pi}{6} \quad 或 \quad \frac{7\pi}{6}.$$

于是 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{7\pi}{3}$.

【巧妙解法】

如图1-1，集合A、B分别表示直线 $y=-\sqrt{3}x+m$和圆$x^2+y^2=1$(除去点(1,0)).

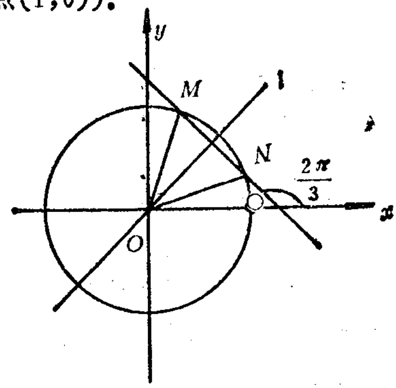

图 1-1

$\because \quad A\cap B=\{(\cos\theta_1, \sin\theta_1), (\cos\theta_2, \sin\theta_2)\}$,

$\therefore$ 直线$y=-\sqrt{3}x+m$与圆$x^2+y^2=1$(除去点(1,0))的两个交点M、N所对应的角$\angle XOM=\theta_1$，$\angle XON=\theta_2$(不妨设$\theta_1>\theta_2$)．

（1）$\because$ 直线$y=-\sqrt{3}x+m$与圆$x^2+y^2=1$（除去点(1，0)）有两个交点的充要条件为

$$\frac{|\sqrt{3}\times 0+0-m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}<1,$$

即　$|m|<2$,

且　$-\sqrt{3}+m\neq 0$,

即　$m\neq\sqrt{3}$,

∴　m 的取值范围为

$-2<m<\sqrt{3}$　或　$\sqrt{3}<m<2$。

（2）过原点O作MN的垂线，则

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{2\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2},$$

即　$\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}=\dfrac{\pi}{6}$　或　$\dfrac{7\pi}{6}$,

于是　$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$　或　$\dfrac{7\pi}{3}$。

例6　设　a、$b\in R$,

$A=\{(x,y)|x=n,\ y=na+b,\ n\in Z\}$,

$B=\{(x,y)|x=m,\ y=3(m^2+5),\ m\in Z\}$,

$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点集．问：是否存在a和b使得（1）　$A\cap B\neq\varnothing$，（2）　$(a,b)\in C$ 同时成立。（1985年全国高考题）

【一般解法】

假设满足题中两个条件的a、b存在，

则　$A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$成立。

从而可得　$na+b=3n^2+15$。　①

$(a,b)\in C\Rightarrow a^2+b^2\leqslant 144$。　②

由①，得　$b=3n^2-an+15$。

把它代入②中，整理得

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0. \qquad ③$$

它的判别式

$$\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$$
$$=-33(n^2-3)^2.$$

$\because\ n\in Z$，$\therefore\ n^2-3\neq 0$。从而 $\Delta<0$。

又$\because\ 1+n^2>0$，

$\therefore$ 不等式③不可能有实数解a。

这表明不存在a、b使得(1)、(2)同时成立。

【巧妙解法一】

假设满足(1)、(2)两个条件的a、b存在，则易得

关于a、b的混合组$\begin{cases}na+b=3(n^2+5),\\ a^2+b^2\leqslant 144\end{cases}$有解。

从而在平面直角坐标系$aO'b$中，直线l：$na+b-3(n^2+5)=0$与圆$a^2+b^2=144$应有公共点。

于是 圆心$O'(0,0)$到直线l的距离不大于半径12，

即 $\dfrac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12$

$\Rightarrow\ (n^2+5)^2\leqslant 16(n^2+1)$

$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix}(n^2-3)^2\leqslant 0\\(n^2-3)^2\geqslant 0\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix}n^2=3\\n\in Z\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$ 矛盾。

故 同时满足(1)、(2)的a、b不存在。

【巧妙解法二】

假设存在实数a、b使得(1)、(2)同时成立，则

$$\begin{cases}3n^2+15=na+b,\\ a^2+b^2\leqslant 144\end{cases}$$ 有解。

∵ $(3n^2+15)^2=(na+b)^2$

$\leqslant(n^2+1)(a^2+b^2)\leqslant 144(n^2+1)$,

∴ $9(n^4+10n^2+25)-144(n^2+1)\leqslant 0$,

即 $9(n^2-3)^2\leqslant 0$.

从而 $n^2=3$.

这与$n\in Z$矛盾.

故 不存在实数a、b使(1)、(2)同时成立。

【巧妙解法三】

依题意，a、b是否存在取决于混合组

$$\begin{cases}3n^2+15=an+b, & ①\\ a^2+b^2\leqslant 144 & ②\end{cases}$$

是否有实数解。

由②，可设 $a=12r\cos\theta,b=12r\sin\theta(|r|\leqslant 1)$，把它们代入①中，得

$$3n^2+15=12r(n\cos\theta+\sin\theta)$$
$$=12r\sqrt{n^2+1}\sin(\theta+\varphi),$$

即 $n^2+5=4r\sqrt{n^2+1}\sin(\theta+\varphi)$

$\Rightarrow$ $(n^2+5)^2=16r^2(n^2+1)\sin^2(\theta+\varphi)$

$\leqslant 16(n^2+1)$

$\Rightarrow$ $n^4+10n^2+25\leqslant 16n^2+16$

$\Rightarrow$ $(n^2-3)^2\leqslant 0$

$\Rightarrow$ $n^2=3$.

(以下略)

二、函　数

例7　已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的表达式.

【一般解法】

令 $\frac{x+1}{x}=y$，则 $x=\frac{1}{y-1}$.

把它代入原式中，得

$$f(y)=\frac{\frac{1}{(y-1)^2}+\frac{1}{y-1}+1}{\frac{1}{(y-1)^2}}$$

$$=(y-1)^2+(y-1)+1$$

$$=y^2-y+1.$$

于是，$f(x)=x^2-x+1$.

【巧妙解法】

$\because$ $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+x+1}{x^2}$

$$=1+\frac{x+1}{x^2}$$

$$=1+\frac{(x+1)^2-x(x+1)}{x^2}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{x+1}{x}+1,$$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$.

例8 求函数 $y=\dfrac{2x^2+4x+10}{x^2+2x+4}$ 的值域。

【一般解法】

原式可化为

$$(x^2+2x+4)y=2x^2+4x+10,$$

即 $(y-2)x^2+2(y-2)x+2(2y-5)=0$。

由这个式子，可得 $y\neq 2$。

$\because$ $x\in R$,

$\therefore$ $\Delta=[2(y-2)]^2-8(y-2)(2y-5)\geqslant 0$,

即 $(y-2)(3y-8)\leqslant 0$。

$\because$ $y\neq 2$,

$\therefore$ $2<y\leqslant\dfrac{8}{3}$。

故函数 y 的值域为 $\left\{y\,\middle|\,0<y\leqslant\dfrac{8}{3}\right\}$。

【巧妙解法】

$\because$ $y=2+\dfrac{2}{(x+1)^2+3}$,

又 $3\leqslant(x+1)^2+3<+\infty$,

$\therefore$ $2<y\leqslant\dfrac{8}{3}$。

于是，所求的值域为 $\left\{y\,\middle|\,2<y\leqslant\dfrac{8}{3}\right\}$。

例9 求函数 $y=x+\sqrt{1-x}$ 的值域。

【一般解法】

显然，这个函数的定义域为

$$\{x\,|\,x\leqslant 1\}.$$