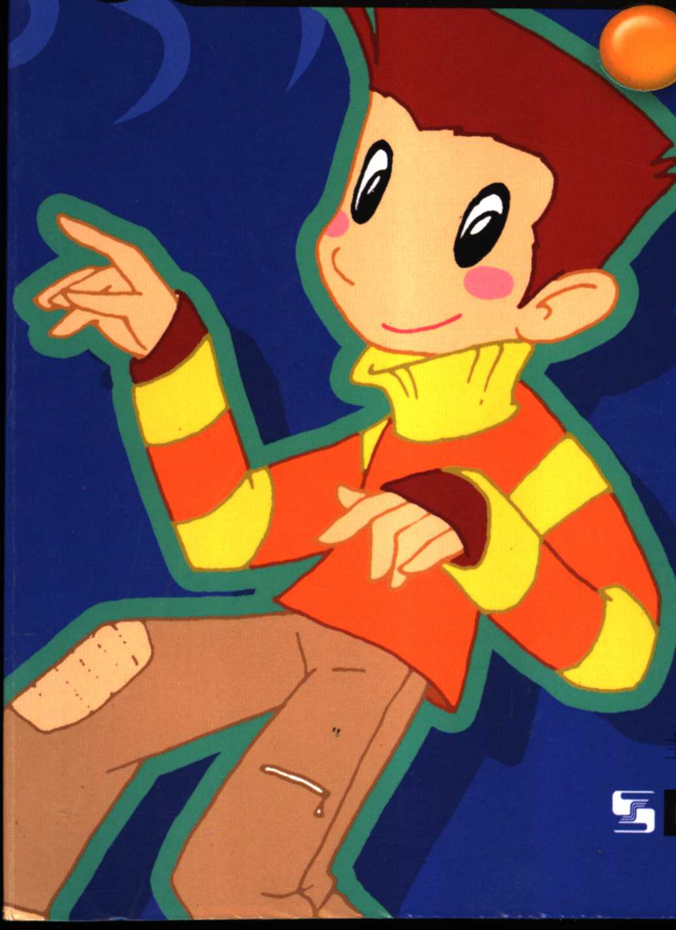
ZHEN LIAO

掌握一种学习方法 比做100 道题更重要！

# 高中数学问题
# 误解诊疗大全

学生解题方法大全

高一



主编 谢文泉

山西教育出版社

ZHEN LIAO

高一年级

# 数学问题误解诊疗大全


丛书主编　谢文泉
本册主编　邢凤珠
本册副主编　徐仲洲　郭敏思　薛三虎
本册编委　谢文泉　邢凤珠　徐仲洲
郭敏思　薛三虎　王雪丽
赵　博　张河山　褚小勇
马胜利　刘红林　张凤瑞
栗彩霞　高绍艳　郝俊兰
王原红　刘金晔　郭克龙
于　捷　赫秀颖　黄世凤


山西教育出版社

**图书在版编目（C I P）数据**

高中数学问题误解诊疗大全．高一/谢文泉主编．太原：山西教育出版社，2004．7

ISBN　7－5440－2646－9

Ⅰ．高…　Ⅱ．谢…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 031462 号

山西教育出版社出版发行

（太原市迎泽园小区 2 号楼）

晋城市印刷厂印装　新华书店经销

2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月山西第 1 次印刷

开本：850×1168 毫米　1/32　印张：12.625

字数：455 千字　印数：1—5000 册

定价：14.00 元

# 《高一年级数学问题误解诊疗大全》编委会


丛书主编　谢文泉

本册主编　邢凤珠

本册副主编　徐仲州　郭敏思　薛三虎

本册编委　谢文泉　邢凤珠　徐仲州　郭敏思　薛三虎　赵　博　褚小勇　孟小翠　马胜利　刘红林　张凤瑞　栗彩霞　高绍艳　郝俊兰　王原红　刘金晔　郭克龙　于　捷　赫秀颖　黄世凤

# 出版前言

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“课后练习”、“单元测试”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，考试成绩不理想，这是为什么？

究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好功课的根本保证；掌握方法，是攻克难题的有力武器。只有弄清基本原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种考试，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《中国学生解题方法大全》就是期望为同学们提供最为全面、最为系统、最为实用、最为完备的各类解题方法。它新课标为依据，突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能。书中既有例题分析，针对训练；又有方法点拨，思维开拓。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点评恰到好处。可以说，本书是同学们“学好功课的方法宝库，攻克难题的新式武器”。

愿本书成为你学习的一个支点，撑起你知识的一片蓝天！

# 前　言

人类的数学学习，是在不断地提出问题和解决问题中完成的.对困难而陌生的问题的解决，出现思维受阻或误解疏漏屡见不鲜.但这种对数学问题的误解，无论从学习的角度还是从教育的角度观察，对任何人而言，它都不是盖棺论定的绝对错误，而是一种蕴含着无限生机的认知的必然过程.因此，研究并诊疗误解的症结，学习他人的行之有效的解题构思经验，并以谬为师防止疏漏，探索完善学习认知的规律，在教育心理学和学习领域里，都是一个既有理论意义又有实践价值的重要课题，同时也是一个极具挑战性的困难问题.

本书根据教育部最新审订的《全日制普通高中数学教学大纲》精神，参照人民教育出版社最近几年出版的高中数学必修和选修课本的顺序，按高中一年级（其中含高二一章）、高中二年级、高中三年级分三册同步编写.考虑到数学教材内容随数学教育价值取向调整而增删变革的现实，也考虑到数学教学内容未来发展的可能趋势，本书以国内高中数学课本里的习题、复习题及历年数学高考中的重点题型为主干，并在国内外新近出版的众多资料里，精选了一批对学习数学有益的典型题目，逐题剖析编写.每个问题的撰文，均由［题目］、［误解］、［受阻分析］、［合理构思］、［正确解答］、［变式练习］等六个栏目组成.从题目拟定，误解诊疗，到正确解答程序的构思，都注意了指导性、典型性、实用性、普遍性和发展前瞻性原则的贯彻，并对若干影响深远的问题，给出了点评和拓

展.

为了使本书真正成为广大读者的良师益友，我们力求做到适合中学师生的不同层次需要，激活读者的内在潜能，教会学生识别认知障碍，辨析误解根源，把错误扼止在求解构思的过程之中．为了使学生的创新能力得到良好训练，并在解题构思中培养优化解题程序的能力，我们还努力介绍和渗透相似联想、相似类比、相似扩展和相似优化等现代认知手段，使读者在已有的认知结构中，提取有益于解题构思的信息、理论和思想方法，整合已知未知的差异，重组知识结构，形成用题设解决问题的知识迁移序列，构建问题解决的最佳策略．因此，本书无论是在误解诊疗，还是在解题构思及正确解答等方面都相得益彰同样精彩，既能启迪思维，又能提高读者的认知水平。

由于当前国内外的数学教育界对解决问题失误的认知机理研究正处在不够成熟的萌芽发展阶段，我们在本书中对误解症结的剖析，也只是对解题构思规律在正、反两面的返真探索行为，加之时间和水平的局限性，不妥之处在所难免，诚盼读者批评赐教.

**编者**

2004．4

# 目 录
CONTENTS

# 第一章 集合与简易逻辑

## 一、集　合

### 1.1 集　合

**题 1** 下列四个选项中是空集的是 (　　)

A. $x^2=-1$ 的自然数解　　B. 最小的实数

C. $\{x \mid x^2=-1$ 的自然数解$\}$　　D. 等腰三角形全体

**误　解** 因为，$x^2=-1$ 无自然数解，所以，方程 $x^2=-1$ 的自然数解成空集，故选择 A.

**受阻分析** 此解误因有两个：(1)对方程的解与解集认知错位；(2)对集合、空集的概念与表示认识不到位. 由此导致在解题构思中，错把 $x^2=-1$ 无自然数解当成不含任何元素的空集整体.

**合理构思** 因为，“$x^2=-1$ 无自然数解”、“最小实数不存在”，都是某种陈述性语句而不是集合. 故可能正确的结论应在 C、D 中. 又因为“等腰三角形全体”是非空集合，而$\{x \mid x^2=-1$ 的自然数解$\}$是用描述法给出的空集. 所以，应选择 C.

**正确解答** 因为 A、B、D 不是空集，所以选择 C.

**题 2** 用关联符号“=”、“$\in$”、“$\notin$”填空：0 ______ $\varnothing$.

**误　解** 填 0 __=__ $\varnothing$ 或 0 __$\in$__ $\varnothing$.

**受阻分析** 误解 0 __=__ $\varnothing$ 的误因在于在解答构思中，混淆了元素个体与集合整体两个不同概念的关系，把个体与整体同等对待；误解 $0\in\varnothing$ 的错因，在于对 $\varnothing$ 表示不含有任何元素的集合认知不到位，把 $\varnothing$ 看成是含数 0 的集合.

**合理构思** 因为，数 0 是元素个体，$\varnothing$ 表示整体集合，联想个体与整体不具有相等关系，故应考查关联符号 $\in$ 、$\notin$ 的合理性.

又因为，空集 $\varnothing$ 不含有任何元素 $\Rightarrow$ $0\in\varnothing$ 是假命题，所以，应填 0 __$\notin$__ $\varnothing$.

**正确解答** 数 $0\ \underline{\notin}\ \varnothing$.

**题 3** 已知集合 $M=\{1,x,y\}$ 和 $P=\{x,xy,x^2\}$ 相等,求实数 $x$、$y$ 的值.

**误解一** $\because\quad x=xy\Rightarrow\ x(y-1)=0$,且 $x=0$ 时,$M\neq P$,故 $y=1$.

又 $\because\quad x^2=x\Rightarrow\ x(x-1)=0$,且 $x\neq0$, 故 $x=1$.得

$M=\{1,1,1\}$ 且 $P=\{1,1,1\}$.

$\therefore\quad x=1,y=1$.

**误解二** $\because\quad x^2=x\Rightarrow\ x(x-1)=0$ 且 $x\neq0\Rightarrow\ x=1$,得

$M=\{1,y\}$、$P=\{1,y\}$.

$\therefore\quad x=1,y\in\mathbf{R}$.

**受阻分析** 误解一对集合里元素的互异性认识不到位;误解二对集合 $M$、$P$ 都是三元集合认知错位.

**合理构思** 联想三元集合相等的充要条件,布列 $x$、$y$ 的二元方程,用集合元素的互异性及题设条件排除增根计算 $x$、$y$.

**正确解答**

**解法一** $\because\quad M=P\Rightarrow\begin{cases}x^2=y,\\xy=1.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=1,\\xy=y.\end{cases}$

当 $\begin{cases}x^2=y,\\xy=1\end{cases}\Rightarrow\ x^3=1\Rightarrow\ x=1$、$y=1$,不合题意.

当 $\begin{cases}x^2=1,\\xy=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1,\\y(x-1)=0,\end{cases}$ 检验,得 $x=-1,y=0$.

$\therefore\quad x=-1,y=0$ 时,有 $M=P=\{1,-1,0\}$.

**解法二**

$\because\quad M=P\Rightarrow\begin{cases}xy=x^4y,\\1+x+y=x(1+x+y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy(x^3-1)=0,\\(x-1)(x+y+1)=0.\end{cases}$

$\because$ 集合元素互异 $\Rightarrow\ x\neq0$ 且 $x\neq1$.

$\therefore\quad x=-1,y=0$ 时,$M=P=\{1,-1,0\}$.

**点　评** 合理布列方程组,并灵活运用集合元素的互异性排除增根,既是本题求解的难点也是本题训练思维能力的重点.

**题 4** 写出方程组 $\begin{cases}x+y=5,\\2x-4y=-8\end{cases}$ 的解集.

**误解一** 因为,解方程组得:$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

所以,原方程组的解集是 $\{x=2,y=3\}$.

**误解二** 因为,解方程组得:$x=2,y=3$,所以,原方程组的解集为$\{2,3\}$.

**受阻分析** 以上两个误解对解线性方程组都有一定正确认识.但在解题构思中,对方程组的解与解集及解集的集合表示法发生错位.$\{x=2,y=3\}$表示元素是两个方程的二元集合;$\{2,3\}$则表示元素是两个自然数的二元集合.

**合理构思** 联想二元一次方程组$\begin{cases}x+y=5,\\2x-4y=-8\end{cases}$的解是一对有序实数,确定解集是由这对有序实数当元素的一元集合的概念,纠正误解寻求正确答案.

**正确解答** 因为,$\begin{cases}x+y=5,\\2x-4y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x+5,\\6x=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

所以方程组的解集为$\{(2,3)\}$.

**题❺** 集合 $A=\{y\mid y=x^2-1,-2\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\in\mathbf{Z}\}$的列举法表示是__________.

**误　解** 因为,$-2\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\in\mathbf{Z}\Rightarrow x=-2、-1、0、1、2$.

又因为,$y=x^2-1\Rightarrow$ 函数 $y$ 的对应值 $y=3、0、-1、0、3$.

所以,集合 $A$ 的列举法表示为$(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)$.也可以表示为 $A=\{(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3)\}$.

**受阻分析** 此解的误因,在于解题构思中对集合的列举法概念认知不到位,并对集合的代表元素及函数的值集、函数图像的点集认知错位,导致 $A$ 的两种列举表示法皆不正确.

**合理构思** 联想集合 $A$ 的代表元素是函数 $y=x^2-1$ 在约束条件:$-2\leqslant x\leqslant2$且 $x\in\mathbf{Z}$ 的值,故应在求出 $y$ 的对应值后,正确使用集合及集合的列举表示法概念,写出函数的值集.

**正确解答** $\because\ x=-2、-1、0、1、2\Rightarrow$ 对应的函数值 $y=3、0、-1、0、3$.

$\therefore$ 函数值域的列举法表示为 $A=\{-1,0,3\}$.

**题❻** 计算集合 $A=\{x\mid x^2+(m+2)x+m+1=0,m\in\mathbf{R}\}$的所有元素和$\Sigma$及所有元素积$\Pi$.

**误解一** 因为,方程 $x^2+(m+2)x+m+1=0$ 的二根和 $x_1+x_2=-m-2$,二根积 $x_1x_2=m+1$.所以,$A$ 的所有元素的和、积为$\Sigma=-m-2$、$\Pi=$

$m+1$.

**误解二** 因为,方程 $x^2+(m+2)x+m+1=0$ 的二根和 $x_1+x_2=-m-2$,二根积 $x_1x_2=m+1$,且 $m\in\mathbf{R}$. 所以,$A$ 集的所有元素的和、积皆为实数集 $\mathbf{R}$.

**受阻分析** 误解一的误因有两个. 其一对集合 $A$ 的所有元素的和、积与 $x^2+(m+2)x+m+1=0$ 的二根和、二根积概念混淆;其二对一元二次方程实根存在性与集合元素互异性的认知不到位,不能对等根情况进行必要的讨论,从而产生疏漏. 误解二除在构思中犯有前解的错误外,还把实数与实数集混为一谈,误得 $\sum=\prod=\mathbf{R}$.

**合理构思** 联想一元二次方程的讨论,结合集合内元素的互异性,把 $A$ 集分成一元集合及二元集合两类,探索构建 $\sum$、$\prod$ 的计算程序.

**正确解答**

**解法一** ▶ $\because$ $\Delta=(m+2)^2-4(m+1)=m^2\geqslant0$,且由求根公式有

$$x=\frac{-m-2\pm m}{2}.$$

$\therefore$ 当 $m=0$ 时,$A=\{-1\}$,得 $\sum=-1$、$\prod=-1$;

当 $m\neq0$ 时,$A=\{-1,-m-1\}$,得 $\sum=-m-2$、$\prod=m+1$.

**解法二** ▶ $\because$ $x^2+(m+2)x+m+1=(x+1)(x+m+1)=0$

$$\Rightarrow x_1=-1、x_2=-m-1.$$

$\therefore$ 当 $m=0$ 时,$\sum=-1$、$\prod=-1$;

当 $m\neq0$ 时,$\sum=-m-2$、$\prod=m+1$.

**解法三** ▶ $\because$ $\Delta=(m+2)^2-4(m+1)=m^2\geqslant0$,

$\therefore$ 当 $m\neq0$ 时,由根与系数的关系有 $\sum=-m-2$、$\prod=m+1$;

当 $m=0$ 时,$x_1=x_2=-1$,有 $\sum=-1$、$\prod=-1$.

**题 7** 已知集合 $V=\left\{a\,\middle|\,\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^*,且\ a\in\mathbf{Z}\right\}$的等集为 ( )

A. $\{2,3\}$  B. $\{1,2,3,4\}$  C. $\{1,2,3,6\}$  D. $\{-1,2,3,4\}$

**误 解** $\because$ $\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}^*$ 且 $a\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 当 $a=-1$ 时,$\frac{6}{5-a}=1\in\mathbf{N}^*$; 当 $a=2$ 时,$\frac{6}{5-a}=2\in\mathbf{N}^*$;

当 $a=3$ 时,$\frac{6}{5-a}=3\in\mathbf{N}^*$; 当 $a=4$ 时,$\frac{6}{5-a}=6\in\mathbf{N}^*$.

$\therefore$ $V=\{1,2,3,6\}$,故选择 C.

**受阻分析** 此解误因是对集合中的代表元素的认知不到位，并错误地把代数式$\frac{6}{5-a}$的值代替了集合 $V$ 的元素.

**合理构思** $\because \quad \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N}^*$，且 $a \in \mathbf{Z}$，

$\therefore \quad a=-1$ 时，$\frac{6}{5-a}=1 \in \mathbf{N}^*$； 当 $a=2$ 时，$\frac{6}{5-a}=2 \in \mathbf{N}^*$；

当 $a=3$ 时，$\frac{6}{5-a}=3 \in \mathbf{N}^*$； 当 $a=4$ 时，$\frac{6}{5-a}=6 \in \mathbf{N}^*$；

而 $V$ 中的代表元素为 $a$， $\therefore \quad V=\{-1,2,3,4\}$， $\therefore$ 选择 D.

**正确解答** $\because \quad V=\{-1,2,3,4\}$， $\therefore$ 选择 D.

**题 8** 已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A$ 与 $B$ 只有一个公共元素 $-3$，求 $a$ 的值.

**误　　解** 因为 $-3$ 为 $A$ 与 $B$ 的一个公共元素，所以，$-3 \in A$ 且 $-3 \in B$，所以，$a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$，解之得 $a_1=0$ 或 $a_2=-1$，所以，$a=0$ 或 $a=-1$.

**受阻分析** 以上解答错误在于对 $A \cap B=\{-3\}$ 认知不到位.因为，当 $a=0$ 时，$A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，此时 $A$ 与 $B$ 除了有一个公共元素 $-3$ 外还有另一个公共元素 1，与已知“$A$ 与 $B$ 只有一个公共元素 $-3$”相矛盾，所以，$a=0$ 应舍去.

**合理构思** 因为，$-3$ 为 $A$ 与 $B$ 的一个公共元素，所以，$-3 \in A$ 且 $-3 \in B$，所以，$a-3=-3$ 或 $2a-1=-3$，解之得 $a_1=0$，$a_2=-1$.

(1)当 $a_1=0$ 时$\Rightarrow A \cap B=\{-3,1\}$与题设 $A$ 与 $B$ 只有一个公共元素 $-3$ 相矛盾，所以，$a_1=0$ 应舍去；

(2)当 $a_2=-1$ 时，$A=\{1,0,-3\}$，$B=\{-4,-3,2\}$满足条件，所以，$a=-1$ 为所求.

**正确解答** $a=-1$.

**题 9** 已知集合 $A=\{-3,4,2x^2+5x\}$，当 $x$ 为何值时有 $3 \in A$？

**误　　解** 令 $2x^2+5x=3$，得 $x=\frac{1}{2}$或 $x=-3$.因为 $A$ 中已有元素 $-3$，根据集合中元素互异，故 $x=-3$ 舍去，得当 $x=\frac{1}{2}$时，$3 \in A$.

**受阻分析** 误解原因在于把集合中代表元素是 $2x^2+5x$ 的值而不是 $x$ 弄混淆，故 $x=-3$ 不应舍去.

正确解答 令 $2x^2+5x=3$，得 $x=-3$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 时，$3\in A$.

**题10** 已知集合 $A=\{$小于6的自然数$\}$，$B=\{$小于10的质数$\}$，$C=\{$24和36的非负公约数$\}$，用列举法表示下列集合：

(1)$M=\{x|x\in A$ 且 $x\in C\}$；

(2)$N=\{x|x\in A$ 且 $\notin B\}$.

误　解 $A=\{$小于6的自然数$\}=\{1,2,3,4,5\}$，

$B=\{$小于10的质数$\}=\{1,2,3,5,7\}$，

$C=\{$24和36的非负公约数$\}=\{0,1,2,3,4,6,12\}$，所以

(1)$M=\{x|x\in A$ 且 $x\in C\}=\{1,2,3,4\}$；

(2)$N=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}=\{4\}$.

受阻分析 此解误因有三处：(1)自然数集中少了“0”元素；(2)质数集合中多了“1”元素；(3)非负公约数集合中多了“0”元素. 这都是由于对题设中相关概念认识不到位造成的.

正确解答 $A=\{$小于6的自然数$\}=\{0,1,2,3,4,5\}$，

$B=\{$小于10的质数$\}=\{2,3,5,7\}$，

$C=\{$24和36的非负公约数$\}=\{1,2,3,4,6,12\}$，所以

(1)$M=\{x|x\in A$ 且 $x\in C\}=\{1,2,3,4\}$；

(2)$N=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}=\{0,1,4\}$.

**题11** 若集合 $A=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，且 $a\in A$，$b\in B$，试判断元素 $a+b$ 与集合 $A$、$B$、$C$ 的关系.

误　解 $\because$　$a\in A,b\in B$，

$\therefore$　$a=2k,b=2k+1,(k\in\mathbf{Z})\Rightarrow a+b=4k+1(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$　$a+b\notin A,a+b\notin B,a+b\in C$.

受阻分析 误解中把 $a=2k,b=2k+1$ 中的字母 $k$ 取了相同的值，这是该类问题的特例，而以特殊代替一般是对题设的认知错位. 这类问题只需把集合 $A$、$B$、$C$ 的表示由描述法改写为列举法就直观了.

$A=\{\cdots,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,\cdots\}$，

$B=\{\cdots,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,\cdots\}$，

$C=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$.

正确解答 因 $a\in A$，$b\in B$，所以 $a=2k$，$k\in\mathbf{Z}$，$b=2k'+1$，$k'\in\mathbf{Z}$，

故 $a+b=2(k+k')+1$，$k$、$k'\in\mathbf{Z}$，则显然 $(a+b)\notin A$；$(a+b)\in B$. 当 $k+k'$ 为奇数时，$(a+b)\notin C$；当 $k+k'$ 为偶数时 $(a+b)\in C$.

**变式练习**

1.不能形成集合的是 （ ）

A.平行四边形全体 B.《集合》一章所有的难题

C.大于 3 的所有整数 D.所有无理数

2.集合 $M=\{x\mid x^2+2x-a=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $M\neq\varnothing$，则实数 $a$ 的取值范围是 （ ）

A.$a\leqslant-1$ B.$a\leqslant1$ C.$a\geqslant-1$ D.$a\geqslant1$

3.已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$，$N=\{1,a^2-6a+10,3\}$，且 2,3 同时是 $M$，$N$ 中公共元素，则 $a$ 的取值范围是 （ ）

A.1 或 2 B.2 或 4 C.2 D.1

4.下列集合中表示同一个集合的序号是 （ ）

①$\{1,5\}$ ②$\{(1,5)\}$ ③$\{(5,1)\}$ ④$\{5,1\}$ ⑤$\{x\mid x^2-ax-1=0\}$ ⑥$\{a\mid$方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根$\}$

A.①②③④ B.②③ C.①④ D.⑤⑥

5.数集 $\{2a,a^2-2a\}$ 中 $a$ 的取值范围是______.

6.由实数 $x,-x,\sqrt{x^2},\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合里最多含有______个元素.

7.$\{(x,y)\mid y=-2x+1,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ 用列举法表示应是______.

8.设 $A$ 是数集且满足条件：若 $a\in A$ 且 $a\neq1$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$. 若 $2\in A$，求 $A$.

9.设 $A=\{x\mid x^2+(b+2)x+b-1=0,b\in\mathbf{R}\}$，求 $A$ 中所有元素的和.

**参考答案**

1.B 2.C 3.C 4.C 5.$a\neq0$ 且 $a\neq4$ 6.2 7.$\{(0,1)\}$

8.若 $2\in A$ 且 $2\neq1$，则 $\frac{1}{1-2}\in A$，即 $-1\in A$，而 $-1\neq1$，所以 $\frac{1}{1-(-1)}\in A$，得 $\frac{1}{2}\in A$，$\frac{1}{2}\neq1$，故 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\in A$，即 $2\in A$，以后循环重复，由集合的互异性可知，$A=\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$.

9.因为 $A=\{x\mid x^2+(b+2)x+(b-1)=0,b\in\mathbf{R}\}$，由韦达定理知：$A$ 中所有元素之和为 $x_1+x_2=-(b+2)$.