2004

硕士专业学位研究生入学资格考试

刘庆华 主编

GCT 数学 模拟试题与解析

Graduate Candidate Test

清华大学出版社

硕士专业学位研究生入学资格考试

数学

模拟试题与解析

刘庆华　主编
刘庆华　关 治　扈志明　编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书根据硕士专业学位研究生入学资格考试的考试大纲的要求，编写了 12 套模拟试题. 每套试题包含 25 道单项选择题，其中算术、代数、几何、一元微积分、线性代数每部分各 5 道题. 在每套模拟试题的后面给出参考答案及解析过程，供考生们参考.

本书可供攻读硕士专业学位的备考人员和辅导教师使用.

图书在版编目(CIP)数据

硕士专业学位研究生入学资格考试　数学模拟试题与解析/刘庆华主编；刘庆华，关治，扈志明编. 一北京：清华大学出版社，2004.7

ISBN 7-302-08685-0

Ⅰ. 硕…　Ⅱ. ①刘… ②刘… ③关… ④扈…　Ⅲ. 高等数学一研究生一入学考试一自学参考资料

Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 047666 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：刘　颖

印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　**印张**：8.25　**防伪页**：1　**字数**：169 千字

版　　次：2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第2 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-08685-0/O・362

印　　数：20001～35000

定　　价：19.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

出版说明

Introduction

硕士专业学位研究生入学资格考试(英文名称为 Graduate Candidate Test,简称 GCT)起始于 2003 年,当时名为工程硕士专业学位研究生入学资格考试(简称 GCT-ME)。清华大学出版社于 2003 年出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的《全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程》丛书,包括语文、数学、英语、逻辑共 4 册,得到了广大考生的欢迎。2004 年,国务院学位办对考试大纲进行了修订,发布了《硕士专业学位研究生入学资格考试指南(2004 年版)》,适用范围除原来的报考工程硕士的考生外,增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生,考试名称也去掉了"工程"二字。

为帮助广大考生更好地准备考试,在根据 2004 年新大纲对考前辅导教程系列进行修订再版的同时,我们又特别邀请教程系列的作者编写了这套全新的《硕士专业学位研究生入学资格考试模拟试题与解析》系列,作为考前辅导教程的配套资料,供考生考前模拟训练之用。本系列仍分为 4 册,其中数学、英语、逻辑为模拟试题与解析,语文为模拟试题集。

关于考试的具体信息,可参考清华在线(网上同步辅导)网站 www.qinghuaonline.com。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2004 年 6 月

前　言

本书是根据《硕士专业学位研究生入学资格考试指南(2004年版)》编写的数学辅导材料，以方便考生备考.

按照现在的复习备考方式，大致将复习的过程分为3个阶段：全面复习阶段、归纳总结阶段、冲刺阶段.在每个阶段所选用的辅导材料也是有区别的.在全面复习阶段，一般选用涵盖考试大纲所涉及的知识点的教材(我们所编写的《硕士专业学位研究生入学资格考试　数学考前辅导教程》就是为此而准备的)，在此阶段的主要任务是将所要考的知识点搞清楚、弄明白，扫清知识上的盲点.在归纳总结阶段，是对前一阶段所复习知识的浓缩和提升，以便于自己从全局上把握所复习的知识，突出重点和难点.由于各自的知识背景和复习效果不同，所以浓缩和提升的程度也不同，因此，这一阶段可选择的材料较少，一些辅导教师开设串讲课来帮助备考者归纳总结.在冲刺阶段，大多采取做模拟题的方式来进行，通过做模拟题来检查自己对知识点的掌握程度以及灵活运用所学知识处理问题的能力，同时也可以从中发现自己的薄弱点，以便及时调整复习的方式和方法.

在职攻读硕士专业学位研究生入学资格考试的考试内容和考试形式都很新，考生在备考的时候可参考和借鉴的材料较少.针对这种情况，我们在编写《硕士专业学位研究生入学资格考试　数学考前辅导教程》的基础上，编写了本书，以帮助考生在备考阶段准备得更充分些，在考试中取得好的成绩.

根据新的考试大纲中关于数学内容的考试要求：测试考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法，逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力.因此，在模拟试题的选择上，既考虑到试题的知识覆盖面，又注意到难易程度，以利于考生通过做模拟试题能够全面检查对所复习知识的掌握程度。在模拟试题的设计上，既侧重知识的重点和难点，也注意考察重点和难点的方式与方法，以便于考察考生对重点和难点的掌握程度以及对这些知识点的灵活运用情况.

根据考试大纲的要求，我们在此模拟试题集中编写了12套模拟试题.每套试题包含25道单项选择题，其中算术、代数、几何、一元微积分、线性代数每部分各5道题.在每套模拟试题的后面给出了参考答案及解析过程，供考生们参考.

由于编者的经验和水平所限，书中难免有疏漏和不足之处.欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正.

编　者

2004年5月

目　录

数学基础能力测试模拟题(1)

模 拟 题

本试题满分为 100 分，共 25 个选择题，每题 4 分. 每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的.

1. P 是数轴上的一定点，坐标为 -1，Q 是数轴上的一动点，若要求 Q 与 P 的距离不超过 1，则点 Q 的坐标 x 的取值范围为[ ].

(A) $|x-1|<1$ (B) $|x-1|\leqslant 1$ (C) $|x+1|<1$ (D) $|x+1|\leqslant 1$

2. 如果 n 是一个正整数，那么 n^3-n 一定有约数[ ].

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

3. 某洗衣机生产厂家，为了检测其产品无故障的启动次数，从生产的一批洗衣机中任意抽取了 5 台，如果测得的每台无故障启动次数分别为 11300，11000，10700，10000，9500，那么这批洗衣机的平均无故障启动次数大约为[ ].

(A) 10300 (B) 10400 (C) 10500 (D) 10600

4. 一列火车通过一座长为 600m 的桥梁用了 15s，经过一根电杆用了 5s，此列火车的长度为[ ]m.

(A) 150 (B) 200 (C) 300 (D) 400

5. 一项工程，甲单独做 30 天可以完成，乙单独做 20 天可以完成. 甲先做了若干天后，由乙接着做，结果合起来做了 22 天完成这项工程. 则甲、乙两人各做的天数分别为[ ].

(A) 4，18 (B) 6，16 (C) 10，12 (D) 11，11

6. 下列函数中，存在反函数的是[ ].

(A) $f_1(x)=\cos(x-1), x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

(B) $f_2(x)=\sin(x+1), x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

(C) $f_3(x)=x^2-4x+1, x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

(D) $f_4(x)=x^2+2x-1, x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

7. 若不等式 $\sqrt{4x-x^2}>ax$ 的解集是 $(0,4]$，则 a 的取值范围是[　].

(A) $(-\infty,0)$　　(B) $(-\infty,0]$　　(C) $(-\infty,4)$　　(D) $(0,4)$

8. 已知 $f_1(x)=x^2-1, f_2(x)=x^2+1, f_3(x)=x^2+\sqrt{3}x+1, f_4(x)=x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$，则它们之中是 x^6+1 的二次因式的有[　].

(A) $f_1(x), f_3(x)$　　(B) $f_2(x), f_3(x)$

(C) $f_1(x), f_4(x)$　　(D) $f_2(x), f_4(x)$

9. 如果数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=0, a_{n+1}=a_n+4n$，则 $a_{100}=$[　].

(A) 19800　　(B) 20000

(C) 20200　　(D) 20400

10. 从 9 名男生、6 名女生中选出 5 人排成一列，其中至少有 2 名男生的不同排法的数目为[　].

(A) $P_9^2P_6^3+P_9^3P_6^2+P_9^4P_6^1+P_9^5$　　(B) $P_9^2P_6^3P_5^5+P_9^3P_6^2P_5^5+P_9^4P_6^1P_5^5+P_9^5P_5^5$

(C) $(C_{15}^5-135)P_5^5$　　(D) $(C_{15}^5-141)P_5^5$

11. 某班组共有员工 10 人，其中女员工 3 人. 现选 2 名员工代表，至少有 1 名女员工当选的概率是[　].

(A) $\frac{27}{45}$　　(B) $\frac{36}{45}$　　(C) $\frac{21}{45}$　　(D) $\frac{24}{45}$

12. 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 2，且在 $x=2$ 时 $f(x)$ 取得最小值，则下列选项中，φ 可能取到的值是[　].

(A) $-\frac{3\pi}{4}$　　(B) $\frac{7\pi}{4}$　　(C) $\frac{5\pi}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

13. 平面上不共线的 4 个点 A,B,C,D. 已知 $(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\,\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$，则 $\triangle ABC$ 是[　].

(A) 直角三角形　　(B) 等腰三角形

(C) 钝角三角形　　(D) 等边三角形

14. 设 O 为坐标原点，点 A,B 在抛物线 $y^2=2x$ 上，且 $OA\perp OB$，$|OA|=|OB|$，则 $\triangle ABC$ 的面积等于[　].

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

15. 如果一个四边形的两条对角线相等且互相垂直，那么该四边形的形状[　].

(A) 一定是菱形　　(B) 一定是矩形

(C) 一定是正方形　　(D) 无法确定

16. 设 $f'(x_0)\neq 0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta f(x_0)}=$[ ].

(A) -1　(B) 1　(C) 0　(D) ∞

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)\geqslant 0$. 记 $I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$, $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x$，则[ ].

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_1<I_2$

(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_1<I_3<I_2$

18. 在区间 $[0,+\infty)$ 内，方程 $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}+\sin x-1=0$[ ].

(A) 无实根　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　(D) 有无穷多个实根

19. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=$[ ].

(A) $\dfrac{1}{e}-1$　(B) $1-\dfrac{1}{e}$　(C) $\dfrac{2}{e}$　(D) $2\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

20. 曲线 $y=e^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围成图形的面积为[ ].

(A) $\dfrac{e}{2}$　(B) e　(C) $\dfrac{e}{2}-1$　(D) $\dfrac{e}{2}+1$

21. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均是 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是[ ].

(A) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$　(B) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$　(D) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，则 $|\boldsymbol{A}|\leqslant|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|$

22. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是[ ].

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆　(B) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均不可逆

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆　(D) 若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均不可逆

23. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，但不能由向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，记向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_s$[ ].

(A) 不能由(Ⅰ)，也不能由(Ⅱ)线性表出

(B) 不能由(Ⅰ)，但可由(Ⅱ)线性表出

(C) 可由(Ⅰ)，也可由(Ⅱ)线性表出

(D) 可由(Ⅰ)，但不能由(Ⅱ)线性表出

24. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$[ ].

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

25. $\boldsymbol{A}$ 是三阶可逆矩阵，且各列元素之和均为 2，则[ ].

(A) $\boldsymbol{A}$ 必有特征值 2　　　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$必有特征值 2

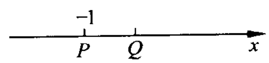
(C) $\boldsymbol{A}$ 必有特征值-2　　　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}$必有特征值-2

参考答案及解析

1. **答**　(D).

分析　P 点的坐标为-1,Q 点的坐标为 x,如图所示,P 与 Q 的距离为$|x-(-1)|=|x+1|$,又 P 与 Q 的距离不超过 1,即$|x+1|\leqslant 1$.

故选(D).



题 1 图

2. **答**　(C).

分析　$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$是相邻三个数的乘积. 当 $n=1$ 时,$n^3-n=0$,任何数都是 0 的约数. 当 $n\geqslant 2$ 时,$n-1,n,n+1$ 这三个数中至少有一个是偶数,因此 $n^3-n=(n-1)n(n+1)$有约数 2;又 $n-1,n,n+1$ 这相邻的三个数中必然有一个是 3 的倍数,因此 n^3-n 有约数 3,所以 n^3-n 必有约数 6.

故选(C).

3. **答**　(C).

分析　这 5 台洗衣机的平均无故障启动次数为

$$\frac{11300+11000+10700+10000+9500}{5}=10500.$$

故选(C).

4. **答**　(C).

分析　列车经过一根电杆用了 5s,这说明列车用 5s 走过它自己的长度,同时列车用 15s 走过它的全长再加 600m,因此列车走 600m 要用 10s,5s 走 300m,因此列车长度为 300m.

故选(C).

5. **答**　(B).

分析　由题意,甲每天完成工程量的$\frac{1}{30}$,乙每天完成工程量的$\frac{1}{20}$,设甲做了 x 天后,由乙接着做,则乙做了$(22-x)$天. 因此

$$\frac{x}{30}+\frac{22-x}{20}=1,$$

$$2x+3(22-x)=60,$$
$$x=6.$$

因此甲做了6天，乙做了16天.

故选(B).

6. **答** (C).

分析 $f_1(x)$在$\left(-\frac{3}{2},1\right)$上是增函数，在$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上是减函数. 函数$f_1$不是$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$到其值域的一一对应，即在$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$中，会有两个自变量的值对应同一个函数值，所以$f_1(x)$不存在反函数.

同理，$f_2(x)$在$\left(-\frac{3}{2},\frac{\pi}{2}-1\right)$上是增函数，在$\left(\frac{\pi}{2}-1,\frac{3}{2}\right)$上是减函数，不存在反函数.

$f_3(x)$的图像是抛物线的一段. 该抛物线的对称轴为$x=2$. 在$\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，$f_3(x)$是单调递减的，存在反函数.

同理，$f_4(x)$对应的抛物线的对称轴为$x=-1$. 所以$f_4(x)$在$\left(-\frac{3}{2},-1\right)$上是减函数，而在$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$上为增函数，不存在反函数.

故选(C).

7. **答** (A).

分析 记$f_1(x)=\sqrt{4x-x^2}$，它的定义域是$[0,4]$. $y=f_1(x)$的图像是圆$(x-2)^2+y^2=4$的上半部分. 记$f_2(x)=ax$，$y=f_2(x)$的图像是过原点的直线. 要满足不等式，即在区间$(0,4]$上$f_1(x)$图像都要在$f_2(x)$图像上方，只有$a<0$.

注意不能取$a=0$，此时不等式的解集是$(0,4)$.

故选(A).

8. **答** (B).

分析 容易看到

$$x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

所以$f_2(x)$是x^6+1的一个因式，只要考察选项(B)和(D). 可以用x^4-x^2+1除以$f_3(x)$，得到商式为$x^2-\sqrt{3}x+1$，余式为0，即

$$x^4-x^2+1=(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1).$$

所以$f_3(x)$也是x^6+1的因式.

故选(B).

事实上，考虑方程$x^6+1=0$，即$x^6=-1$，也就是$x^6=e^{i\pi}(=\cos\pi+i\sin\pi)$. 令

$$x_k=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}},k=0,1,\cdots,5,$$

就有分解式 $x^6+1=\prod\limits_{k=0}^{5}(x-x_k)$，其中

$$(x-x_1)(x-x_4)=(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})=x^2+1,$$

$$(x-x_2)(x-x_3)=(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}})(x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}})=x^2+\sqrt{3}x+1,$$

同理$(x-x_0)(x-x_5)=x^2-\sqrt{3}x+1$，即可找到 x^6+1 的三个二次因式.

9. **答** (A).

分析 由

$$\begin{aligned}&a_1=0,\\&a_2=a_1+4\times1,\\&a_3=a_2+4\times2,\\&\vdots\\&a_{n+1}=a_n+4n.\end{aligned}$$

相加得

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+4\times\frac{n(n+1)}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2n(n+1),\\a_{100}&=2\times99\times100=19800.\end{aligned}$$

故选(A).

10. **答** (D).

分析 从 15 人中选 5 人的排列中除去无男生和只有 1 名男生的排列，其排列数为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{15}^5-\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_6^4\mathrm{P}_5^5-\mathrm{C}_9^0\mathrm{C}_6^5\mathrm{P}_5^5&=\mathrm{C}_{15}^5\mathrm{P}_5^5-(9\times15+6)\mathrm{P}_5^5\\&=(\mathrm{C}_{15}^5-141)\mathrm{P}_5^5.\end{aligned}$$

故选(D).

选项(C)没有考虑无男生的排列.

11. **答** (D).

分析 基本事件的总数为 C_{10}^2，即 10 名员工选 2 名的组合数. 至少 1 名女员工当选，其中含的基本事件数目为 $\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_7^0\mathrm{C}_3^2$，于是得

$$p=\frac{\mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_3^1+\mathrm{C}_7^0\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_{10}^2}=\frac{24}{45}.$$

故选(D).

12. **答** (B).

分析 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)$. $f(x)$的最小正周期为 2，即$\dfrac{2\pi}{2\omega}=2$，所以 $\omega=\dfrac{\pi}{2}$. 正弦函数在自变量取 $2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$时取得最小值-1. $f(x)$在 $x=2$ 时取得最小值，所以

$$2\omega x+2\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

用 $\omega=\frac{\pi}{2}$,$x=2$ 代入,得

$$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}.$$

当 $k=2$ 时,$\varphi=\frac{7\pi}{4}$.

故选(B).

13. **答**　(B).

分析　$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,

于是得　$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=0$,

所以　$|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0$,即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$.

故选(B).

14. **答**　(C).

分析　设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.由已知条件可知 A,B 关于 x 轴对称,所以 $B(x_1,-y_1)$.由 $OA\perp OB$,得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即

$$x_1^2-y_1^2=0.$$

取 $x_1=y_1$ 并与 $y_1^2=2x_1$ 联立,解得 $x_1=y_1=2$,即 $A(2,2)$,$B(2,-2)$.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})\times(2\sqrt{2})=4.$$

故选(C).

15. **答**　(D).

分析　当四边形的两条对角线互相平分时,这个四边形是正方形;当这个四边形的两条对角线不互相平分时,它不可能是菱形,也不可能是矩形和正方形,它的形状无法确定.

故选(D).

16. **答**　(C).

分析　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta f(x_0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta f(x_0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)}{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}=\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)}=1$,

因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)-\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta f(x_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[1-\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\Delta f(x_0)}\right]=1-1=0.$$

故选(C).

17. **答**　(B).

分析　在 I_1 中令 $x=\sin t$，则当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$；$dx=\cos t dt$. 因此

$$I_1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos t dt<\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=I_2.$$

在 I_1 中，令 $x=\tan t$，则当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；$dx=\sec^2 t dt$，且当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时 $\sec t>1$，从而有 $\sec^2 t>1$. 因此

$$I_1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\sec^2 x dx$$

$$>\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=I_3.$$

于是有　$I_3<I_1<I_2$.

故选(B).

18. **答**　(B).

分析　设 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}+\sin x-1$，当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)>0$，所以只须讨论在$[0,1]$上的情形. $f(0)=-1<0$，$f(1)=1+\sin 1>0$，$f(x)$在$[0,1]$上连续，由零点存在定理，$f(x)=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

又当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\cos x>0$，这说明 $f(x)$在$(0,1)$内是单调增加的，因此 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内只有惟一的一个实根，从而 $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}+\sin x-1=0$ 在$[0,+\infty)$内只有一个实根.

故选(B).

19. **答**　(D).

分析　$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\sqrt{\ln^2 x}dx=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x dx+\int_1^e \ln x dx$$

$$=-\left[x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx\right]+\left[x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right]$$

$$=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)+e\ln e-(e-1)=2-\frac{2}{e}.$$

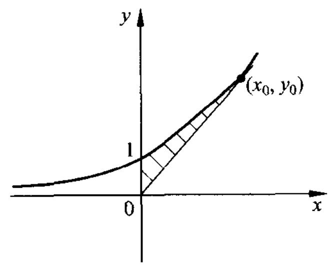
故选(D).

20. **答**　(C).

分析 设切点坐标为(x_0,y_0),如题 20 图所示,则切线方程为

$$y-y_0=(e^x)'|_{x=x_0}(x-x_0),$$

即 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$.



题 20 图

把(0,0)点代入切线方程中,得 $x_0=1$. 因此,所求切线方程为 $y=ex$. 从而,所求图形的面积为

$$\int_0^1(e^x-ex)dx=\left(e^x-\frac{e}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

$$=e-1-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e-1.$$

故选(C).

21. **答** (C).

分析 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$,但$|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=1$. 故(A)不对.

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,而矩阵乘积是不能交换顺序的,故(B)不对.

(C)是正确的. (D)不对,例如设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\text{则 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

而$|\boldsymbol{A}|=1,|\boldsymbol{B}|=0,|\boldsymbol{C}|=0$,故$|\boldsymbol{A}|\leqslant|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}|$不成立.

故选(C).

22. **答** (C).

分析 (A)不对,例如设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$ 也可逆,但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 是零矩阵,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆. 这个例子同样可说明(B)不正确. (C)是正确的,此时$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. (D) 不对,例如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵是可逆的,设 $\boldsymbol{B}$ 不可逆,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{B}$ 不可逆.

故选(C).

23. **答** (B).

分析 由$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，但不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$表出，可得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,k_s\neq 0,$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}_s=-\frac{k_1}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots+\frac{1}{k_s}\boldsymbol{\beta}.$$

这表明$\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组(Ⅱ)线性表出，但$\boldsymbol{\alpha}_s$不能由向量组(Ⅰ)线性表出，否则$\boldsymbol{\beta}$也可由向量组(Ⅰ)线性表出，这与题设矛盾.

故选(B).

24. **答** (C).

分析 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是$3\times 4$矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是3个方程4个未知数的齐次方程组，又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系只含一个解向量$\boldsymbol{\alpha}$，所以$4-\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=1$，即$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=3$. 又因$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$.

故选(C).

25. **答** (A).

分析 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\text{则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

由题设

$$\begin{cases}a_{11}+a_{21}+a_{31}=2,\\a_{12}+a_{22}+a_{32}=2,\\a_{13}+a_{23}+a_{33}=2,\end{cases}\text{即 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

由此可知$\lambda=2$是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的一个特征值. 又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}$有相同的特征值，所以$\lambda=2$是$\boldsymbol{A}$的特征值，而$\frac{1}{2}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的一个特征值.

故选(A).