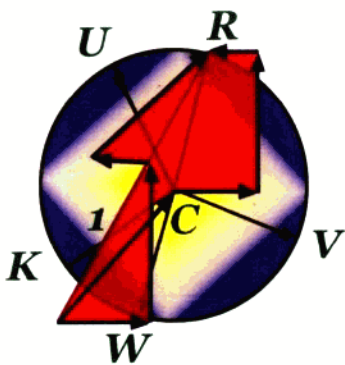


名师解惑丛书



平面向量

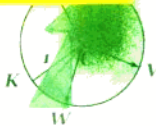
韩相河 刘纾珮 编著



山东教育出版社

1.623

00



再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印。

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中。

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订。此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题。更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习。



作者的话

向量在数学和物理学中应用很广,向量这一工具引入中学数学后,给高中数学学习带来生机,也为今后学习高等数学奠定了必要的基础,因此学好向量十分重要.

向量概念及法则较多,与以前学习的数的运算不尽相同,学习向量时应多利用类比的方法,以便加深理解.高中教材中向量内容包括平面向量的概念、向量的加法与减法、实数与向量的乘法、向量的数量积、向量的平移、解斜三角形等.对向量的学习要求是:熟练掌握向量的运算法则和数形结合的思想方法,结合向量的简单应用,初步理解向量是一种有用的数学工具.

本书紧扣大纲和教材,挖掘教材,揭示一般方法和规律,培养和提高学生兴趣及能力.其特点是:

1. 针对性强.对于学生在学习过程中易出错的问题进行重点分析、典型剖析,

克服错误根源。

2. 注重基本方法和规律，通过典型例题突出方法，揭示规律，便于学生掌握。

3. 注重向量的应用，注意如何把某些问题如平面几何中有关证共线问题、证两直线平行或垂直问题等转化为向量去解释、处理，有利于培养学生的转化思想、逐步提高建立数学模型的能力。

本节将对学好向量有关内容，解决学习过程中的疑难问题起到良好的指导作用。

由于作者水平有限，书中不当之处在所难免，谨请广大师生提出宝贵意见。

2000年9月

作者简介 韩相河，1963年生，大学本科学历，中学高级教师，现为山东省实验中学教师，山东省数学奥林匹克辅导员。近年来，曾先后在省级以上刊物发表论文20余篇，其中论文《数学教学中学生能力培养的几点思考》获山东省优秀论文一等奖，编著或参加编写图书10余种，先后荣获“优秀教师”、“泉城十大杰出青年”、“山东省新长征突击手”、“山东省数学奥林匹克优秀辅导员”等荣誉称号。

目 录

引 子	1
一 向量及其运算	2
(一)向量的概念及向量的加法、减法	2
习题一	11
(二)实数与向量的积	16
习题二	27
(三)平面向量的坐标运算与线段的定比分点	33
习题三	50
(四)平面向量的数量积	54
习题四	68
(五)平移	73
习题五	79
二 解斜三角形	83
(一)正弦定理与余弦定理	83
习题六	100
(二)解斜三角形应用举例	104
习题七	108
附 录	112
复习检测题一	112
复习检测题二	117

引 子

平面向量一章包括平面向量与解斜三角形两部分内容。向量部分包括向量概念(零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量),向量运算(向量的加减法、数乘向量、向量的数量积),向量的坐标表示及其运算;线段的定比分点。向量不同于数量,它具有自身的一套运算体系。它在数学与物理学中有着广泛的应用。要学好这部分内容,首先要理解向量的概念及运算法则,掌握数形结合的思想方法,结合向量的简单应用,初步理解向量是一种有用的数学工具。

解斜三角形部分给出了正弦定理、余弦定理并介绍了斜三角形的解法与应用。通过对这一部分知识的学习,可以提高学生运用所学知识解决实际问题的能力。

一 向量及其运算

(一)向量的概念及向量的加法、 减法

1. 深刻理解向量的有关概念

向量的概念既是重点又是难点. 向量是一个既有大小又有方向的量. 本章中所讨论的向量, 仅由大小和方向确定, 而与起点位置无关, 这种向量称为自由向量.

例 1 在下列命题中, 正确的是().

- (A) 若 $|a| > |b|$, 则 $a > b$
- (B) 若 $|a| = |b|$, 则 $a = b$
- (C) 若 $a = b$, 则 $a // b$
- (D) 若 $a \neq b$, 则 a 与 b 就不是共线向量

解题指导: 要解此题, 首先要弄清平行向量、相等向量、共线向量的概念. 两个向量只有当它们的模相等, 同时方向又相同时, 才被认为相等. 例如, $a = b$ 就意味着

$|a| = |b|$, 且 a 与 b 的方向相同, 而与 a, b 的起点无关. 这样, 我们用有向线段表示向量时, 就可以任意选取有向线段的起点, 这就为以后用向量处理几何问题带来方便. 方向相同或相反的非零向量叫平行向量. 任一组平行向量都可移到同一直线上, 故平行向量也叫共线向量. 显然, 若 $a = b$, 则 $a // b$, 但反之不一定成立.

向量的模是正数或 0, 是可以比较大小的, 由于方向不能比较大小, 因此, “大于”、“小于”对向量来说是没有意义的. 例如, 记号 $a > b$ 就没有意义, 而 $|a| > |b|$ 则是有意义的.

解: 根据有关概念, 正确答案是 (C).

[导评] 正确理解平行向量、相等向量、共线向量的区别与联系是解题的关键.

例 2 如图 1-1-1, 设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心.

(1) 写出与 \vec{OF} 相等的向量;

(2) 写出与 \vec{AF} 相等的向量;

(3) 写出与 \vec{OD} 共线的向量;

(4) 写出与 \vec{OE} 长度相等但方向相反的向量.

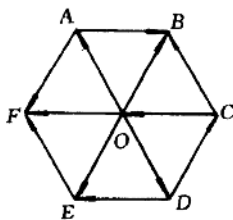


图 1-1-1

解: (1) 与 \vec{OF} 相等的向量有 \vec{DE} 、 \vec{CO} ;

(2) 与 \vec{AF} 相等的向量有 \vec{OE} ;

(3) 与 \vec{OD} 共线的向量有 \vec{EF} 、 \vec{CB} 、 \vec{OA} ;

(4) 与 \vec{OE} 长度相等且方向相反的向量有 \vec{DC} 、 \vec{OB} .

2. 要会作和向量与差向量

向量加法法则与向量减法法则是本节的重点内容,它也是全章的重点内容之一,要透彻理解向量加法、向量减法的定义,会用向量加法的三角形法则和向量加法的平行四边形法则作两个向量的和向量;掌握向量减法的三角形法则,会作两个向量的差向量.

向量加法的三角形法则:

已知向量 a 、 b , 在平面内任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, 则向量 \overrightarrow{AC} 叫做 a 与 b 的和, 记作 $a + b$, 即 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. 可简记为“首尾相接, 首尾连”.

向量加法的平行四边形法则:

以同一点 A 为起点的两个已知向量 a 、 b 为邻边作 $\square ABCD$, 则以 A 为起点的对角线 \overrightarrow{AC} 就是 a 与 b 的和, 如图 1-1-2 所示.

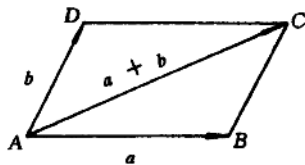


图 1-1-2

向量减法的三角形法则:

已知 a 、 b , 在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 如图 1-1-3, 则 $\overrightarrow{BA} = a - b$, $\overrightarrow{AB} = b - a$. 即 $a - b$ 可以表示为从 b 的终点指向 a 的终点的向量. 可简记为“首同尾连向被减”.

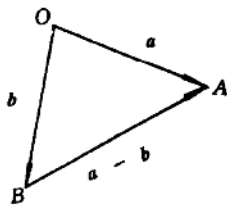


图 1-1-3

例 3 如图 1-1-4, 分别作出向量 $a + b$.

解: 如图 1-1-5, 作 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$, 则 $\overrightarrow{OB} = a + b$.

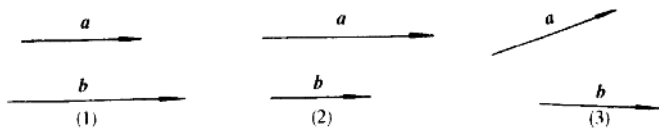


图 1-1-4

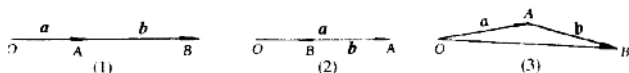


图 1-1-5

[导评]两个向量的和仍是一个向量.

(1)当向量 a 与 b 不共线时, $a + b$ 的方向与 a 、 b 都不同,且 $|a + b| < |a| + |b|$;

(2)当 a 与 b 同向时, $a + b$ 、 a 、 b 都同向,且 $|a + b| = |a| + |b|$;

(3)当 a 与 b 反向时,

若 $|a| > |b|$,则 $a + b$ 的方向与 a 的方向相同,且 $|a + b| = |a| - |b|$;

若 $|a| < |b|$,则 $a + b$ 的方向与 b 的方向相同,且 $|a + b| = |b| - |a|$;若 $|a| = |b|$,则 $a + b = 0$.

通过本题的学习,要掌握有特殊位置关系(如共线、共起点、共终点等)的两个向量的和与差的作法.

例 4 如图 1-1-6,已知正方形 $ABCD$ 的边长等于 1, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{BC} = b$, $\overrightarrow{AC} = c$,求作向量:

(1) $a + b + c$;

(2) $a - b + c$.

解:如图 1-1-6,

(1)由已知,得 $a + b =$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

又 $\overrightarrow{AC} = c,$

\therefore 延长 AC 到 E , 使 $|\overrightarrow{CE}|$
 $= |\overrightarrow{AC}|$, 则

$$a + b + c = \overrightarrow{AE}, |\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{2}.$$

(2)作 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC}$, 则

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF},$$

即 $a - b + c = \overrightarrow{DF}$, 且

$$|\overrightarrow{DF}| = 2|a| = 2.$$

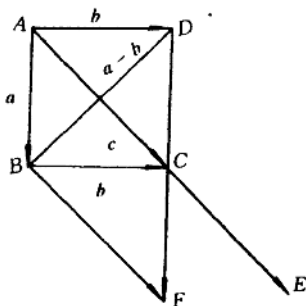


图 1-1-6

[导评]课本在定义向量的减法 $a - b$ 时,先定义了相反向量,然后将 $a - b$ 定义为 $a + (-b)$,但在作图时,并不要先作相反向量再作和向量,而只须按照向量减法的三角形法则作图即可.

另外,对于不共线向量 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} ,有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.若 A 、 B 、 C 三点共线,同样有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3. 灵活运用向量加减法的运算律

向量的加法满足交换律与结合律,即

$$a + b = b + a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

多个向量的加法可按任意的次序与任意的组合来进行.

例如:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{0};$$

或

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \mathbf{0};\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

例 5 化简:

$$(1) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM};$$

$$(2) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC};$$

$$(3) (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}).$$

$$\begin{aligned}(1) \text{解法 1: } & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法 2: } & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO} \\ &= \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{解法 1: } & \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法 2: } & \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{CB}.$$

$$\begin{aligned} \text{(3) 解法 1: } & (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2: } & (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 3: } & (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

[导评](1)差向量的做法是:当二向量起点相同时,连结这两个向量的终点,并使方向指向被减向量终点($\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$);当二向量起点不相同时,则要先进行向量平移,使二向量起点重合,然后执行上述程序.公式 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ 可直接运用.

(2)根据向量减法的定义,向量的加法、减法可以统一成

加法，所以减法也符合相应的运算律。如：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \\ &= (-\mathbf{b}) + \mathbf{a} \\ &= (-\mathbf{b}) - (-\mathbf{a}) \\ &= -(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c}); \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

(3)三个或三个以上向量的求和法则，可根据两个向量的求和法则推广如下：

已知向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ ，在平面内任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}_1, \overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{a}_2, \overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{a}_3, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \mathbf{a}_n$ ，则向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是这 n 个向量的和，即

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n \\ &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{OA_n}. \end{aligned}$$

(4)向量的加法与减法运算要恰当运用运算律，有时需去括号后重新组合，有时需适当添括号。

4. 学会用向量的知识解决一些实际问题

由于向量既有大小，又有方向，所以实际生活中与大小及方向有关的问题都可借助向量加以解决，如航船实际航行的速度的大小与方向，飞机飞行的位移，力的合成与分解等。

例 6 在重 300N 的物体上系两根绳子，这两根绳子在铅垂线的两侧，与铅垂线的夹角分别为 30° 、 60° （如图 1-1-7），求重物平衡时，两根绳子拉力的大小。

分析：本题实质上是一个力的分解问题。因此，可利用向

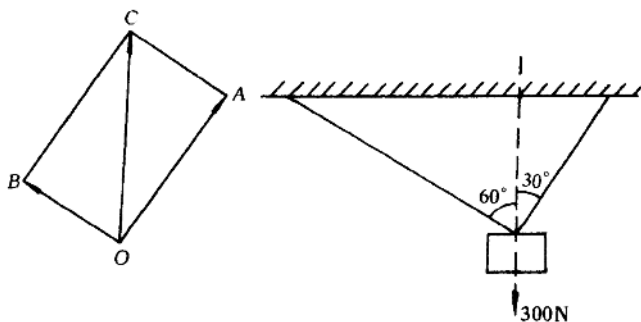


图 1-1-7

量加法的平行四边形法则加以求解。

解：作 $\square OACB$ ，使 $\angle AOC = 30^\circ$ ， $\angle BOC = 60^\circ$ ，则在 $\triangle OAC$ 中， $\angle ACO = 60^\circ$ ， $\angle OAC = 90^\circ$ 。

$$\therefore |\vec{OA}| = |\vec{OC}| \cos 30^\circ = 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}(\text{N});$$

$$|\vec{AC}| = |\vec{OC}| \sin 30^\circ = 300 \times \frac{1}{2} = 150(\text{N});$$

$$|\vec{OB}| = |\vec{AC}| = 150(\text{N}).$$

答：与铅垂线成 30° 角的绳子的拉力是 $150\sqrt{3}\text{N}$ 。与铅垂线成 60° 角的绳子的拉力是 150N 。

例 7 在水流速度为 $4\sqrt{3}\text{km/h}$ 的河中，如果要使船以 12km/h 的实际航速与河岸成直角地行驶，求船的航行速度的大小与方向。

解：如图 1-1-8，设 \vec{AB} 表示水流速度， \vec{AD} 表示船的航行速度， \vec{AC} 表示船实际航行的速度。连接 BC ，作 $AD \parallel BC$ ，

则 \overrightarrow{AD} 为所求的船的航速, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{3}, |\overrightarrow{AC}| = 12,$$

$$\tan \angle ACB = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ = \angle CAD,$$

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 8\sqrt{3},$$

$$\angle BAD = 120^\circ.$$

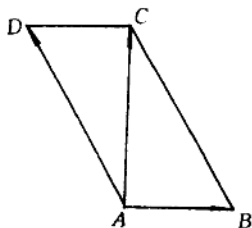


图 1-1-8

答: 船的航行速度的大小为 $8\sqrt{3}$ km/h, 方向与流速所成角为 120° .

[导评] 要善于把实际问题抽象成数学问题, 画出示意图便于求解.

习 题 一

1. 选择题

(1) 在下列说法中, 不正确的是().

(A) 向量 \overrightarrow{AB} 的长度与向量 \overrightarrow{BA} 的长度相等

(B) 任何一个非零向量都可以平行移动

(C) 长度不相等而方向相反的两个向量一定是共线向量

(D) 两个有共同起点且共线的向量, 其终点必相同

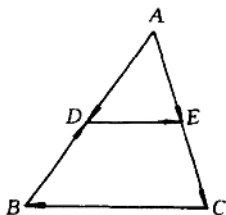
(2) 如果 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 则下列向量组中含有相等向量的是().

(A) \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{CB}

(B) \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{CD} 、 \overrightarrow{DE}

(C) \overrightarrow{FE} 、 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{CB} (D) \overrightarrow{AF} 、 \overrightarrow{BA} 、 \overrightarrow{DE}

(3) 如图, 已知 $DE \parallel BC$, 则下列结论中正确的是().

(A) \overrightarrow{BA} 和 \overrightarrow{CA} 共线(B) \overrightarrow{CB} 和 \overrightarrow{BA} 共线(C) \overrightarrow{CB} 和 \overrightarrow{DE} 共线(D) \overrightarrow{CB} 和 \overrightarrow{CA} 共线

第 1(3) 题图

(4) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$ 等于().

(A) \overrightarrow{AB} (B) \overrightarrow{BC} (C) \overrightarrow{CD} (D) \overrightarrow{BA}

(5) 设 b 是 a 的反向量, 则下列说法中错误的是().

(A) a 与 b 的长度必相等(B) $a \parallel b$ (C) a 与 b 一定不相等(D) a 是 b 的反向量

(6) a 、 b 为非零向量, 且 $|a + b| = |a| + |b|$, 则().

(A) $a \parallel b$ 且 a 、 b 方向相同(B) $a = b$ (C) $a = -b$

(D) 以上都不对

(7) 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, 则().

(A) $ABCD$ 是矩形(B) $ABCD$ 是菱形(C) $ABCD$ 是正方形