教育部高职高专规划教材

高等数学与经济数学

阎章杭 程传蕊 张 荣 主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学与经济数学

阎章杭　程传蕊　张　荣　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北　京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与经济数学/阎章杭，程传蕊，张荣主编.
北京：化学工业出版社，2003.7
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-4496-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.①阎…　②程…　③张…　Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学院-教材②经济数学-高等学校：技术学院-教材　Ⅳ.①O13②F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 042843 号

教育部高职高专规划教材

高等数学与经济数学

阎章杭　程传蕊　张　荣　主编

责任编辑：高　钰

文字编辑：刘志茹

责任校对：李　林

封面设计：郑小红

*

化学工业出版社
教材出版中心
出版发行

（北京市朝阳区惠新里3号　邮政编码 100029）

发行电话：(010) 64982530、

http://www.cip.com.cn

新华书店北京发行所经销

化学工业出版社印刷厂印刷

三河市宇新装订厂装订

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16　印张 18¾　字数 506 千字

2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4496-8/G·1196

定　价：28.00 元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇．目前公开出版发行的高职高专数学教材，大多数内容偏多、偏深、所用的学时数也较多，教材形式比较单一，与当前高等职业教育院校的教学现状有较大的差距，这样不利于高职高专的教育发展．为了改变这一现状，进一步推动全国的高职高专教材的改革，在教育部高职高专规划教材专家组关怀和指导下，开封大学、河南大学、洛阳大学、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、无锡职业技术学院、河北科技大学理学院、合肥学院、厦门鹭江职业大学、三门峡职业技术学院等院校的优秀教师和专家，经过长时间的酝酿和研究，编写了一套面向21世纪比较符合当前高职高专院校教学实体的教材．《高等数学与经济数学》和配套的习题课指导教材．

本教材主要内容包括：预备知识、一元函数微积分、概率论与数理统计基础、线性代数初步应用．

与本教材配套有《高等数学与经济数学习题课指导》，其主要内容包括：每章内容小结、常见问题的分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测验、往届试卷等．

本教材所用的学时数约为90～140学时左右，比较贴近各学校经济类专业的教学实际．

在该教材的编写中，以教育部关于三年制高职高专教育的教学大纲为重要依据（但并没有严格地按此大纲，不少地方作了必要调整）来组织教学内容的编写，同时又结合当前高等职业教育发展趋势及学校自身的状况，力争使教材更具有科学性、基础性和使用性．

本教材充分吸收了当前我国现有的高职高专经济类数学教材的长处，密切结合当前教学改革的实际，编出具有自身特色的高水平的高职高专教材，具体反映如下．

1．依据《高职高专数学课程的基本要求》的内容，该教材满足了高职高专经济类各专业对数学课程的要求．

2．努力贯彻“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则，结合高职高专教学特点，淡化数学理论．对一些较繁琐的定理、公式及明显的结论，或者只给出结果，或者以几何直观予以说明．

3．所选的例题和习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删掉单纯性的技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性、为经济类专业服务的题目．

4．本教材注意根据高职高专经济类各专业的特点，设定多种教学内容的模块，模块的内容均比较精炼，所用的学时数少，可供经济类所有不同专业，不同类别学生选学不同的模块内容．在内容的编排上力求突破传统教材体系，“精选内容、主次分明、删减枝节、注重使用、讲究实效”，其表现如下．

（1）考虑到高职学生、成教学生基础知识薄弱，本教材专门增设第一章预备知识：初等数学提要及重要公式，为后续高等数学的学习打下较好的基础．

（2）在除第一篇外的每篇开头，都有一个短小精致的“引子”用于激发学生学习有关数学知识的兴趣．另外，针对学生容易出现的问题，本书还刻意用符号$\boxed{?}$，$\boxed{!}$提出思考问题或

指出问题的原因，帮助学生正确理解有关知识，提高学习效果．另外考虑到在学时上各个学校有差异，不同的专业有差异，故增大了选修的内容，以满足不同学校，不同专业的需求．

(3) 为使该教材更具有使用性和前瞻性，并考虑到计算机已经越来越普及以及 Mathematica 软件的广泛使用，本书以数学实验的形式，将 Mathematic 软件的应用穿插到有关的章节中去，以供有条件的学校选学．

本套教材由阎章杭总策划并负责组织实施．本套教材的副主编为：马幼梅、郭建萍、毛珍玲、黄士林．其中本册教材由阎章杭、程传蕊、张荣任主编．

参加每一篇编审人员有（按章节顺序排列）

第一篇与第二篇　普丰山　马幼梅　张　荣　李媛媛　拜云胜　毛珍玲　黄士林
郭建萍　敦冬梅　张明虎

第三篇　程传蕊　张　荣　刘青桂　白景华　阎章杭

第四篇　路世英　辛自立　杨建法　白景华　杨　明

在本书编写过程中，曾得到有关学校的领导、系领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏和杨菲老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验内容的编写和审核，河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书应用部分进行了认真审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正．

《高等数学与经济数学》教材编委会

2003 年 3 月

目　录

第一篇　预备知识

第二篇　一元函数微积分

* 为选学内容

第一篇　预备知识

*第一章　初等数学提要及重要公式

第一节　初等代数

一、实数

1. 实数的基本概念

每一个有理数都可以用分数形式$\frac{p}{q}$来表示，其中 p，q 为既约整数，且 $q \neq 0$. 也可用有限十进制小数或无限十进制循环小数来表示. 它包括正负整数、正负分数及零. 凡是不能写成$\frac{p}{q}$这一形式的数叫无理数，无理数是十进制不循环小数，如：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，1.61718…，等. 有理数和无理数的全体构成实数.

实数按以下方法分类，形成实数表：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

2. 数轴与实数

如果在一条直线上确定一点为原点，指定一方向为正方向，并规定一个单位长度，则称这样的直线为**数轴**.

($\boxed{!}$数轴上任意两点之间一定有无数个点.)

建立了数轴以后，实数与数轴上的点就建立起了一一对应关系，即任一实数都对应数轴上惟一的点，反过来，数轴上每一点也惟一地代表某实数. 而且原点右边的点表示正数，原点左边的点表示负数，原点表示零. 正是由于全体实数与数轴上的点的一一对应关系，在以后，可以把实数与数轴上的点看作一回事.

3. 绝对值

数轴上的点 a 到原点的距离叫做实数a 的绝对值，记作$|a|$.

由于距离的非负性，所以实数的绝对值都是非负数. 正数的绝对值是其本身，负数的绝

对值是其相反数，零的绝对值是零．即

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0\\ 0, & a=0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

绝对值具有以下性质．

任何实数都不大于它的绝对值，且不小于它的绝对值的相反数，即 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$．([?]何时取等号?)

两个实数乘积的绝对值等于两个实数绝对值的乘积，即 $|ab|=|a||b|$．

两个实数商的绝对值等于绝对值的商，即 $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，其中 $b\neq0$．

两个实数和的绝对值不大于两个实数绝对值之和，即 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

两个实数差的绝对值不小于两个实数绝对值之差，即 $|a-b|\geqslant|a|-|b|$ ([?]何时取等号?)

例 1　去掉下式绝对值符号 $|x-1|-|x+2|$．

分析　该式是两个绝对值之差，去绝对值符号时，应先找出零点，然后分段讨论 ([!]绝对值多项式运算应分段讨论)．

解　当 $x<-2$ 时，$x-1<0$，$x+2<0$

则 $$|x-1|-|x+2|=-(x-1)-[-(x+2)]=-x+1+x+2=3$$

当 $-2\leqslant x<1$ 时，$x-1<0$，$x+2\geqslant0$

则 $$|x-1|-|x+2|=-(x-1)-(x+2)=-2x-1$$

当 $x\geqslant1$ 时，$x-1\geqslant0$，$x+2>0$

则 $$|x-1|-|x+2|=x-1-(x+2)=-3$$

因此 $$|x-1|-|x+2|=\begin{cases}3, & x<-2\\ -2x-1, & -2\leqslant x<1\\ -3, & x\geqslant1\end{cases}$$

二、一元二次方程

1．因式分解法

因式分解法是求解一元二次方程的常用方法．其步骤是：将一元二次方程变形为右边是 0，而左边是两个一次因式乘积的形式．然后令每个一次因式等于 0，得到两个一元一次方程．最后解这两个一元一次方程 ([!]分解因式常采用十字相乘法)，从而得到原方程的解．

例 2　用因式分解法解方程　$x^2-5x+5=1$．

解　移项，将原方程变形为 $x^2-5x+4=0$ 将左端分解因式得 $(x-4)(x-1)=0$

即 $x-4=0$ 或 $x-1=0$　从而得原方程的两个根 $x_1=4$，$x_2=1$．

2．一元二次方程的求根公式

① 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根．([!] $\Delta=b^2-4ac$ 为一元二次方程根的判别式．)

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

② 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根，$x=-\dfrac{b}{2a}$．

③ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

例 3 当 m 在什么范围内取值时，一元二次方程 $x^2+2(m-1)x+3m^2-11=0$

① 有实数根？ ② 没有实数根？

分析 运用一元二次方程的判别式进行求解.

解 一元二次方程 $x^2+2(m-1)x+3m^2-11=0$ 的判别式 $\Delta=[2(m-1)]^2-4\times1\times(3m^2-11)=-8(m+3)(m-2)$

① 当 $\Delta\geqslant0$，即 $-8(m+3)(m-2)\geqslant0$，$-3\leqslant m\leqslant2$ 时，方程有实数根；

② 当 $\Delta<0$，即 $-8(m+3)(m-2)<0$，$m<-3$ 或 $m>2$ 时，方程没有实数根.

三、指数与对数

1. 指数运算主要公式

① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $(a^m)^n=a^{m\times n}$ ③ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

④ $(ab)^m=a^m b^m$ ⑤ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ⑥ $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

特别地 $a^0=1$，$a^1=a$

(!对于指数而言，要求底数 a 大于零且不等于 1.)

例 4 计算① $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{27}$；② $\sqrt[3]{\dfrac{3y}{x}}\times\sqrt{\dfrac{3x^2}{y}}$.

解 ① 原式 $=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=3^{\frac{4}{3}}$

② 原式 $=3^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}x^1y^{-\frac{1}{2}}$

$=3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}+1}y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{6}}$

2. 对数运算主要公式

① $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$ ② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^n=n\log_a M$ ④ $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

⑤ $a^{\log_a b}=b$ ⑥ $\log_a a^b=b$

⑦ $a^{\log_a N}=N$（对数恒等式）

值得一提的是，1 的对数为 0，即 $\log_a 1=0$. 底的对数为 1，即 $\log_a a=1$. 零和负数没有对数. 以 e 为底的对数叫做自然对数，记作 $\log_e N=\ln N$，其中 $e=2.718281828\cdots\cdots$，以 10 为底的对数叫做常用对数.

例 5 求值 $\lg\dfrac{300}{7}+\lg\dfrac{700}{3}+\lg100$.

解 原式 $=\lg300-\lg7+\lg700-\lg3+\lg100$

$=\lg3+\lg100-\lg7+\lg7+\lg100-\lg3+\lg100$

$=3\lg100=3\lg10^2=3\times2=6$.

例 6 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$.

分析 本题主要考察指、对数互化及对数性质和运算公式，换底公式.

解 因 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，则 $\log_{18}5=b$

于是 $\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}(9\times5)}{\log_{18}(18\times2)}=\dfrac{\log_{18}9+\log_{18}5}{1+\log_{18}2}=\dfrac{a+b}{1+\log_{18}\dfrac{18}{9}}=\dfrac{a+b}{2-a}$.

例 7　某工厂转换机制，在两年内生产的月增长率都是 a，问这两年内第二年某月比第一年相应月的产值的增长率是多少？

分析　本题主要考察增长率公式$y=N(1+P)^x$．

解　不妨设去年 2 月份的产值是 b，则三月份的产值是 $b(1+a)$，4 月份的产值是 $b(1+a)^2$，以此类推，到今年 2 月份是去年 2 月份后的第十二个月，即一个时间间隔是一个月，而这里跨过了十二个月，故今年 2 月份的产值是 $b(1+a)^{12}$，又由增长率的概念知，这两年内的第二年某月比第一年相应月的产值的增长率为$\dfrac{b(1+a)^{12}-b}{b}=(1+a)^{12}-1$.

四、不等式

1．一元一次不等式

含有一个未知数，并且未知数的最高次幂是一次的不等式叫做一元一次不等式，形如：

$$ax+b>0 \text{ 或 } ax+b<0(a\neq0).$$

对于一元一次不等式，$ax+b>0$，经过同解变形可化为　$ax>-b(a\neq0)$.

若 $a>0$，则它的解集是 $\left\{x\,|\,x>-\dfrac{b}{a}\right\}$；

若 $a<0$，则它的解集是 $\left\{x\,|\,x<-\dfrac{b}{a}\right\}$.

(!解不等式时常因不注意等价变形或者因忽略式子的符号而出错.)

例 8　某工厂生产同一类产品，每月固定成本是 12 万元，每件产品变动成本是 20 元，而单价是 50 元．如果每月要求获得的最低利润是 2 万元，问每月至少要销售多少件？

解　设每月至少销售产品 x 件，则总收入至少为 $50x$ 元，总可变动成本是 $20x$ 元，工厂每月的利润是　$50x-20x-120000=30x-120000$

依题意，x 应满足不等式　$30x-120000\geqslant20000$

解此不等式得 $x\geqslant\dfrac{140000}{30}\approx4667$（件）

即每月至少销售 4667 件，才能获得最低利润 2 万元．

2．一元二次不等式

含有一个未知数，并且未知数的最高次幂是二次的不等式叫做一元二次不等式．它的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0(a\neq0)$$

一元二次不等式的解法通常采用数轴标根法．下面讨论 $a>0$ 时．$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ 的解法．

首先将不等式的左端分解为两个一次因式的乘积，将每一个一次因式的根由小到大地标在数轴上，根据 a 的符号，画出通过一次因式根点的二次曲线示意图．则不等式$ax^2+bx+c>0$ 的解集就找曲线在 x 轴上方部分对应的区间，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集就找曲线在 x 轴下方部分对应的区间．

例 9　求不等式 $x^2-x-12>0$ 的解．

解　原不等式可化为$(x-4)(x+3)>0$

所以 $x=4$，$x=-3$ 为方程 $(x-4)(x+3)=0$ 的两个根，依次标在数轴上，x 轴上方区间为 $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$；

即原不等式 $x^2-x-12>0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(4,+\infty)$（如图 1-1）.

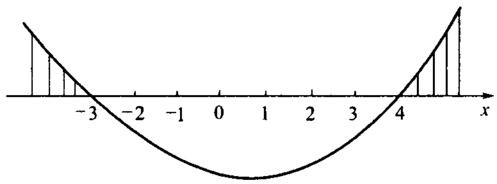

图 1-1 求根法示意

一元二次不等式也可与一元二次方程结合在一起，讨论它的解法（见表 1-1）.

表 1-1 一元二次不等式求解

不等式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	有两个不等实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\frac{b}{2a}$ 的全体实数	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

例 10 国家收购某种农产品的价格为每吨 120 元，其中征税标准为每 100 元征收 8 元（称税率为 8 个百分点），计划可收购 a 万吨. 为减轻农民负担，决定税率降低 x 个百分点，预计收购量可增加 $2x$ 个百分点，要使此项税收在税率调整后不低于原计划的 78%，试确定 x 的范围.

解 调整后的税率为 $(8-x)\%$，调整税率后可收购农产品为 $a(1+2x\%)$ 万吨，总价值为 $120a(1+2x\%)$ 万元. 于是 $120a(1+2x\%)(8-x)\%\geqslant 120a\times8\%\times78\%$.

整理得 $x^2+42x-88\leqslant0$ $(0<x\leqslant8)$，即 $0<x\leqslant2$

故 x 的取值范围是 $0<x\leqslant2$.

五、集合

1. 集合的定义

把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体就叫做一个**集合**. 集合中的每个对象叫做该集合的**元素**，元素与集合之间是从属关系. 若元素 a 属于 A，记作 $a\in A$. 若元素 a 不属于 A. 记作 $a\notin A$.

2. 集合的表示法

① **列举法** 把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内.

（[!]列举法表示集合时，元素表示清楚，但有局限.）

② **描述法** 用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合，如{高三二班的全体学生}.

（[!]描述法表示集合时简洁明了，应用较广.）

3. 集合之间的关系

① **子集** 若 $x\in A\Rightarrow x\in B$. 称集合 A 是集合 B 的子集. 记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）；当 A 不包含于 B 时，记作 $A\nsubseteq B$（或 $B\nsupseteq A$）.

② **集合的相等** 当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，称集合 A 等于集合 B. 记作 $A=B$.

③ **真子集** $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，称集合 A 是集合 B 的真子集. 记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$），也就是说，首先 A 是 B 的子集，但在 B 中至少存在一个元素不属于 A.

④ **全集** 如果某集合含有所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就称作全集，通常用 Ω 表示.

例 11　已知$A=\{2,3\}$，$M=\{2,5,a^2-3a+5\}$，$N=\{3,a^2-6a+10\}$，若 $A\subseteq M$，且 $A\subseteq N$．求 a 的值．

分析　根据子集的定义求解．

解　因 $A\subseteq M$，$A\subseteq N$．

则
$$\begin{cases}a^2-3a+5=3\\a^2-6a+10=2\end{cases}$$

解得　$a=2$．

例 12　若$(a, x)\in\mathbf{R}$．$A=\{3,x^2+ax+a\}$.$B=\{x^2+(a+1)x-3,1\}$．求使 $A=B$ 的a，x 的值．

分析　由集合相等的定义求解．

解　因为 $A=B$，所以$\begin{cases}x^2+ax+a=1\\x^2+(a+1)x-3=3\end{cases}$

解得
$$\begin{cases}a=-2\\x=3\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a=-6\\x=-1\end{cases}$$

4．集合的运算

① **交集**　对于两个给定的集合 A、B．由属于 A 又属于B 的所有元素构成的集合叫做 A、B 的交集．记作 $A\cap B$．由以上定义知：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ 且 x\in B\}$$

② **并集**　对于两个给定的集合 A、B，把它们所有的元素并在一起构成的集合叫做 A 与B 的并集，记作 $A\cup B$．由以上定义知$A\cup B=\{x\mid x\in A\ 或 x\in B\}$

(!注意理解交集中的“且”字与并集中的“或”字的含义.)

以上两种关系用文氏图表示为图 1-2 和图 1-3.

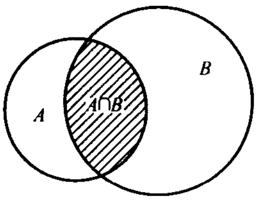

图 1-2　$A\cap B$ 示意

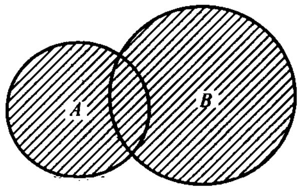

图 1-3　$A\cup B$ 示意

由集合并、交运算的定义，可以推出以下关系式：

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，

$A\cap B\subseteq A\cup B$．

如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$．

对于任意集合 A，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap\Omega=A$，$A\cap A=A$．

③ **差集**　设 A、B 是两个集合，属于 A 而不属于B 的所有元素组成的集合叫做A 与B 的差集，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\ 且 x\notin B\}.$$

④ **补集**　设 Ω 为全集，$A\subseteq\Omega$，由 Ω 中所有不属于A 的元素组成的集合叫做A 的补集．记作 CsA（或 $\bar{A}$）．即 $CsA=\{x\mid x\in\Omega$,且 $x\notin A\}$．

补集可以看作全集 Ω 与集合 A 的差集. $CsA=\Omega-A$.

差集 $A-B$，补集 $CsA(\bar{A})$的文氏图，如图 1-4 和图 1-5 所示.

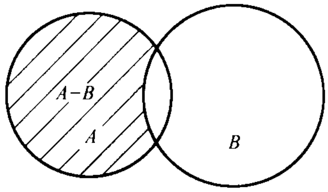

图 1-4　$A-B$ 示意

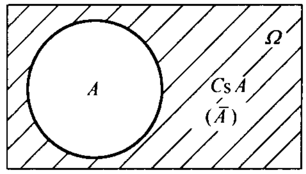

图 1-5　CsA（$\bar{A}$）示意

由差集、补集定义，可以推出以下关系式：

$$A-B\subseteq A \quad A-B=A\cap CsB \quad A\cup CsA=\Omega \quad A\cap CsA=\varnothing.$$

集合的并、交、差、补运算具有以下运算律：

① 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

② 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③ 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

④ 吸收律　$(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A$.

例 13　若集合$P=\{1,2,3,m\}$，$Q=\{m^2,3\}$. 满足 $P\cup Q=P$. 求 m 的值.

分析　由并集的概念及集合元素的性质求解.

解　因 $P\cup Q=P$　则 $Q\subseteq P$，$m^2=1$ 或 $m^2=2$ 或 $m^2=m$. 得 $m=\pm1$ 或 $m=\pm\sqrt{2}$ 或 $m=0$ 或 $m=3$.

由集合元素的互异性，得 $m=-1$，$\pm\sqrt{2}$，0.

六、区间与邻域

1. 开区间

设 R 为实数集合，且 $a<b$，将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数x 的集合叫做以a，b 为端点的开区间，记作$(a,\ b)$，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

在数轴上表示，以 a，b 为端点，但不包含端点 a 和b 的线段（如图 1-6).

2. 闭区间

将满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合叫做以 a,b 为端点的闭区间,记作$[a,b]$.即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

在数轴上表示，以 a，b 为端点且包含端点a 和b 的线段（如图 1-7).

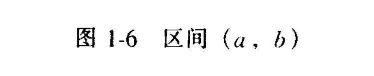

图 1-6　区间（a，b）

图 1-7　区间 [a，b]

3. 半开半闭区间

将满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，叫做以 a，b 为端点的半开半闭区间. 记作$(a,b]$或$[a,b)$.即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

在数轴上，$(a,b]$表示以 a，b 为端点且包含右端点而不包含左端点的线段．$[a,b)$表示以 a，b 为端点，包含左端点而不包含右端点的线段（如图 1-8 和图 1-9）．

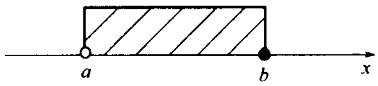

图 1-8 区间 $(a, b]$

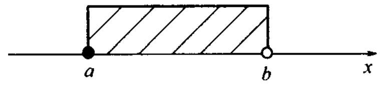

图 1-9 区间 $[a, b)$

4．除上述三种有限区间外，还有以下五种无穷区间．（！无穷区间不能求长度！）

① $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，表示满足不等式 $x>a$ 的全体实数．在数轴上表示以 a 为左端点，但不包含 a 的一条射线（如图 1-10）．

② $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$．表示满足不等式 $x\geqslant a$ 的全体实数．在数轴上表示以 a 为左端点且包含 a 的一条射线（如图 1-11）．

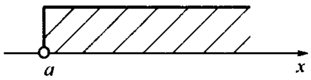

图 1-10 区间$(a,+\infty)$

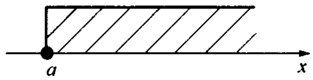

图 1-11 区间$[a,+\infty)$

③ $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$表示满足不等式 $x<a$ 的全体实数．在数轴上表示以 a 为右端点，但不包含 a 的一条射线（如图 1-12）．

④ $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a\}$，表示满足不等式 $x\leqslant a$ 的全体实数．在数轴上表示以 a 为右端点且包含 a 的一条射线，如图 1-13．

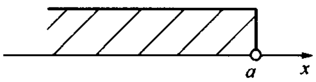

图 1-12 区间$(-\infty,a)$

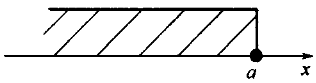

图 1-13 区间$(-\infty,a]$

⑤ $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数．对应于整个数轴．其中"$+\infty$"读作"正无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"．

5．邻域的概念

所谓 x_0 的 δ 邻域是指以 x_0 为中心，以 δ 为半径的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$．也就是说 x_0 和 δ 为两个实数，其中 $\delta>0$，则满足不等式$|x-x_0|<\delta$ 的全体实数称为 x_0 的 δ 邻域．点 x_0 称为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径．其中 δ 是个很小的正数，邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$的长度是 2δ．在数轴上表示如图 1-14所示．

$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$分别叫做点 x_0 的左邻域和右邻域．$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$叫做点 x_0 的去心邻域．邻域及去心邻域的概念，在以后求函数极限时有较为广泛的应用．

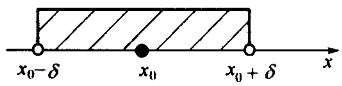

图 1-14 邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$

例 14 用区间表示下列不等式的所有 x 的集合：① $|x-a|<\varepsilon$（a 为常数，$\varepsilon>0$）；② $|x-2|\geqslant 1$．

解 ① 去绝对值，得 $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$

$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$．用区间表示为开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$