

新概念学科竞赛完全设计

XINGAINIANXUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

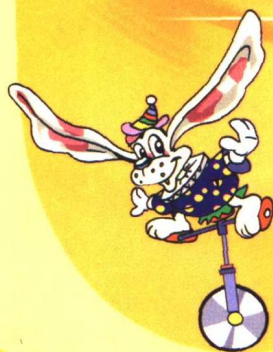
奥赛急先锋

ABC卷

一个挑战自己的对手

一个丰富知识的朋友

一个出类拔萃的理由



初中三年级

数 字

新概念学科竞赛完全设计

XINGAINIANXUEKEJINGSAIWANQUANSHEJI

奥赛急先锋

ABC卷



丛书主编：师 达
本书主编：刘汉文
编 者：刘国祥
陈美焕
叶茂盛
艾素学
陈杰志

王定成
王定成
邹世学
常青秀
郝 思
陈美丽

刘国祥
程志慈
石 松
常峥嵘
尹超人
秦 耕

初三数学

中国少年儿童出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

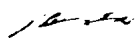
奥赛急先锋题库丛书. 初中三年级: 奥赛急先锋 ABC
卷/师达主编. —北京: 中国少年儿童出版社, 2003.4
ISBN 7—5007—6546—0

I. 奥... II. 师... III. 课程—初中—习题
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 026900 号

奥 赛 急 先 锋 ABC 卷

初三数学

 出版发行: 中国少年儿童出版社
出 版 人: 

主 编: 师 达	封面设计: 徐 徐
责任编辑: 惠 玮	版式设计: 徐 徐
责任校对: 刘 新	责任印务: 栾永生

社 址: 北京东四十二条二十一号	邮政编码: 100708
电 话: 010-64032266	咨询电话: 010-65023925

印 刷: 丹东印刷有限责任公司	经 销: 全国新华书店
-----------------	-------------

开 本: 787×1092 1/16 印 张: 15.25 印张 字 数: 351 千字
2003 年 5 月北京第 1 版 . 2003 年 7 月丹东第 1 次印刷

ISBN 7-5007-6546-0/G · 5092

语、数、英、物、化、生 (全六册) 总定价: 91.00 元

图书若有印装问题, 请随时向本社出版科退换
版权所有, 侵权必究。

使用说明

暨前言

“奥赛急先锋”是我们的一套品牌书系，自2002年投放市场以来，深受读者欢迎。应读者要求，我们对原来的“奥赛急先锋”丛书进行了全面的修订和完善，并在此基础上，又增加了“奥赛急先锋题库”和“奥赛急先锋ABC卷”两套同主题精品书，现在我们的“奥赛”已经形成一个不小的家族了。

为了引导读者更好地选择和使用这套精品图书，还是让我们先从奥林匹克说起。

国际数学奥林匹克（International Mathematical Olympiad 简称IMO），是一种国际性的以中学数学为内容，以中学生为参赛对象的竞赛活动。第一届国际数学奥林匹克于1959年夏天在罗马尼亚举行。我国的数学竞赛活动始于1956年，当时在著名数学大师华罗庚教授的亲自参与并指导下，在北京、上海、天津、武汉四大城市举办了我国第一届数学竞赛。1985年我国首次正式派代表参加国际奥林匹克数学竞赛，并取得骄人的成绩。

经过40多年的发展，奥林匹克竞赛活动已经远远超出了一门学科竞赛的意义，它已在竞赛的基础上形成了自己特有的人才培养模式；形成了自己特有的教材、辅导书系列，形成了一套完整的竞赛考试、评估机制。而它的培养和评估机制，不仅对于各种门类的学科竞赛，并且对于我们的课堂教授、教材制订都有着极大的参考价值。

奥林匹克教材及辅导图书相对于现行的课内教材而言，最大的优势就在于——

○它承认并适应学生的个体差异，在培养个人特长、开发个人潜能、造就拔尖人才方面具有独特的功能。

更为可喜的是，数学学科的竞赛活动影响并带动了物理学、化学、生物学、计算机学、俄语、英语等学科的竞赛活动，培养了大批有个性有天赋的学生。

我们研究竞赛的意义在哪里？

1. 用精英的标准要求自己，是成为精英的开始。

竞赛是精英选拔的重要方式，特别是奥林匹克这样的具有强大号召力的大型比赛，更是集中了精英的智慧，它所采用的评判体系、评判标准，对于我们新的人才培养和选拔机制的形成都具有巨大的引导作用和前瞻性。新时代的人才需要用新时代的标准去评判，要能适应新时代的严格选拔，就必须从小就开始高标准严要求。

2. 棋高一着，先行一步掌握中、高考新题型。

竞赛题的魅力在于“难”。“难”题是最具挑战力的、也是让学生最具成就感的。但“难题”的意义绝不止于此。“难题”，一种是指综合性强的题，另一种是指与实际联系比较密切、应用性强的题。而这两类题，正是近年素质教育中强调的最新的命题趋势，在中、高考命题中的比例也逐年增加。解析综合性强的题需要使用多个概念、规律，需要

把学过的知识有机地联系在一起,有时还需要用到其他学科的知识进行整合。解析实际应用型的题,需要分析研究实际问题,从大量事实中找出事物的遵循规律,光靠对知识的死记硬背是不行的。征服了这两类难题,对于中、高考命题中出现的新题、难题,自然可以棋高一着,应对自如了。

3、知识与能力并重,积累与探究互进,不仅“学会”,而且“会学”。

竞赛是源于课堂而高于课堂的,所以要能应对自如地解答竞赛题,就须正确处理知识积累与能力培养、打好基础与研究难题的关系。知识的占有是能力形成的基础,掌握知识的速度与质量依赖于能力的发展。只有打好坚实的基础,才会具有研究难题、探究未知的能力。所以,竞赛要求学生的品质,不仅是“学会”,更重要的是“会学”,也就是我们一直在提的研究性学习。

4、课后加餐,课内加分;自学的成功,在课堂学习中得到检验。

对于学生来说,课后的练习和自学的成功,如果能够在课堂学习和课内测试中得到验证,是最具说服力的,也是真正让学生在奥赛的先进命题理念和训练方式中受益的表现。真正熟练并理解了竞赛题的命题方式和解题技巧,学生必然能在平时的基础课堂学习和考查中得心应手,游刃有余,获得充分信心的同时,增强学习的兴趣和动力。只有高于课堂,才是最终征服课堂的不二法宝。

所以,我们集成了

近年国内外竞赛和中高考的优秀试题;

并且对这一批优秀试题的解题思路、方法进行了总结归纳,给出全新的解题方略。

为了恰当处理竞赛和课堂学习的关系。本书作者认真研究了最新的中小学教学大纲和考纲,参照各版本的中小学教材,在知识层面上,进行了严格的年级设计,对应课堂教学进行针对性训练和提高;在能力层面上,遵循竞赛规则,帮助学生真正实现内在能力的强化,不仅自如应对各类升学考试,而且能够在学科竞赛中取得名次,获得全面的自信提升!

正是因为“奥赛急先锋”丛书在体例设计和内容编写上的高起点、新视角和实效确凿,这套书自2002年推出伊始便好评如潮,读者纷纷反映受益非浅。结合读者和市场的反馈,我们在修订和完善原套系的同时,还推出了全新的姊妹套系《奥赛急先锋题库》和《奥赛急先锋ABC卷》。这三套书在内容上互为补充,在功能上互相促进。

○从基础做起,内强筋骨,稳扎稳打。

《奥赛急先锋——新概念学科竞赛完全设计》

从各科各阶段的知识要点出发,理清重点知识及运用,在此基础上给出范例剖析,

着重进行思路分析。每章节配有典型练习题，都是优秀竞赛题和精选的中高考试题。

○ **最丰富、最具针对性、个性化的训练方案，会做题还会选择，真正让学生聪明起来！**

《奥赛急先锋 ABC 卷》

课后训练的目的，除了巩固知识，更重要的是帮助学生了解自身水平，并给出针对性的解决方案。

本套丛书以知识要点分列章节，每章节提炼黄金讲解，随后给出 A、B、C 三个等级的测试卷，即基础级、提高级、综合能力级。每一级的测试都以试卷的形式给出，不同水平级的学生可以针对性地选择训练，同一学生在学习阶段也可以合理搭配使用，拥有属于自己的个性化方案。

○ **以解题法为纲领，从题库里选你所需要的，从答案里寻找你所不知道的。**

《奥赛急先锋题库》

以知识点划分章节，每章的设置放弃了同类习题书以知识条目分节的方式，而是从高度精炼和归纳而成的黄金解题法出发，讲解方法后，再集中给出试题来检验学生对方法的掌握。习题根据难度分为 A 级、B 级、C 级。与丰富的题量相比，答案更加丰富多彩，解析思路，解读命题方法，指导应试策略，全面而且精到。每章结束给出综合练习。可以说，《题库》是在大量的练习的基础上总结出的高明的方法论，也是方法论指导下的有目的训练，只有这样科学的出题和解析理念，才能帮助学生达到最高效的训练效果。

为了满足各年级学生在各个学科的知识积累和能力养成上的需求，这三套丛书分别进行了以下的学科配置：

《奥赛急先锋——新概念学科竞赛完全设计》

	语文	英语	数学	物理	化学	生物
初一		☺	☺			
初二		☺	☺	☺		
初三		☺	☺	☺	☺	
全一册	初中计算机信息工程 初中语文阅读			初中语文基础 初中语文写作		

《奥赛急先锋 ABC 卷》

	语文	英语	数学	物理	化学	生物
初一	☺	☺	☺			
初二	☺	☺	☺	☺		
初三	☺	☺	☺	☺	☺	
全一册	初中生物					

《奥赛急先锋题库》

	语文	英语	数学	物理	化学	生物
初一			☺			
初二			☺			
初三			☺			
全一册						

注：第一期计划先行推出数学，其他各科正在制作中

《奥赛》系列丛书由师达总体策划并担任丛书主编，由刘汉文、周向霖、金新等担任学科主编，由北京、浙江、江苏、湖北等重点中小学的奥赛教练及特、高级教师编写，尤其是湖北黄冈市教研室的著名老师们的加盟，更给了我们质量和信心的保证！

丛书推出，意味着我们的工作进入了新的阶段；我们希望听到的是读者的批评和建议，我们希望看到的是每一位读者的成功，我们希望做到的是全心全意为学生服务！

欢迎来函或致电与我们联系，不论是建议、咨询或是购书，我们都热忱地感谢您的关心和支持！

丑小鸭的故事

我是一只丑小鸭，一次偶然的机会，我知道了数学家张广厚。他小时成绩并不好，还留过级，但他勤勉好学，加上老师的提携、鼓励，最后在数学王国采到了丰硕的果实。自此，我心中的偶像出现了，他时刻浮现在我眼前，鼓励我成长，鞭策我进步……

小学四年级，我参加了长沙市小学生“华罗庚杯数学竞赛”，不小心获得一等奖。从此，数学这门学科成了我的最爱。五年级、六年级均参加“华杯赛”，且成绩越来越好。

到了初中，我加入了奥赛培训班。有一次课上，自认为老师讲得简单（其实老师是深入浅出教法，我不明白其中味），便中途“逃课”。结果，奥赛班考试我竟闯了“红灯”，这犹如当头棒，我懵了，其中有一道题，我记忆犹新。

已知： $x^2 - 4x + 1 = 0$ ，求 $x^8 + \frac{1}{x^8}$ 的值。

惭愧，我花了二十八分钟，居然没有作出来。

其实，此题并不难，由 $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 14$$

$$\therefore x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 194$$

$$\text{故 } x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2$$

$$\therefore x^8 + \frac{1}{x^8} = 37634$$

经历一番痛苦后，感谢老师的点拨，更感谢我的偶像张广厚，跌倒了爬起来，塞翁失马，焉如非福！于是我抖擞精神，一口气看了二次函数。一元二次方程、根的分布及一元二次不等式等相关书籍，并能将其举一反三，还得到了很多行之有效的结论。后来在初三数学联赛及祖冲之杯、华罗庚杯竞赛中我均获金牌。这些金光闪闪的荣誉让我高兴，使我激动，更使我谦虚、使我谨慎、使我学会与时俱进。

对于 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 均为实数 $a \neq 0$)

$f(x) = 0$ 即为一元二次方程，即函数与 x 轴的交点的横坐标，就是二次方程之解。

$f(x) > 0$ ($< 0, \geq 0, \leq 0$) 即为一元二次不等式，考虑开口方向，决定不等式的解。

二次函数的最大、最小值、对称轴及点坐标等，现将我的体会写出，供参考。

若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 均为实数， $a \neq 0$) 的两根为 x_1, x_2 ，

则有韦达定理： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$



变式 1. 以上方程中的两根的相反数为根构成的新方程是: _____

灵活运用韦达定理: $\because (-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$

$$(-x_1) \cdot (-x_2) = \frac{c}{a}$$

故新方程为: $x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

即 $ax^2 - bx + c = 0$ 即为所求。

观察发现: 二次项与常数项不变, 仅一次项系数为原来的相反数, 两方程的根互为相反数。

变式 2, 以方程: $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根的倒数为根的新方程为: _____

同上用韦达定理: $\because \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{a}{c}$$

故所求新方程为: $x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$

即: $cx^2 + bx + a = 0$

同理可知: 二次项与常数项系数交换, 一次项系数不变其两根互为倒数。

变式 3, 以原方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根的平方为根的新方程是: _____

$$\because x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

故, 所求的新方程为: $x^2 - \frac{b^2 - 2ac}{a^2}x + \frac{c^2}{a^2} = 0$

即: $a^2 x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$ 。

考察此方程的系数与原方程系数的关系,

为此, 以原方程的根的立方为根呢? n 次方为根呢? 仿此均可推出。

对 $ax^2 + bx + c = 0$ 和常数 k, k_1, k_2 , 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$

结论	充要条件
(1) 有根 $x_1 < x_2$, 满足: $x_2 < k$	$\Delta > 0$ 且 $af(k) > 0$ 且 $k > -\frac{b}{2a}$
(2) 有根 $x_1 < x_2$, 满足: $k < x_1$	$\Delta > 0$ 且 $af(k) > 0$ 且 $k < -\frac{b}{2a}$
(3) 有根 $x_1 < x_2$, 满足: $x_1 < k < x_2$	$af(k) < 0$
(4) $k_1 < k_2$ 有根 $x_1 < k_1, x_2 > k_2$	$af(k_1) < 0$ 且 $af(k_2) < 0$
(5) 有根 x_1, x_2 均在 (k_1, k_2) 内	$\Delta \geq 0$ 且 $af(k_1) > 0$ 且 $af(k_2) > 0$ 且 $k_1 < -\frac{b}{2a} < k_2$
(6) 根 x_1, x_2 有且仅有一个在 (k_1, k_2) 内	$f(k_1) \cdot f(k_2) < 0$

二次函数表达式还有三种形式: ①一般式: $f(x) = ax^2 + bx + c$

②零点式: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$\textcircled{3} \text{顶点式: } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

当我把这些心得交给奥赛指导老师看时, 我看到了老师信任、赞许的眼神, 然后诡秘地一笑, 并说你做这几道题。

1. 若有公式: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $2\sin \theta \cdot \cos \theta = \sin 2\theta$ 。

已知方程 $ax^2 + bx + a \sin \theta = 0$ 有两实根 α_1, α_2 ,

$ax^2 + bx + a \cos \theta = 0$ 有两实根 β_1, β_2

求当 $(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $\sin 2\theta =$ _____

2. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 方程 $f(x) - x = 0$ 的两个根 x_1, x_2

满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$ 。

(1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 证明 $x < f(x) < x_1$

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称, 证明 $x_0 < \frac{x_1}{2}$ 。(我问 $x \in (0, x_1)$

是什么意思, 老师说: $0 < x < x_1$)

3. 一道游题, 一位老师在黑板上写方程 $*x^2 + *x + * = 0$

第一位同学讲出任意三个数, 第二位同学将它们代入星号处, 如果方程有不同的有理根, 那么第一个人就赢了, 否则就是第二位同学赢。在此游戏中, 你保证能获胜吗?

因为第三题写在最后, 我观察了一会, 迅速说出了这道题的一个答案。我说, 我保证能胜利。理由是: 方程根的特征: “若方程中各项的系数和为 0 则 1 必为其一根, 若奇次项的系数和等于偶次项的系数和, 则 -1 必为其一根。” 这样答案便水到渠成, 若第一位同学这样一组不同的数 a, b, c 使 $a + b + c = 0$ 且 $a \neq c$ ($a \neq 0$), 那么他总会赢, 于是方程有根 $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ 。

我接着写第一题: 观察由韦达定理及方程根均定义:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \beta_1 + \beta_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \sin \theta \quad \beta_1 \cdot \beta_2 = \cos \theta$$

故有: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$

从而有: $\alpha_1 - \beta_1 = -(\alpha_2 - \beta_2)$

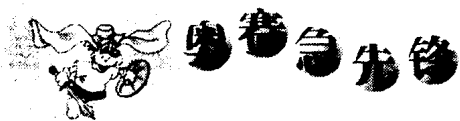
$$\alpha_1 - \beta_2 = -(\alpha_2 - \beta_1)$$

$$\begin{aligned} \text{故等式左} &= [(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)]^2 \\ &= [\alpha_1^2 - (\beta_1 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\beta_2]^2 \\ &= \left[\alpha_1^2 + \frac{b}{a}\alpha_1 + \cos \theta \right]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + a \sin \theta = 0$$

$$\therefore \alpha_1^2 + \frac{b}{a}\alpha_1 = -\sin \theta, \text{ 代入有:}$$

$$(\cos \theta - \sin \theta)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\therefore \sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{即为所求。}$$

我感叹自己的观察力，几乎不曾犹豫就完成了三分之二，我自豪。

第二题：构造函数 $F(x) = f(x) - x$ ，我利用方程的根和函数之间的关系来证明。

证明 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$

$\because x_1, x_2$ 是 $F(x) = 0$ 的两个根。

$$\therefore F(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

当 $x \in (0, x_1)$ 时， $\because x < x_1 < x_2$ ，又 $a > 0$ ， $\therefore F(x) > 0$

从而 $x < f(x)$ 。

$$\begin{aligned} \text{又 } x_1 - f(x) &= x_1 - [x + F(x)] \\ &= x_1 - x - a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= (x_1 - x)(1 + ax - ax_2) \end{aligned}$$

$$\because 0 < x < x_1 < x_2 < \frac{1}{a} \quad \therefore x_1 - x > 0$$

$$\text{且 } 1 + ax - ax_2 > 1 - ax_2 > 0$$

$$\therefore x_1 - f(x) > 0 \quad \text{即 } f(x) < x_1$$

综上所述，当 $x \in (0, x_1)$ 有 $x < f(x) < x_1$ 。

(2) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称，

$$\therefore 2x_0 = -\frac{b}{a}, \text{ 又由 } x_1, x_2 \text{ 是 } f(x) - x = 0 \text{ 的根。}$$

亦即是 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的根

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{1-b}{a} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a} > x_2 - \frac{b}{a}$$

$$\therefore 2x_0 = -\frac{b}{a} < x_1$$

$$\text{即 } x_0 < \frac{x_1}{2}$$

当我写完这些送给奥赛老师给我批改时，老师竖起大拇指夸我，还说，第二题是一道有难度的高考题，还表扬我的解法有创意，非常好，些时，自我崇敬之情油然而生。

这就是隆泽林，一个很有灵气的阳光男孩，相信他的未来金光闪闪。

目 录

测试卷 1	一元二次方程	(1)
测试卷 2	一元二次方程的根的判别式	(3)
测试卷 3	一元二次方程的根与系数的关系(1)	(5)
测试卷 4	一元二次方程的根与系数的关系(2)	(7)
测试卷 5	构造一元二次方程解题	(9)
测试卷 6	可化为一元二次方程的方程	(11)
测试卷 7	二次三项式的因式分解	(13)
测试卷 8	二次方程组	(15)
测试卷 9	有关方程(组)的应用题	(17)
测试卷 10	二次方程的整数解、有理数解(1)	(20)
测试卷 11	二次方程的整数解、有理数解(2)	(22)
测试卷 12	与二次方程有关的几何问题	(24)
测试卷 13	函数的基本知识	(26)
测试卷 14	一次函数	(29)
测试卷 15	二次函数	(32)
测试卷 16	反比例函数	(34)
测试卷 17	函数的应用(1)	(37)
测试卷 18	函数的应用(2)	(40)
测试卷 19	函数的最值(1)	(42)
测试卷 20	函数的最值(2)	(44)
测试卷 21	函数与方程	(46)
测试卷 22	函数与直线型	(48)
测试卷 23	统计初步知识	(51)
测试卷 24	解直角三角形(一)	(54)
测试卷 24	解直角三角形(二)	(57)
测试卷 26	圆的基本性质	(60)
测试卷 27	与圆有关的角	(64)
测试卷 28	直线与圆的位置关系	(67)
测试卷 29	与圆有关的比例线段	(70)
测试卷 30	圆与圆的位置关系	(73)
测试卷 31	圆内接四边形与四点共圆	(76)
测试卷 32	正多边形与圆	(79)
测试卷 33	三角法证(解)几何题	(82)



测试卷 34	三角形的重心与垂心	(84)
测试卷 35	三角形的内心与外心	(87)
测试卷 36	平面几何中的定值问题	(90)
测试卷 37	平面几何中的最值问题	(93)
测试卷 38	方程与几何	(96)
测试卷 39	函数与几何	(99)
测试卷 40	几何应用题	(103)
测试卷 41	反证法与构造法	(108)
测试卷 42	逆向思维与极端原理	(110)
竞赛模拟题一		(112)
竞赛模拟题二		(114)
竞赛模拟题三		(116)
竞赛模拟题四		(118)
竞赛模拟题五		(121)
参考答案与提示		(124)

测试卷1 一元二次方程

知识要点:一元二次方程的定义,一元二次方程的解法.

A 卷

- 已知 $2x^2 - 3xy + y^2 = 0 (xy \neq 0)$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 的值是 ()
 A. 2 或 $\frac{5}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. -2 或 $-\frac{5}{2}$
- 方程 $(2002x)^2 - 2001 \cdot 2003x - 1 = 0$ 的较大根为 r , 另一个方程 $x^2 + 2001x - 2002 = 0$ 的较小根为 s , 则 $r - s =$ _____.
- 已知实数 x, y 满足 $(x^2 + y^2)(x^2 - 1 + y^2) = 12$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为 _____.
- 给出如下三个方程:
 $x^2 - mx + m^2 - 19 = 0$, ①
 $x^2 - 5x + 6 = 0$, ②
 $x^2 + 2x - 8 = 0$. ③
 若方程①与②有公共根, ①与③无公共根, 则 $m =$ _____.
- 已知方程 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的一根为 a , 那么 $a + \frac{2}{a}$ 的值是 _____.

B 卷

- (2001年, TI杯竞赛题) 若 $x^2 + xy + y = 14$, $y^2 + xy + x = 28$, 则 $x + y$ 的值为 _____.
- (2002年, 全国初中联赛题) 满足 $(n^2 - n - 1)^{n+2} = 1$ 的整数 n 有 _____ 个.
- 已知关于 x 的方程 $x^2 + kx + k - 1 = 0$ 有一根小于零, 另一根大于 -1 且小于 2, 则 k 的取值范围是 _____.
- 若 a 是方程 $x^2 - 2003x + 1 = 0$ 的一个根, 那么 $a^2 - 2002a + \frac{2003}{a^2 + 1}$ 的值为 _____.
- 若自然数 a, b 满足 $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 < 0$, 设方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 的正根为 P , 方程



$ax^2 - bx - 399 = 0$ 的负根为 q , 则 pq 的值为_____.

11. 解关于 x 的方程: $(c + a - 2b)x^2 + (a + b - 2c)x + (b + c - 2a) = 0$.

C 卷

12. 求关于 x 的方程 $x^3 + (1 - a)x^2 - 2ax + a^2 = 0 (a > 0)$ 的解.

13. 已知关于 x 的方程 $kx^2 + (2k - 1)x + k - 1 = 0$ 只有整数根, 试确定整数 k 的值.

14. 当 $n = 1, 2, \dots, 2002$ 时, 关于 x 的一元二次方程 $n(n + 1)x^2 - (2n + 1)x + 1 = 0$ 的两根为 a_n, b_n . 试求 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{2002} - b_{2002}|$ 的值.

测试卷 2 一元二次方程的根的判别式

知识要点:一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 揭示了一元二次方程的根的情况与系数之间的密切关系.

A 卷

- 若关于 x 的方程 $x^2 - 2\sqrt{k}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 ()
 A. $k \geq 0$ B. $k > 0$ C. $k > -1$ D. $k \geq -1$
- 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且方程 $(c-b)x^2 + 2(b-a)x + a-b = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 不等边三角形
- 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与平方式 $M = (2ax_0 + b)^2$ 的关系是 ()
 A. $\Delta > M$ B. $\Delta = M$ C. $\Delta < M$ D. 不能确定
- (1996 年, 四川省竞赛题) 若方程 $x^2 - (a-3)x - 3a - b^2 = 0$ 有两个相等的实数根, 则方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根为 ()
 A. 0, -3 B. 0, 3 C. 1, 4 D. 1, -4
- 如果关于 x 的方程 $mx^2 - 2(m+2)x + m + 5 = 0$ 没有实数根, 那么关于 y 的方程 $(m-5)y^2 - 2(m+2)y + m = 0$ 的实数根的个数是 ()
 A. 2 B. 1 C. 0 D. 不确定
- 关于 x 的方程 $k^2x^2 + 2(k-1)x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

B 卷

- 若 a 和 b 是正实数, 且方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 和 $x^2 + 2bx + a = 0$ 各有实数根, 则 $a+b$ 的最小可能值为 ()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- (2002 年, 黄冈市初三竞赛题) 若三个方程 $x^2 - 4x + 2a - 3 = 0$, $x^2 - 6x + 3a + 12 = 0$, $x^2 +$



$3x - a + \frac{25}{4} = 0$ 中至少有一个方程有实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.

9. 已知 a 为实数, 且使关于 x 的二次方程 $x^2 + a^2x + a = 0$ 有实数根, 则该方程的根 x 所能取得的最大值是_____.
10. (1999 年, 浙江舟山市中考题) 已知关于 x 的方程① $x^2 - (1 - 2a)x + a^2 - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 且关于 x 的方程② $x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$ 没有实数根, 问 a 取什么整数时, 方程①有整数根?
11. (1996 年, 安徽省中考题) 已知 m, n 为整数, 关于 x 的三个方程: $x^2 + (7 - m)x + 3 + n = 0$ 有两个不相等的实数根; $x^2 + (4 + m)x + n + 6 = 0$ 有两个相等的实数根; $x^2 - (m - 4)x + n + 1 = 0$ 没有实数根. 求 m, n 的值.
12. 当 a, b 为何值时, 方程 $x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$ 有实数根?
13. (1999 年, 天津市竞赛题) 求方程 $5x^2 + 10y^2 - 12xy - 6x - 4y + 13 = 0$ 的实数解.

C 卷

14. (1998 年, 山东省竞赛题) 已知关于 x 的三个方程: $x^2 - x + m = 0$, $(m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$ 和 $(m - 2)x^2 + 2x - 1 = 0$. 若其中至少有两个方程有实数根, 求实数 m 的取值范围.
15. (2001 年, 黄冈市初三竞赛题) 若 a, b, c, d 都为正数, 证明: 在方程

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2a+b} \cdot x + \sqrt{cd} = 0; \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2a+c} \cdot x + \sqrt{da} = 0; \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2c+d} \cdot x + \sqrt{ab} = 0; \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2d+a} \cdot x + \sqrt{bc} = 0; \quad \text{④}$$

中, 至少有两个方程有不相等的实数根.