成人高考文科复习丛书

全国职工学生职大电大业大招生考试

数学复习题解

李兰田 主编

北京师范学院出版社

成人高考文科复习丛书

数学复习题解

李兰田　乔家瑞
任中文　杨玉蓉　张惠娟　编

胡　杞　审校

北京师范学院出版社
1986年·北京

前　　言

本书系文科复习用书，它包括数与式、方程和不等式、函数(包括三角函数)、数列、直线和曲线方程以及总复习六个部分，其中数与式、方程和不等式等内容属于初中代数的复习。在每一部分内容中，安排有内容提要、例题分析和练习题。内容提要力求简明扼要，系统全面，重点突出；例题分析指出了解题的一些思路、方法和技巧；练习题分为基本练习题和综合练习题，基本练习题主要是对基础知识进行训练，综合练习题则侧重能力的培养。总复习部分材料丰富，要求适当，可以用来检查复习效果。

本书由北京师范学院数学系胡杞老师审阅，并提出了许多宝贵意见，限于我们的水平，难免有错误与不妥之处，欢迎批评指正。

编　　者

1985年9月

成人高考文科复习丛书

数学复习题解

SHUXUE FUXI TIJIE

李兰田　乔家瑞　任中文　杨玉蓉　张惠娟　编

胡　杞　审　校

北京师范学院出版社出版（北京阜成门外花园村）

北京新华书店发行　关西庄印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：$13\frac{3}{4}$　字数：344千字

1986年1月第一版　1986年1月第一次印刷

统一书号：7427·019　定价：2.50元

丛书编辑说明

为了帮助报考各类成人高等学校的考生进行复习，我们根据《1986年全国各类成人高等学校招生考试复习大纲》所规定的复习内容与要求，编写了这套高考文科复习丛书，本丛书包括：语文、政治、数学、历史和地理五个分册。

丛书从成人学习的特点出发，既注意了各科的知识系统性，又突出了各自的重点与难点。每分册均有练习题及答案；有的包括内容提要、例题分析；还有的介绍了解题思路与方法。内容和分析简明扼要，便于成人掌握。

为保证丛书的质量，特组成了丛书编委会。参加编辑者，主要由北京市教育学院各学科老师，及北京市有丰富教学经验的老师组成。

丛书主编：蒋有端

编　　委：李淑敏　徐兆泰　乔家瑞　真炳侠

目　录

第一章　数　与　式

一　实数

1　实数的从属关系

- 实　数
  - 有理数
    - 整　数
      - 正整数 ……………… 有限小数
      - 零 ……………… 有限小数
      - 负整数 ……………… 有限小数
    - 分　数
      - 正分数
      - 负分数
        - 可以化成十进分数的 ……………… 有限小数
        - 不能化成十进分数的 …………无限循环小数 ── 无限小数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - ……………………………………无限不循环小数 ── 无限小数

2　自然数　称1、2、3、4、……这些数为自然数；自然数也叫做正整数。它有两个特点：

（1）有起始数1，而没有一个结尾的数；

（2）每相邻的两个数，后面的数比前面的数大1个单位。

3　质数与合数　只能被1和它本身整除的自然数叫做质数。比如2、3、5、7等，都是质数。除了能被1和它本身整除之外，还能被其它的数整除的自然数，叫做合数。比如4、6、12、25等都是合数。1既非质数、也非合数。

4　分解质因数　把一个合数分解成若干个质数乘积的形式，叫做分解质因数。比如把20分解质因数，可写成$20=2\times2\times5$.

5　互质　如果两个自然数的最大公约数是1，那么这两个自然数叫做互质。

6　奇数与偶数　凡是能被2整除的整数叫做偶数；凡是不能被2整除的整数叫做奇数。偶数一般用$2n$来表示；奇数一般用$2n+1$或$2n-1$来表示。其中n为整数。

7　数轴　数轴本身是一条规定了原点、方向和长度单位的直线。数轴上所有的点与全体实数是一一对应的。

8　倒数　1除以一个数的商，叫做这个数的倒数。比如5和$\frac{1}{5}$，$-\frac{2}{3}$和$-\frac{3}{2}$，零没有倒数。

9　相反数　实数a和$-a$互为相反数；零的相反数还是零。在数轴上原点的两侧，离开原点距离相等的两个点所表示的两个数，互为相反数。比如3和-3，$-\frac{1}{5}$和$\frac{1}{5}$。

10　实数大小的比较　在数轴上表示的两个数，右边的总比左边的大；正数都大于零；负数都小于零；一切正数都大于负数；两个正数做比较，绝对值大的数就大；两个负数做比较，绝对值大的反而小。

11　绝对值　在数轴上表示一个数的点到原点的距离，叫做这个数的绝对值。显然一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值还是零。

a的绝对值通常表示为

$$|a|=\begin{cases}a\ (\text{当}a>0\text{时})\ ,\\ 0\ (\text{当}a=0\text{时})\ ,\\ -a\ (\text{当}a<0\text{时}).\end{cases}$$

12 实数的运算

（1）有理数的运算法则（略）

（2）实数的运算　在进行实数的四则运算时，有理数的运算规律也同样适用，在实数范围内四则运算总可以实施，其运算结果还是实数，特别地，在实数围范内，正数的开方运算总可以实施。

（3）运算定律

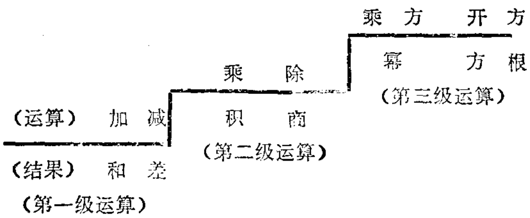
①加法交换律　$a+b=b+a$；　　②加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

③乘法交换律　$ab=ba$；　　④乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$；

⑤分配律　$a(b+c)=ab+ac$。

（4）运算顺序

①无括号时，在非同级运算中，按着先第三级运算，再第二级运算，最后第一级运算的顺序进行运算。在同级运算中，按着谁在前先算谁的原则进行运算。



②有括号时，一般是按照先小括号，再中括号，最后大括号的顺序进行运算。

（5）去括号法则　在去括号时，如果括号前面是正号，留在原括号内的各项的符号都不变化；如果括号前面是负号，留在原括号内的各项的符号都须变化成相反符号。

例1　把360分解质因数。

分析　利用短除的方法，可以把一个合数分解为质因数的乘积的形式。

解

$$\begin{array}{r|l} 2 & 360 \\ \hline 2 & 180 \\ \hline 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$\therefore$　$360=2^3\times3^2\times5$.

例2　求　48、60、72的最大公约数与最小公倍数。

分析　求最大公约数的方法是，用各数公共的质因数连续去除，一直除到所有的商数互质为止，这时所有公共质因数的乘积，就是这几个数的最大公约数；求最小公倍数的方法是，先用各数的公共质因数连续去除，除到所有商数互质后，如果其中有部分数若有公共质因数，再继续除下去，不能被整除的数都照写在商的位置上，一直除到任意两个商数都互质为止，把所有的除数及最后的商数都连乘起来，就是这几个数的最小公倍数。

解

$$\begin{array}{r|ccc} 2 & 48 & 60 & 72 \\ \hline 2 & 24 & 30 & 36 \\ \hline 3 & 12 & 15 & 18 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

$\therefore$　最大公约数为$2\times2\times3\times2=24$；最小公倍数为$2\times2\times3\times2\times2\times5\times3=720$.

例3　比较下列各组数的大小：

(1) $-\frac{30}{31}$和$-\frac{29}{30}$； (2) $-\sqrt{3}$和-1.7；

(3) π、3.1415和$\frac{22}{7}$；(4) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$和$2+\sqrt{3}$.

分析 按照实数大小比较的法则进行比较，本题应注意的是：两个正分数比较时，分母相同看分子，分子大的分数值就大；分子若相同就看分母，分母大的分数值反而小。两个正小数比较时，从最高位起，在相同位上的数相比，比到哪一位，谁的较大，就可决定该小数大，以后各个数位上的数可以忽略不计。

解 $\because \left|-\frac{30}{31}\right|=\frac{30}{31}=\frac{900}{930}$，$\left|-\frac{29}{30}\right|=\frac{29}{30}=\frac{899}{930}$，

而 $\frac{900}{930}>\frac{899}{930}$， $\therefore -\frac{30}{31}<-\frac{29}{30}$；

(2) $\because |-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，$|-1.7|=1.7$，

而 $\sqrt{3}=1.732\cdots\cdots$， $\therefore \sqrt{3}>1.7$， 则 $-\sqrt{3}<-1.7$；

(3) $\because \pi=3.14159\cdots\cdots$， $\frac{22}{7}=3.14285\cdots\cdots$，

$\therefore 3.1415<\pi<\frac{22}{7}$；

(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{10}+5=7+2\sqrt{10}$；

$(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+2\sqrt{12}$.

$\because$ $\sqrt{2}+\sqrt{5}$，$2+\sqrt{3}$ 都是正数，

$\therefore$ $\sqrt{2}+\sqrt{5}$，$2+\sqrt{3}$ 分别是$7+2\sqrt{10}$和$7+2\sqrt{12}$的算术平方根，

而 $7+2\sqrt{10}<7+2\sqrt{12}$， $\therefore \sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$.

例4 已知 $x+\frac{1}{x}=3$， 求 $x^2+\frac{1}{x^2}$的值。

分析 这个题可利用互为倒数的两个数之积为1，即$x\cdot\frac{1}{x}=1$的条件去解。

解 由 $x+\frac{1}{x}$的两边同时平方，得$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=9$；

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$.

例5 化简下列各式：

(1) $-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$； (2) $|\sqrt{3}-2|$； (3) $\frac{x}{|x|}$；

(4) $|3-x|-|2x+1|+|x+2|$ $(x<-2)$；

(5) $\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-2|}{x-2}$ $(-1<x<2)$； (6) $|x+2|+|x-2|$.

分析 要去掉绝对值符号以便化简，首先就要判断绝对值符号里面的数是正数、负数还是零，然后根据绝对值定义求出结果。解题时要充分注意题目中所给的条件。

解 (1) 原式 $=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$； (2) 原式 $=2-\sqrt{3}$；

(3) 原式 $=\begin{cases}\frac{x}{x}=1(x>0)\ ；\\ \frac{x}{-x}=-1\ (x<0)\ ；\end{cases}$

(4) $\because x<-2\quad\therefore$ 原式 $=3-x-[-(2x+1)]+[-(x+2)]=2$；

(5) $\because\ -1<x<2,\quad\therefore\ x+1>0,\ x-2<0,$

$\therefore$ 原式 $=\frac{x+1}{x+1}+\frac{2-x}{x-2}=1+(-1)=0$；

(6) 当 $x\geqslant 2$ 时，$|x+2|+|x-2|=x+2+x-2=2x$，

当 $-2\leqslant x<2$ 时，$|x+2|+|x-2|=x+2+2-x=4$，

当 $x<-2$ 时，$|x+2|+|x-2|=-x-2-x+2=-2x$。

例6 回答下列问题：

(1) m 一定是正数吗？$-|m|$ 一定是负数吗？

(2) $|m|$ 一定是正数吗？$-m$ 一定是负数吗？

(3) $m+n$ 一定大于 $m-n$ 吗？

分析 当判断一个含有字母式子的值的符号时，一定要考虑到字母表示数的任意性。还应注意到字母代表零时的特殊情况。

解(1) 因为 m 可以表示正数、负数或零，所以 m 不一定正数，$-|m|$ 也不一定是负数；

(2) 因为当 $m=0$ 时，$|m|=0$，所以 $|m|$ 不一定是正数，$-m$ 也不一定是负数；

(3) 当 $n>0$ 时，$m+n>m-n$，当 $n=0$ 时，$m+n=m-n$，

当 $n<0$ 时 $m+n<m-n$，所以 $m+n$ 不一定大于 $m-n$。

例7 已知 $|a+3|+\sqrt{(b-4)^2}=0$，求 a、b 的值。

分析 想问题时除了应考虑到字母表示数的任意性之外，还应注意到绝对值和算术根的本身都代表非负数（即零或正数）。

解 $\because\ |a+3|\geqslant 0,\ |b-4|\geqslant 0$，又 $|a+3|+\sqrt{(b-4)^2}=|a+3|+|b-4|=0$，

$\therefore\ |a+3|=0,\ |b-4|=0$，即 $a=-3,\ b=4$。

例8 说出下列各式成立的条件：

(1) $|P|=-P$；(2) $P=-P$；(3) $P>3P$；(4) $|P-2|=3$；(5) $P<\frac{1}{P}$。

分析 由于字母表示的是实数，为此在确定题目中各式能成立的条件时，要分别就正数、负数、零各种情况进行全面考虑。

解(1) 当 $P\leqslant 0$ 时，$|P|=-P$；(2) 当 $P=0$ 时，$P=-P$；

(3) 当 $P<0$ 时，$P>3P$；(4) 当 $P=5$ 或 $P=-1$ 时，$|P-2|=3$；

(5) 当 $0<P<1$ 或 $P<-1$ 时，$P<\frac{1}{P}$。

例9 计算下面各题：

(1) $3\frac{1}{4}-\left(+4\frac{5}{12}\right)-\left(-12\frac{1}{6}\right)+\left(+2\frac{1}{3}\right)-\left(+5\frac{1}{6}\right)-\left(-2\frac{1}{4}\right)$；

(2) $3\frac{3}{4}-\left[(-0.5)+4\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right]$.

分析 在进行有理数加减混合运算时，应先将原式统一化成省略加号的代数和．计算时，式中有相反数先将它们合并为零；为了简化运算可充分利用交换律或结合律，把正数与负数分别合并计算，也可把同分母或分母间有倍数关系的分数合并在一起。

解

(1) 原式 $=3\frac{1}{4}-4\frac{5}{12}+12\frac{1}{6}+2\frac{1}{3}-5\frac{1}{6}+2\frac{1}{4}$

$=3\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}+12\frac{1}{6}-5\frac{1}{6}-4\frac{5}{12}+2\frac{1}{3}$

$=5\frac{1}{2}+7-2\frac{1}{12}=10\frac{5}{12}$;

(2) 原式 $=3\frac{3}{4}-\left[-\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]$

$=3\frac{3}{4}-\left(4\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)$

$=3\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}=-1\frac{1}{12}$.

例10 计算下面各题：

(1) $(-2)\times(-3)\times(+5)\times(-12)\div(-5)$;

(2) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{2}{5}\right)\times(-0.25)\times\frac{4}{5}$.

分析 在进行有理数乘除混合运算时，应先确定算式的符号，再求其绝对值；积的符号决定于因式中负数的个数，当有奇数个负因数时积为负，当有偶数个负因数时积为正；遇有分数乘除混合运算时应将除先化为乘；遇有小数和分数混合乘除运算时，应将小数化为分数，这都有利于运算。

解(1) 原式 $=2\times3\times5\times12\times\frac{1}{5}=72$;

(2) 原式 $=\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{5}{16}$.

例11 计算下面各题：

(1) $\left[2\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\times\sqrt[3]{-8}\div\frac{1}{6}\right]\times(-6)$;

(2) $-0.75^2\div\left(-1\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$;

(3) $1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}-2^2\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{8}\right\}$.

分析 在进行有理数四则混合运算时，应按运算的顺序先乘方、开方，再乘、除，最后加、减；同时要注意 $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 与 $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ 以及 -2^2 与 $(-2)^2$ 不要混淆；在计算 $4\div2\times\frac{1}{8}$ 时，应先除后乘。

解(1) 原式 $=\left[\frac{7}{3}\times(-\frac{1}{2})-\frac{2}{3}\times(-2)\times6\right]\times(-6)$

$=\left[-\frac{7}{6}+8\right]\times(-6)=7-48=-41$；

(2) 原式 $=-\left(\frac{3}{4}\right)^2\div\left(-\frac{3}{2}\right)^3+1\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

$=-\frac{9}{16}\times\left(-\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$；

(3) 原式 $=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\times\frac{1}{8}\right]=1\frac{2}{3}-\left(5\frac{3}{4}+4\div2\times\frac{1}{8}\right)$

$=1\frac{2}{3}-\left(5\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)=-4\frac{1}{3}$。

基 本 练 习 题

1 填空：

(1) 绝对值小于5的整数是 ______________，

其中____最小，其中____________是非负数，其中 ___的绝对值最小；

(2) ____的相反数比它本身大，________的相反数等于它本身；

(3) $(-2)^4+(-2^4)=$ _____ ____，$(-2)^3+(-2^3)=$ ____________；

(4) 如果a和b互为相反数，那么$a+b=$ ________，$\frac{a}{b}=$ __________，但有特殊情况____

____________________。

2 判断正确或错误，分别用符号"√"或"×"填写在各题后面的括号中：

(1) 有理数的绝对值都是正数；（ ）

(2) 两个数的和一定比其中的任意一个数大；（ ）

(3) 两个数的积一定比其中的任意一个因数大；（ ）

(4) 较小的数减去较大的数所得的差一定是负数；（ ）

(5) 一个数的二次幂一定大于这个数；（ ）

(6) -6与-2之间只有-5，-4、-3这三个数。（ ）

3 若$|x|=3$，$|y|=5$，计算$x+y$的值。

4 求最大公约数为12，最小公倍数为420的两个正整数。

5 五个连续整数的和与中间那个数有什么关系？为什么？

6 选择答案：

(1) 25的平方根为（ ）

(*A*) 5；(*B*) -5；(*C*) ±5；(*D*) $=\sqrt{25}$。

(2) 计算$\sqrt{(-4)^5}-(-5)^2-5+\sqrt{(-43)^4}-(-3)^2$，其结果为（ ）

(*A*) 8；(*B*) -68；(*C*) 18；(*D*) -86。

综 合 练 习 题

1 Q是有理数：

(1) $|Q|+Q$能不能是负数？为什么？$|Q|-Q$呢？(2) $-Q$一定是负数吗？为什么？

(3) $Q^2>0$对吗？为什么？(4) $Q^2+2>0$对吗？为什么？

2　a和b都是小于1的正数，并且$a<b$，

下列各题中的两个数哪一个数大？把大的写在括号内：

(1)　a和a^2；（　　）(2)　a^2和b；（　　）

(3)　a和ab；（　　）(4)　$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$．（　　）

3　$1.5^2\times125^{16}\times8^{16}$的结果是几位数？

4　解答下列各题：

(1) 写出比$3\sqrt{3}-2$的相反数大的所有负整数；

(2) 写出与2的差的绝对值等于3的数；

(3) 具有什么条件的两个数，它们的和的绝对值，等于它们的绝对值的和。

5　两个有理数的和、差、积、商还一定是有理数吗？

6　计算：

(1)　$\left(40\frac{49}{60}-41\frac{23}{84}\right)\times\left\{\left[-3.5\times\left(1\frac{1}{5}-2\frac{1}{7}\right)-4\right]\div(0.16)\right\}$；

(2)　$\left[\left(5\frac{1}{4}-18.875\right)\times\left(7\frac{2}{3}-10.5\right)-41\frac{29}{72}\right]\div\left(-22\frac{7}{18}\right)-0.125$.

二　代数式

1　代数式的有关概念

(1) 代数式　单独的一个数或者字母，以及用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式。

(2) 代数式的值　用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫做代数式的值。

(3) 代数式的分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整　式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分　式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

(4) 有理式　只含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式叫做有理式。

(5) 整式　除式中不含有字母的有理式叫做整式。

(6) 单项式　不含有加减运算的整式叫做单项式。

单项式中的数字因数，叫做单项式的系数；所有字母的指数的和，叫做单项式的次数。

(7) 多项式　单项式的代数和，叫做多项式。多项式中，次数最高的项的次数，叫做多项式的次数。

(8) 分式　除式中含有字母的有理式，叫做分式。

(9) 无理式　含有关于字母开方运算的代数式，叫做无理式。

注：$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$是根式，但不是无理式；$\sqrt{2}x^2-\sqrt[3]{5}$是有理式，但也不是无理式。

2　**整式**

(1) 合并同类项法则　把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变。

(2) 整式的加减法　实际上就是合并同类项，如遇到括号，就根据去括号法则先去括号，再合并同类项。

(3)　幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0,\ m>n);$$
$$(a^m)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

其中，m、n都是正整数，a是实数。

(4) 整式的乘除法

①整式的乘法

单项式与单项式相乘　用它们的系数的积做为积的系数，用相同字母指数的和，做为积里这个字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数，也做为积里的一个因式。

单项式乘以多项式　单项式与多项式相乘，就用单项式去乘多项式里的每一项，再把所得的积相加。

多项式乘以多项式　多项式与多项式相乘，先用一个多项式里的每一项，乘以另一个多项式里的每一项，再把所得的积相加。

②乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;\ (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\ (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;\quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

③整式的除法

单项式除以单项式　单项式除以单项式，把系数和同底数幂分别相除作为商的因式，被除式单有的字母，连同它的指数也作为商的一个因式。

多项式除以单项式　多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项，除以这个单项式，再把所得的商相加。

多项式除以多项式　先把被除式与除式都按降幂排列，然后按竖式格式进行演算。

3　因式分解

(1) 定义　把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解。

因式分解一般是在整式有理系数范围内分解；如指明在实数范围内分解，则应按照要求进行分解。因式分解一定要分解到每个因式都不能再继续分解为止。

(2) 因式分解的一般方法

①提取公因式法　先提取多项式中各项的公因式（即系数的最大公约数，字母是取各项都有的且指数最小的），把它放在括号的前面，再用公因式去除原来多项式里的每一项，把所得的商放在括号里面。

②应用公式法　常用的公式有

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);\quad a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);\quad a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3.$$

③分组分解法　分组后，提出各组的公因式或应用公式法分解。

④十字相乘法

$$x^2+(a+b)x+ab$$
$$=(x+a)(x+b);$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & a \\ 1 \arrow[ur] & b \end{tikzcd}$$

$$acx^2+(ad+bc)x+bd$$
$$=(ax+b)(cx+d).$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & b \\ c \arrow[ur] & d \end{tikzcd}$$

⑤配方法

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]\ (b^2-4ac\geqslant 0)$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

⑥求根公式法

应用一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式，求出二次三项式ax^2+bx+c的两个根x_1、x_2，

那么 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(3) 因式分解的一般步骤

①首先观察多项式的各项，有没有公因式，若有公因式，应先提取公因式；

②没有公因式的式子，要看能不能应用所学过的公式进行分解，如果能够，就应用公式进行分解；

③不能直接应用公式来分解的式子，就试用分组分解法；

④如果是二次三项式，又不能应用二项式平方公式分解时，可考虑用十字相乘法分解因式，如仍不能分解时，再用求根公式分解；

⑤如果分得的因式还能分解，就继续分解下去，直到每一个因式都不能再分解为止；

⑥分解后若有重因式，应写成幂的形式。

例1 先化简下列各式，再求代数式的值：

(1) $-a-(1\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b^2)+(\frac{2}{3}b^2-2a)$，其中$a=-2$，$b=\frac{2}{3}$；

(2) $-2a^2b-[2a^2b-\frac{1}{3}ab(6b-3a)-4a^2b]-\frac{7}{3}ab^2$，其中$a=0.2$，$b=-\frac{3}{2}$.

分析 化简本题的关键是去括号和合并同类项，在求代数式的值时，一般先把代数式化简，再代入求值。

解(1) 原式$=-a-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{3}b^2-2a=-\frac{9}{2}a+b^2$.

当$a=-2$，$b=\frac{2}{3}$时，原式的值是$-\frac{9}{2}(-2)+(\frac{2}{3})^2=9+\frac{4}{9}=9\frac{4}{9}$；

(2) 原式$=-2a^2b-[2a^2b-2ab^2+a^2b-4a^2b]-\frac{7}{3}ab^2$

$$=-2a^2b+a^2b+2ab^2-\frac{7}{3}ab^2=-a^2b-\frac{1}{3}ab^2.$$

当$a=0.2$，$b=-\frac{3}{2}$时，原式的值是

$$-(0.2)^2\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}\times 0.2\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{50}-\frac{3}{20}=-\frac{9}{100}.$$

例2 计算下列各式：

(1) $\left(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{2}y^2\right)\cdot 3xy^2-\frac{1}{2}xy^2(2x-3y)(3x+3y)$；

(2) $(-3x^3y^n)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}xy^m\right)^3\div 2x^3y^{3m}$.

分析 整式的四则运算要注意两点，一是注意运算顺序；二是掌握幂的运算法则。整式运算的结果要按某一个字母的降幂或升幂排列。

解(1) 原式$=\left(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{2}y^2\right)\cdot 3xy^2-\frac{1}{2}xy^2(6x^2-3xy-9y^2)$

$$=3x^3y^2-x^2y^3+\frac{9}{2}xy^4-3x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^3+\frac{9}{2}xy^4$$

$$=\frac{1}{2}x^2y^3+9xy^4;$$

(2) 原式$=9x^6y^{2n}\cdot\left(-\frac{1}{8}x^3y^{3m}\right)\div 2x^3y^{3m}$

$$=-\frac{9}{8}x^9y^{3m+2n}\div 2x^3y^{3m}=-\frac{9}{16}x^6y^{2n}.$$

例3 用竖式作除法：

$(13x^3+3x^4-x)\div(x^2+4x-3)$.

分析 按竖式作除法时，被除式首先按某一个主要字母的降幂排列整理好顺序，遇有缺项就要留出空位。在作除法时，如果除得的结果，余式为零，则说被除式能被除式整除；如果余式不为零，则不能被整除，这时余式的次数必须小于除式的次数。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+x+5 \\ \hline
x^2+4x-3 & 3x^4+13x^3+0-x+0 \\
 & 3x^4+12x^3-9x^2 \\ \hline
 & x^3+9x^2-x \\
 & x^3+4x^2-3x \\ \hline
 & 5x^2+2x+0 \\
 & 5x^2+20x-15 \\ \hline
 & -18x+15
\end{array}$$

∴ 商式$=3x^2+x+5$；余式$=-18x+15$.

例4 已知 $xy^2=-6$， 求 $-xy(x^2y^5-xy^3-y)$的值。

分析 在求代数式的值时，一般应先化简再求值，化简时要注意恰当地使用已知条件。

解 原式$=-x^3y^6+x^2y^4+xy^2=-(xy^2)^3+(xy^2)^2+xy^2$

$=-(-6)^3+(-6)^2+(-6)=246.$

例5 已知 $a+b+c=x$，$ab+ac+bc=y$，$abc=z$，试用含有x、y、z的代数式，来表示下列各式：

(1) $a^2+b^2+c^2$; (2) $(a-1)(b-1)(c-1)$.

分析 求解此类问题的关键是，找出欲求的代数式$a^2+b^2+c^2$以及 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 与已知条件有何关系，也就是说把已知条件，经过怎样的变化即可得出欲求的代数式，只要抓住了这一点就可找出解题的途径。

解 (1) 将$a+b+c=x$的两边分别平方，得 $(a+b+c)^2=x^2$，

即 $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=x^2$， $\therefore$ $a^2+b^2+c^2=x^2-2y$；

(2) $\because$ $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-ab-ac-bc+a+b+c-1$

$=abc-(ab+ac+bc)+(a+b+c)-1=z-y+x-1$.

例6 利用乘法公式计算：

(1) $(x-y)(-x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$；(2) $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2$；

(3) $(3x-2y)^2-(-3x-2y)^2$；(4) 102×98；(5) 99^2.

分析 灵活运用乘法公式可以使计算简便，在不能直接利用乘法公式计算时，就更应该掌握公式的特点，比如用平方差公式计算 $(x-y)(-x-y)$ 时可先提出-1，再用公式，即 $(x-y)(-x-y)=-(x-y)(x+y)=-(x^2-y^2)$；也可以将$-y$看作公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$中的$a$，将$x$看作公式中的$b$，直接用公式即 $(x-y)(-x-y)=[(-y)+x]\cdot[(-y)-x]=y^2-x^2$。总之掌握公式的本质特点是解题的关键。

解 (1) 原式$=-(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=-(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

$=-(x^4-y^4)(x^4+y^4)=-(x^8-y^8)=y^8-x^8$；

(2) 原式$=[(a+b)(a^2-ab+b^2)]^2=(a^3+b^3)^2=a^6+2a^3b^3+b^6$；

(3) 原式$=(9x^2-12xy+4y^2)-(9x^2+12xy+4y^2)$

$=9x^2-12xy+4y^2-9x^2-12xy-4y^2=-24xy$；

(4) $102\times98=(100+2)(100-2)=10000-4=9996$；

(5) $99^2=(100-1)^2=10000-200+1=9801$.

例6 把下列各式分解因式：

(1) $-6a^3b^2-3a^2b^3+12a^2b^2$；(2) $(x-y)(a^2+b+1)-(y-x)(a^2-b+1)$；

(3) $x^4-8x^2y^2+16y^4$；(4) $30ax-34bx-15a+17b$；(5) $xz-yz-x^2+2xy-y^2$；

(6) $5x^2+11x-12$；(7) $x^2(x^3-1)+x(1-x^3)-2(x^3-1)$；(8) $(x^2+8)^2-36x^2$；

(9) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$；(10)在实数范围内分解 ①$9x^4-4$；②$2a^2-12a+5$.

分析 在因式分解中，应遵循一些规律，一般常用的规律有：首项系数若是负数时，提取公因式时需将负号一起提出，使括号内第一项系数为正，括号内其它各项都要变号；因式分解还必须把每个因式分到不能再分为止；在二次三项式中，可以采用十字相乘法、配方法或公式法，选择哪种方法要视其情况而定，在使用十字相乘法时要特别注意符号；除上述基本方法之外，可用分组分解法，它是上面基本方法的综合运用。

解(1) 原式$=-3a^2b^2(2a+b-4)$；

(2) 原式$=(x-y)(a^2+b+1)+(x-y)(a^2-b+1)$

$=(x-y)(a^2+b+1+a^2-b+1)=2(x-y)(a^2+1)$；

(3) 原式$=(x^2-4y^2)^2=(x+2y)^2(x-2y)^2$；

(4) 原式$=(30ax-34bx)-(15a-17b)$

$=2x(15a-17b)-(15a-17b)=(15a-17b)(2x-1)$；

(5) 原式$=(xz-yz)-(x^2-2xy+y^2)$

$=z(x-y)-(x-y)^2=(x-y)(z-x+y)$；

(6) 原式$=(5x-4)(x+3)$；

(7) 原式$=x^2(x^3-1)-x(x^3-1)-2(x^3-1)$

$=(x^3-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x-2)$；

(8) 原式$=[(x^2+8)+6x][(x^2+8)-6x]$

$=(x^2+6x+8)(x^2-6x+8)=(x+2)(x+4)(x-2)(x-4)$；

(9) 原式$=[(x^2+x)+1][(x^2+x)+2]-12=(x^2+x^2)^2+3(x^2+x)+2-12$

$=(x^2+x^2)^2+3(x^2+x)-10=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$；

(10) ① 原式$=(3x^2+2)(3x^2-2)=(3x^2+2)(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}x-\sqrt{2})$；

② ∵方程$2a^2-12a+5=0$的两个根是$a=\dfrac{6\pm\sqrt{26}}{2}$

$$\therefore 2a^2-12a+5=2\left(a-\frac{6+\sqrt{26}}{2}\right)\left(a-\frac{6-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=(2a-6-\sqrt{26})\left(a-\frac{6-\sqrt{26}}{2}\right).$$

说明 ax^2+bx+c 用求根公式的方法因式分解时，$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$，$x_1$、$x_2$是$ax^2+bx+c=0$的两个根，，二次项的系数千万不要漏掉。

4 分式

(1) 分式的定义　除式中含有字母的有理式，叫做分式；分式中字母取值不能使分母为零。

(2) 分式的基本性质　分式的分子和分母都乘以（或除以）不等于零的同一整式，分式的值不变。

(3) 分式的符号法则　分式的分子、分母和分式本身的符号，要同时改变其中任何两个，分式的值不变。

即$\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{-a}{-b}$.

(4) 分式的运算

①分式的的加减法　同分母分式加、减运算时，只须把分子相加、减，分母不变；异分母分式加、减运算时，必须先通分，化异分母为同分母，然后再加减。

②分式的乘除法　分式乘以分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母；分式除以分式，只须把除式颠倒再与被除式相乘即可。

③分式的乘方　只须把分式的分子、分母各自乘方。

④繁分式　分式的分子或分母中含有分式，这样的分式叫做繁分式。

繁分式的化简，可利用分式的基本性质或分式的除法法则来进行。

如 $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)ab}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)ab}=-\dfrac{b-a}{b+a}$；　或 $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{b-a}{ab}\div\dfrac{b+a}{ab}=\dfrac{b-a}{b+a}$.

例1　在分式$\dfrac{3x+6}{x^2-x-2}$中，