重温微积分

齐民友

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

重温微积分

齐民友

高等教育出版社

内容提要

本书根据作者多年来为各种不同程度的大学生和研究生讲课及讨论班上报告的内容整理而成。第一章对极限理论的发展作了历史的回顾。以下六章分别讨论函数、微分学、积分学、傅里叶分析、实分析与点集拓扑学基础以及微分流形理论。每一章都强调有关理论的基本问题、基本理论和基本方法的历史的背景,其与物理科学的内在联系,其现代的发展与陈述方式特别是它与其他数学分支的关系。同时对一些数学和物理学中重要的而学生常常不了解的问题作了阐述。因此,它涉及了除微积分以外的许多数学分支:主要有实和复分析、微分方程、泛函分析、变分法和拓扑学的某些部分。同样对经典物理学——牛顿力学和电磁学作了较深人的讨论。其目的则是引导学生去重新审视和整理自己已学过的数学知识,并为学习新的数学知识——例如数学物理做准备。

本书适合于已学过微积分的基本知识的大学生和研究生进一步自学更现代的数学之用,也可以作为讨论班的材料。本书还适合需要较多数学的各专业的人员以及高等学校教师参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

重温微积分/齐民友.—北京:高等教育出版社,
2004.1
ISBN 7-04-012931-0

Ⅰ.重... Ⅱ.齐... Ⅲ.微积分 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 091947 号

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总　　机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所
印　　刷 涿州市星河印刷厂

开　　本 787×1092　1/16
印　　张 35
字　　数 860 000

版　　次 2004 年 1 月第 1 版
印　　次 2004 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 39.60 元

序

本书是为那些读过一次微积分而又想多学一点数学(特别是现代数学)的读者写的。写这样一本书的出发点是以下三种考虑:

首先,微积分的"基本问题"或者说"基本矛盾"是什么?长期以来,许多人认为是 $\varepsilon-\delta$。对此我有些怀疑。初学微积分在 $\varepsilon-\delta$ 问题上感到困难。但是即令掌握了它,也不能说就懂得了微积分。再说,所谓"基本问题"或"基本矛盾",按习惯的说法是指贯穿始终,带动乃至决定微积分的主要内容的问题或矛盾。一门学问是否一定需要有一个或几个主要矛盾,借以展开这门学问,恐怕是可疑的事。可是我想,科学的目的在于探讨宇宙的规律,而从古希腊以来,就认为这种规律乃是数学的规律。于是随着人类社会的发展,科学面临的重大问题不断改变,科学以及作为它的不可少部分的数学就从一个阶段发展到另一个阶段。例如在资本主义出现的时代,了解天体运动的规律恐怕是人类面临的重大问题。说应用,它带动了动力学、航海学……;说思想,它促成了一次人类的思想大解放,使哥白尼、伽利略成了思想解放的巨人。正是在这个背景下,出现了牛顿、莱布尼茨……以及微积分。不妨说,这构成了一个研究宇宙规律,掌握乃至应用这些规律的一个大平台。牛顿等人的理论,有自己的问题和对象,有自己的方法,给了我们一个研究和处理问题的框架。其中一个核心问题是如何处理无穷小量。因此要有 $\varepsilon-\delta$。随着社会的发展,例如电磁现象、物质的分子构造又相继摆到我们面前。科学和数学又有了新问题和新方法。例如处理电磁理论,单只是"无穷小量分析"(这里借用了自欧拉时代就沿用的名称)就不够用了。例如我们不得不讨论向量、张量 、外微分形式;不得不考虑坐标系(参考系)的变化;不得不研究许多本质上属于拓扑学的问题。我想把这"一套"东西当作一个新框架来看待。这样来写一本书,我们就必然涉及许多物理问题。数学既不是它的"加工订货"的产物,也不简单是工具或语言,而是与物理学以不同角度,用不同方法,但是又互相携手,共同研究大自然。我想,应该使许多大学生知道这是多么吸引人的事业。并且希望他们中间有些人能走上这条道路,这是第一点。

既然是形成了一个大平台,人类就在这个大平台上建筑了许多大厦,它们是紧密联系的。例如自从有了微积分的同时也就有了微分方程(常的和偏的);在研究实变量函数的同时,也在研究复变量的函数。数学发展的历史不是先发展大学一二年级的课程,再发展三四年级的课程。我们不应该过分苛责目前大学里的课程安排。例如常微分方程与偏微分方程,问题不同,方法不同,可说是自成体系,如果按历史发展先后来安排,你可能会使学生一头雾水,不知所以。这样做十分不利于科学发展,而现在的安排基本上是合理的。但是也产生了一个问题,即各门课程互相孤立。从20世纪80年代起根据中法两国政府的协议,在武汉大学数学系办了一个试验班。由法国政府派数学教师在武大按法国的办法教学,以期我们能汲取对我国教育事业有益的经验。这个班给人印象甚深的是:一二年级只有一门数学课——高等数学,其内容包括了我国大学数学系一二年级全部数学基础课。此外则是物理学、计算机。到了高年级,有几位法国同行建议只要几门课就够了,而且举一些例,有微分学与复分析(是指一些常微分方程,微分流形,外微分形式

等等);测度论、概率论与泛函分析;李群与微分几何;代数方面可以讲一点表示论(群论基础知识已经在一二年级讲了)。此外可以有一些选修课。这些建议自然有一些随意性,而且有一些是日常"闲谈"讲的话,算不得教学计划。但是他们中大多数人是这个看法。问他们为什么,回答是:"数学就是统一的,应该让学生有一个统一的认识"。而且他们对我国"分工过细"常表示很不习惯。我在写这本书时,也试着在这方面作一些努力。但是这样就要回答一个问题:例如本书涉及一些所谓实分析知识,是否可以用它来取代实分析课程?我想是不行的。因为既然已分划出这样一个分支,总有自己的道理:有自己的问题,自己的方法,想要掌握它,必须系统地下功夫。所以我不幻想本书能取代其它的书,而只是告诉读者,曲径可以通幽。读者在学了微积分以后,就很容易进入某个领域,并且试着引导他去看一下这个领域的概貌。至于读者是否要进入某个领域,那是读者的事:要看有没有时间,有没有需要,而最重要的是有没有兴趣。我所能做的事无非是趁读者游兴正浓之时,告诉他还有哪些地方值得漫游,值得探胜乃至探险。一是提高他的游兴,二是如果他真的能去了,不至于过于生疏。根据同样的思想,本书可以只读其一章,可以从任一章开始,这与一般教科书也不太相同。这是第二点。

第三点是我们近年来常感到一个问题:可否让学生尽快地进入科学的前沿?另外,在研究生的教学或讨论班中又时常发现有不少内容大学本科就可以懂或者应该懂,而研究生有些弄不清的问题很可能是忘记了他在学微积分时实际上已经接触过这个问题,或者是因为变了一个样子就不认识了。科学发展太快,而学生学习年限不可能再延长。而且将来至少有一部分学生要在没有学校和老师的条件下自己去钻研新的科学知识。所以在大学中就应该为他们准备条件。结论是应该早一点让学生接触新成果。问题是能否做到。上面讲的试验班的经验给了我们一些启发:一方面是要认真地提取出新成果的实质并与传统的教学内容结合起来。否则,老是一本书一本书念下去绝不是办法。其次是老师们要"想开"一点:是不是认真教好书是教师的职责;是不是认真读好书是学生的职责。二者虽有密切关系却不是一件事。教学的某一部分内容时常并非最基本的,学生是否愿意在这里花工夫应该可以自己选择。即令听了不甚了然,至少没有什么坏处。我的一位老师当年就告诉过我,年轻时代思想最敏锐,即令一时不懂,将来再接触到会有似曾相识之感,对自己大有好处。这段话是千真万确的。这本书的内容有相当一部分是我曾以种种形式对学生们讲过的,效果不一定比讲传统的教材更差。走什么样的路,甚至数学系的学生将来是不是一定会以数学为生,这确实是学生们自己的事。"想开"了这一点,就可以放开种种疑虑,反而可以集中思想把书写得更清楚易读一些。

然而对读者们也有一个要求,即要求他们曾读过一本比较认真的传统的微积分教本。例如同济大学应用数学教研室编的《高等数学》:此书立论平正,平易近人,易教易学,作为进一步学习的出发点是够用的。我对现在的教材绝大部分是肯定的,因为它们帮助读者了解一门科学的基本内容。没有这一点,"重温"二字从何谈起?温故而知新,是希望读者能由此再进一步。这是本书写作的目的。因为假设读者有了这样的基础,我就可以略过许多材料不讲,可以假设读者自己会证明——至少知道——许多定理,特别是本书可以不按顺序,全由读者的兴趣从任何一章开始。这本书不是教本,完全不必要全都读懂。有许多内容则是因自己学力所限没有涉及,特别是有关计算机和数值计算的问题。但是关于本书材料的选择,还有几点深感不尽妥当。一是本书没有一章讲常微分方程,而这是应该有的。这是因为2001年冬我曾应邀在天津大学和南开大学的刘徽应用数学中心讲了一个常微分方程课,学时16,读者和教学目的均与本书相近。但是因

为当时还未打算写这本书,那本讲义的内容与本书有些互相牵扯。再重写则头脑里有了一个比较固定的框架,不太好办了,只好等以后有机会再说了。二是本书涉及不少线性代数知识,而基本的又是对偶空间的知识。目前的线性代数教材从一般的线性空间与线性算子角度来讨论的比较少,本书又未能如同处理微积分的古典内容那样细致地处理它,估计会使读者感到困难。如果能在第六、七两章适当补充,效果会更好些。

可是,正如一些数学家一再强调的,数学是"算"懂的,而不是"看"懂的。毫无疑问,这是当前数学教学一大弱点,而且似有加剧之势。本书对所讲的内容力求给以比较清晰的陈述,并给出证明。力求避免"显而易见","不难知道"之类的说法。但是对如何有助于读者的计算能力总是考虑不够。一些结论的证明因为与常见的书不同,难免有错,盼读者随时指正。

本书写作首先要感谢老朋友康宏逵老师,他关于数学基础、逻辑以及对微积分的发展的一般看法,多年来与我常共同切磋。本书中引用拉卡托斯的论述更是得益于他。刘伟安老师对大学生(不止是数学专业)的数学教学与我经常讨论。本书中关于向量与张量的处理得他之益甚多。如何给大学生讲一点广义函数更是我们近来交往的主题。田谷基老师对量子力学有兴趣,本书中关于量子力学知识的介绍实际上是我们共同工作的结果。王维克老师从写作本书意念的萌生,一直给予支持和鼓励。全书的打印,刘、田二位老师花了不少精力,对于他们以及许多没有提到的同志,谨致诚挚的谢意。但是我不能不提到责任编辑郭思旭同志。我们是二十多年的老朋友了,我们能合作到退休以后,想起来确有些激动。同样,我向从事编辑和校对的同志深切致谢。

齐民友

2003 年 3 月

郑重声明

策划编辑　李　蕊

责任编辑　郭思旭

封面设计　王凌波

责任绘图　宗小梅

版式设计　马静如

责任校对　尤　静

责任印制　陈伟光

目　录

第一章　变量的数学

——从直观与思辨到成熟的数学科学

读者都读过了一本通常的微积分教本，这样就会知道这是一门很有用的科学，尽管从这类教材中他很少能见到新的例子.再说，一门科学是否很有用也不是只靠几个例子能说明的.读者们会懂得了微积分中有许多解决问题的方法.如果不是遇到了很难的题目，或很细致的定理，微积分不是一门很难念的课程，而应该是很生动的.但是很多读者都对微积分的数学方法很不以为然.具体地说就是很不习惯 $\varepsilon-\delta$ 之类的语言，很不满意于对许多概念的过分仔细的分析.所以，本书打算这样开始：首先从历史发展的轨迹说明微积分何以有这样不"友好"的"界面"(users-unfriendly-interface)？但是本章并不是一个比较全面的微积分学历史的介绍，所以许多重要的人和事都没有讲.我们的目的只在于说明何以会有 $\varepsilon-\delta$ 这样令常人望而生畏的东西.说明这正是科学进步的结果，是数学科学区别于其它科学最明显的特点.本章结束以后，我们将再就微积分的若干主要领域介绍这种语言与方法是如何更有效地表述了微积分的主要思想，如何更有效地刻画了宇宙的规律，同时在这个过程中深化了自己，发展了自己(包括自己的语言与方法).

"初等数学是常量的数学，高等数学是变量的数学".这是老生常谈了，而且大体也是正确的.变量的数学在刻画自然界，乃至人类社会生活中取得了何等辉煌的胜利，这都是人所共知的了.但是什么是变量的数学？因为将"变"的概念引入数学又引起了何等深刻的变化？乃至于什么是"变"或"变量"？这些问题是值得我们去进一步思考的.我们将从历史的发展来看一下，这些问题是如何进入数学家的视野的.当代数学的一个最主要的起源地是希腊.希腊文明的所谓古典时期(即公元前 6 世纪至前 3 世纪)，数学就已经形成了一个独立的学科.在那时，数学与哲学的关系是密不可分的，希腊人对许多数学问题的处理还有浓厚的思辨色彩.然而就是这样，关于变量和变化的数学问题已开始孕育了.简略地回溯一下这段历史，有助于我们去体会为什么微积分会有今天这样的形状，为什么我们不得不绞尽脑汁来对付 $\varepsilon-\delta$.也会体会到，两千多年前提出的问题至今仍未完全"解决".但是，这样做，就不得不进入哲学的领域.这是我们力不能及的.所以，我们只能作一些浅显的介绍，而建议有兴趣的读者去读一些比较专门的著作.我们愿向读者推荐两本书：

M.Kline, Mathematics - The Loss of Certainty, Oxford University Press, 1980. 有中文译本：李宏魁译，数学：确定性的丧失，湖南科学技术出版社，1997.

T. Dantzig, Number - The Language of Science, George Allen & Unwin Ltd, 1938. 有中文译本：苏仲湘译，数：科学的语言，上海教育出版社，2000.

这两本书都是严肃的科普著作，不过要请读者注意不要以为读了它们就是读了哲学了.

希腊文明是唯一的这样一种古代文明：它承认人的理性的力量，人凭借着理性，再加上观察

实验,就可以发现宇宙的规律,而不必求助于超自然的力量.希腊人较少受宗教的束缚,敢于反对传统,敢于反对教条的权威.对于他们,科学的任务就在于发现宇宙的规律.数学是科学的一部分(在希腊时期,几乎是科学的大部分),其任务也就是发现宇宙的规律.而且由希腊人,而伽利略,而牛顿……又总是认为宇宙的规律乃是数学的规律.这当然不是说,数学不为各个时代的经济发展的要求服务,不为技术服务,而是说,数学还有更深刻的任务,即探讨宇宙(原来主要是指自然界,但近几个世纪以来又越来越多地涉及人的社会生活)的规律.正因为它是科学,所以它又能更好地适应技术和经济发展的要求.对这个问题我们也不打算多作讨论,而只是指出,看到了这条主线就更容易理解微积分为什么会成为今天这样子.

数学作为一种演绎推理的科学,即数学中一切结论都应该用逻辑方法加以证明,按照罗素的说明,这个"原则"或者说是"规定",是从毕达哥拉斯开始的.其后经由希腊时代的许多学派(主要是柏拉图学派)形成一个不可动摇的传统,而在欧几里得的《几何原本》中得到了完美的体现.毕达哥拉斯的数学又带有一种神秘的色彩,即他认为宇宙的本质是数(正整数,其实有理数也在其内,因为整数 n 是以 1 为单位,重复 n——一个正整数——次而得,而有理数$\frac{n}{m}$则是以$\frac{1}{m}$为新单位重复n 次而得,这个新单位重复 m——又是一个正整数——次又可得原单位 1).既然如此,任何一个线段都应该由若干(正整数)个"单元"构成.这当然是原子论在数学中的反映.所以,任意两条线段 l_1, l_2都由相应的正整数 m_1, m_2个单元构成.单元是公共的单位,若两条线段 l_1, l_2有公共的单位,使它们分别由 m_1, m_2个单位构成(m_1, m_2是正整数),我们称这种情况为 l_1, l_2"可公度".但是其后毕达哥拉斯一位弟子正是利用了他所证明了的著名的毕达哥拉斯定理(中国称为勾股定理)发现,正方形的边长(设为 1)与对角线长(用我们现在的记号是$\sqrt{2}$)是"不可公度的",即不可能找到任何的单元使 1 与$\sqrt{2}$各含 m 与 n(均为正整数)个单元,亦即不论 m 与 n 是什么样的正整数均不能使$\frac{n}{m}=\sqrt{2}$.用我们现在的语言来说,即$\sqrt{2}$是无理数.这个证明应该是读者们所熟知的.按数学史家的研究,是欧几里得或其弟子们提出的.我们这里只想提到一点,即当时就已经用反证法来证明这个结论.

这是希腊数学中出现的一次危机.它的实质在于:有理数本质上只可用于刻画离散的对象,而几何图形如线段等等本质上却是连续的.但是什么叫连续,我们暂时还只能直觉地去掌握它.至少现在我们知道,用离散性的有理数不能刻画连续性的对象.希腊人还没有掌握无理数的理论,那是两千多年以后的事了.而希腊人对数学的要求又是很严格的,因此,可以说希腊人回避了数而专注于几何.他们研究量而回避数.例如线段之长是量,面积大小也是量.对于两个量例如线段 l_1, l_2之长可以讨论它们的"比"(ratio).那么什么是比呢? 在《几何原本》,卷V中,给出了以下的"定义":"比是两个同类量之间的一种大小关系".今天看来,这实在算不上是一个"定义",但《几何原本》中确实是这样说的.从现代数学的要求看来,《几何原本》在严格性方面是大有问题的,所以两个量之比是不是一个数是有问题的.但是紧接着讲到比例(即两个比之相等)原书上有一个定义 5 就很有意思了.因为照抄原书不太好懂,所以不妨用现代的语言说明如下:设有四个量,例如四条线段 l_1, l_2, l_3, l_4,如果对任意两个整数 m 和 n,凡当 $ml_1 \gtreqless nl_2$时,必有 $ml_3 \gtreqless nl_4$就说 l_1与 l_2之比等于 l_3与 l_4之比.这里要注意 $ml_1 > nl_2$并不是数的比较,而是长度的比较:"把 l_1首尾相连,延长 m 倍"大于"把 l_2首尾相连延长 n 倍",所以定义 5 是完全没有问题.如果我们

承认量就是数，所以 l_1 与 l_2 之比就是 l_1/l_2，则这个定义讲的是：若由 $ml_1 \gtreqless nl_2$ 必可得 $ml_3 \gtreqless nl_4$，就说 $\frac{l_1}{l_2}=\frac{l_3}{l_4}$. 这个定义隐含地承认了“比”虽然不知是不是数，但是可以比较大小. 如果我们把 $ml_1 \gtreqless nl_2$ 定义为 l_1 与 l_2 之比 $\gtreqless \frac{n}{m}$ $\left(\frac{n}{m}\right.$确实是毕达哥拉斯也承认的数$\left.\right)$，则这个定义可以改述为，“若(l_1 比 l_2)$\gtreqless$(某数)，则(l_3 比 l_4)也$\gtreqless$(同数)，这时就说(l_1，与 l_2 之比)＝(l_3 与 l_4 之比)”. 我们都知道，数(不论是否有理数)可以比较大小，希腊人则知道量可以比较大小. 但是矛盾在于并不是所有的量都可以用数(实际上指有理数)来表示，例如单位正方形的对角线就不行. 如果我们再多加一句话：能比较大小的就是数，则量就与数完全统一了. 希腊人就是转不过这个弯子来. 是不是希腊人笨？能创造如此辉煌的数学的民族会笨吗？转不过弯子来的症结何在？因为希腊人认为数毕竟要由“单元”构成，正如物体是原子构成的那样. 原子是不可分的，所以单元就是不可分量. 原子是一切整体的组成部分，所以单元作为一切整体的部分必小于一切数. 这就是《几何原本》开宗明义的卷 I 公理 5：“整体大于部分”. 所以，这个“单元”就是“无穷小 ”. 但是什么是无穷小呢？希腊人不仅是“不知道”，而且还可以证明“无穷小”不存在(下面我们要讲这件事). 所以希腊人无论如何也转不过这个弯子来. 这个弯子一直到 19 世纪六七十年代才转过来. 例如戴德金(J. W. R. Dedekind, 1831—1916)，用有理数的分割作为实数的定义，不妨说就是定义：凡能比较大小并作四则运算的东西就叫做实数(我们这样说还不尽符合戴德金的原意. 详见本书第六章). 那么“无穷小”是什么呢？戴德金不需要无穷小，而是在实数理论基础上建立了极限理论，然后定义无穷小其实是极限为 0 的变量. 这个弯子绕得太大了，不仅希腊人绕不过来，伽利略、牛顿都没有绕过来. 而且从《几何原本》到戴德金，花了两千多年时间，所以如果说《几何原本》中的比例理论(一般认为应归功于欧多克萨斯(Eudoxus，公元前 3 世纪))就是实数理论的前身，那又太有点“戏说”的味道. 但是说从事后看来，希腊数学中已包含了其萌芽，恐怕是事实.

芝诺(Zeno of Elea，约公元前 5 世纪)和他的四个悖论更把关于数的“单元”(原子、不可分量、无穷小)所蕴含的深刻的矛盾突出出来了. 芝诺其人生平不明，著作也没有流传下来. 我们现在所见的来自亚里士多德的《物理学》. 实际上，亚里士多德是企图解决芝诺所提出的矛盾的. 关于芝诺的四个悖论说法很多，下面我们叙述的是罗素在《西方的智慧》(B. Russell, Wisdom of the West, MacDonald & Co, Ltd. 1959)一书中的说法. 该书中文译者是马家驹、贺霖，世界知识出版社 1992 出版，48～50 页.

芝诺的悖论是针对毕达哥拉斯的. 前两个悖论针对的是一条直线是由无限多个单元构成的这样的论点. 第一个悖论是阿基里斯(Achilles，希腊神话中的善跑者)永远追不上乌龟. 阿基里斯的速度比乌龟快 10 倍，但是他让乌龟先走了 100 米. 当阿基里斯追了这 100 米时，乌龟又向前走了 10 米，当阿基里斯追上这 10 米时，乌龟又向前走了 1 米. 如此进行下去直至无穷，阿基里斯是永远追不上乌龟的. 驳倒这一点并不难，因为若阿基里斯的速度为 v，则乌龟的速度是 $v/10$. 当阿基里斯追到乌龟的出发点时，他用了时间 $100/v=T$. 而在这个时间里，乌龟向前走了 $\frac{vT}{10}$. 依此类推，阿基里斯所用的时间是

$$T+\frac{T}{10}+\frac{T}{10^2}+\cdots=T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{10}{9}T.$$

这里涉及了无穷级数. 很可惜，希腊人不懂得无穷级数，因此他们只能用思辨的方法来解释这些

悖论.

第二个悖论是所谓"两分法"(dichotomy)."阿基里斯"是用相对运动来反对直线是由无限多个单元组成这一论断的,"两分法"则说运动是不可能的,并以此反驳上述论断:若一个物体要沿某一直线走完一定的路程,它必先经过其中点;但在达到中点以前,先要到达 1/4 点;在到达 1/4 点以前先要到达 1/8 点……仿此进行下去,该物体必须在有限时间内走完无限多个区段.而这是不可能的.因此,运动不可能.当然,用现代的数学知识来解释这个悖论也不困难.只要承认时间是无限可分的,则相应于空间的无限多个区段,也有时间的无限多个区段.而这些时间区段的长度成为一个几何级数,公比是 1/2,因而无限多个时间区段长之总和可以是有限的.这就解释了两分法悖论.

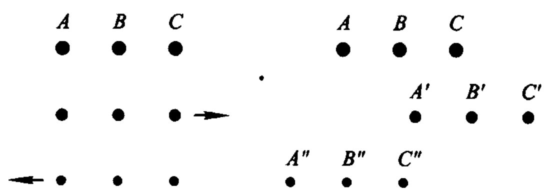

图 1-1

另两个悖论则是说:假设直线由无限多个单元组成,固然会引起如上的悖论,假设它是由有限多个单元组成,同样也会产生悖论.这里的悖论又是一组两个,第一个用相对运动,另一个则用一个物体的运动.第三个悖论称为"运动场"(stade).假设空间的一个线段是有限多个单元组成的,一个时间区段则由有限多个瞬间(即时间的单元)组成.若有三排点 A,B,C 如图 1-1.第一排不动;第二排向右移动,由于单元总数为有限,所以点的移动距离只能是有限个单元,所用的时间区段也只包含有限多个瞬间.所以我们可以假设每个瞬间移动一个单元.第三排则向左移动一个单元.总之点的移动只能是在一个瞬间(即一个时间单元)内,移动一个点(即一个空间单元).但是如图 1,原来的 A 点在一个瞬间以后,向右移动到 A',向左移动到 A'',相距两个点的距离.于是 A''这一排点相对于A'所经过的点数两倍于相对于A 所经过的点数,即一瞬间走了两点.但是按单元总数为有限的假设,一瞬间只能走一个点.由此可见,运动是不可能 的.这一段话是直接从亚里士多德《物理学》一书中引用的.

第四个悖论是飞箭不动.飞行中的箭在每一个瞬间都"占有本身大小相等的位置一定的时间".因此在这个瞬间,箭是不动的.而时间是由有限多个瞬时组成的.因此,在整个时间中,飞箭都是不动的.矛盾的产生在于假设了时间与空间都是由有限个单元组成的.用我们现在的观点来看,问题在于芝诺讲到了速度,如果用 $x(t)$表示物体的位置,则在两个不同瞬间 t_1与 t_2,有速度就是假设了

$$v=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}\neq 0.$$

因此 $x(t_2)-x(t_1)\neq 0$,所以就必然有运动.芝诺说,因为飞箭在每一瞬间都有一定位置,这就意味着飞箭在这一瞬间是静止的,这个论断在逻辑上就没有根据.上面我们说的其实就是导数的概念.飞箭在每一瞬间都有固定的位置,即 $x(t)$有确定的值,这并不是静止.要静止,至少需要

$x'(t)=0$. 当然，希腊人没有这样的概念，芝诺的悖论有违于现代的科学，但是芝诺用这些悖论来反驳时间空间是由"单元"构成的，确实是击中要害的.

这些悖论表明，我们直觉中以为没有什么困难的概念如运动、连续，变化等等，如果深入地进行逻辑的分析，就会发现我们并不真正懂得它们. 但是因为芝诺提出这些问题时完全是从思辨出发的，因此，对芝诺的反驳也必然是思辨的. 其中最重要的是亚里士多德. 他把无限分成两类：实无限(actual infinity)和潜无限(potential infinity). 前者是指某一时刻"一下子"就掌握到无限，后者则是在一个时间的过程中才能逐步展开、实现的无限. 例如一个线段可以无限地分割，但在任一个具体的时刻都不能无穷尽分割到头(因此不存在毕达哥拉斯所谓单元)；1，2，3，4，…可以无限地数下去，时间可以不断流逝，这些都是潜无限. 亚里士多德认为，芝诺的种种悖论都是针对的实无限. 因此，亚里士多德认为如果只限承认潜无限，则不但不会有悖论，而且正是抓住了现实世界的本质，芝诺的困难也都迎刃而解. 不仅如此，亚里士多德还指出一条直线的"连续性"就表现在：如果把它分成左右两段，则左段的终点正是右段的起点，二者融合为一；时间也是这样，0时0分0秒既是昨天的最终一瞬，也是今天的第一瞬，二者也融合为一. 但是数就不是这样；以整数1，2，3，4，5，6，…而言，如果在4处分开，则4是左段的最末一数，5是右段的第一数，其间还差了许多. 即令是有理数也是一样；$\sqrt{2}$正是1，1.4，1.41，1.414，…与2，1.5，1.42，1.415，…之间的空隙. 数的集合究竟有没有连续性，一直没有解决. 希腊人没有系统的无理数理论，这个理论出现在19世纪中后叶戴德金(Dedekind)与康托尔(Cantor)之手，正是回答了亚里士多德的问题. 欧几里得一直只注重几何，而尽量回避数，原因大概在此.

芝诺的悖论在希腊哲学中影响极大，而后人对芝诺悖论的诠释、评论也众说纷纭，有人说甚至有过于对待《圣经》. 以上我们只从数学的发展来看，就立刻看出，这里的关键在于"单元"究竟是什么？或者说，"无穷小"、"不可分量"究竟是什么？今天回顾历史，实在不能责怪希腊人回答不了这些问题. 在世界上的一切古老文明中，只有希腊人如此深刻地提出了问题. 一直到19世纪中后期的柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)才给出了我们现在满意的回答. 而在当时，至少是在柏拉图、欧几里得这里，数学家们持极为严谨的态度，实际上是"回避"无穷小. 而他们所采用的方法，实际上是走了亚里士多德潜无限的路，而且实际上开辟了我们今天的极限理论的道路.

不少人认为希腊人这样的研究数学实在是脱离实际和烦琐哲学，而且播下了今天的数学之脱离实际的"罪恶"的种子. 对此实难苟同. 因为运动、连续、变化不是我们每天都看得见的么？不是宇宙本性的一部分么？因此不可避免地成为数学家研究的对象. 何况，在希腊人看来，数和其它赋形的事物如日月星辰、山川草木的区别其实不大. 只不过数学的方法与当时已经存在的科学：天文学、光学、静力学及至生理学等等不同，它不能依靠观察与实验，而只有逻辑推理，这当然又与毕达哥拉斯开创的传统相联系. 看一看当时一些杰出的数学家的研究，就会发现他们实际上都是沿着亚里士多德潜无限的思想前进的. 也许人们说这是亚里士多德的哲学思想的"指导作用"，但是我们没有任何证据来证明这种说法. 宁可说，当时希腊人的认识水平就只达到了这一步.

我们要举出的杰出数学家之一是欧多克萨斯(Eudoxus). 他生于公元前408年左右，比亚里士多德早了好几十年，所以没有"接受"亚里士多德哲学"指导"的好福气. 他是希腊古典时代最伟大的数学家之一，可是其生平与著作俱无流传. 一般认为，欧几里得《几何原本》关于比例的理论，

关于穷竭法(早期的积分法)等等都是他的贡献.欧多克萨斯的工作只讲量(如长度、角度、面积、体积……)而不讲数,这是为了避免毕达哥拉斯关于无理数的困难.他应用了一个原理,后来人们认为应该看作是一个公理,因为阿基米德(Archimedes)也用过它,所以称为 Archimedes-Eudoxus 公理,见《几何原本》卷Ⅹ,命题 1(这里和以下凡引用《几何原本》处,均可在李文林主编《数学珍宝——历史文献精选》(科学出版社,1998 年出版)中找到).用我们现代的语言来说,它是:设有两个量 $a>b>0$,从 a 中除去其一半以上,再从其余除去其中一半以上,如此进行下去,经过充分多次以后,所余必小于 b.这个原理极为重要,因为它排斥无穷小量(不可分量)的存在:为简单起见,每次均取 a 的 λ 倍,$\frac{1}{2}\leqslant\lambda<1$,即 λa,于是所余为 $(1-\lambda)a$,n 次以后所余当为 $(1-\lambda)^n a$,这个命题说,只要 n 充分大,必有 $(1-\lambda)^n a<b$.其实,λ 不必 $\geqslant\frac{1}{2}$,$\lambda>0$ 即可,欧多克萨斯取 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 是为了下面穷竭法所需.如果有一个量是无穷小量,即是小于一切量而又不是 0 的量,则令上面的 b 为无穷小量,而取 a 为单位量 1,则一定有一个 n,使 $(1-\lambda)^n<b$,所以 b 一定大于某个非 0 的量 $(1-\lambda)^n$ 而不会小于一切非 0 量.所以,无穷小量是不存在的.这一段证明显然有亚里士多德的潜无限的味道.

欧多克萨斯然后用它来求圆的面积.严格地说,他并没有求出圆的面积,而是证明了下面的

定理 圆与圆之比等于其直径上的正方形之比.(《几何原本》,卷Ⅻ,2.)

我们仍要比较仔细地用现代语言来叙述《几何原本》中的证明,因为这就是早期的积分学.设有两圆,其直径分别为 d 与 d',面积相应地为 S 与 S',则待证明的就是下面的比例式:

$$S:S'=d^2:d'^2. \tag{1}$$

或

$$S/d^2=S'/d'^2. \tag{2}$$

我们当然知道,这个公比是 $\pi/4$,但是注意到希腊人连 $\sqrt{2}$ 都不承认,又怎会承认 π 呢?所以欧多克萨斯干脆不讲这个公比是什么.但到了阿基米德则进一步计算了 π 的近似值,他分别用圆的内接正 96 边形和外切正 96 边形算出 $\pi=3.14103$ 和 $\pi=3.14271$,因此,π 的真值在二者之间.

这个定理的证明分为两部分,第一部分是证明圆可以内接正多边形去"穷竭",即只要多边形的边数充分大,内接正多边形的面积就与圆面积近似到任意要求的程度,因此,这个方法称为穷竭法.不过这个名词并非来自希腊人,而是来自 17 世纪的欧洲.证明如下,记圆面积为 S,内接正 n 边形面积为 P_n,再作一个各边平行于此 n 边形的外切正 n 边形,记其面积为 Q_n.很明显

$$P_n<S<Q_n. \tag{3}$$

而且,只要 $n\geqslant 4$,很容易看到 $P_n\geqslant\frac{1}{2}Q_n$.(《几何原本》中是用 $n=4$ 即用内接外切正方形来完成这个证明的.)$S-P_n$ 由 n 个相同的弓形构成.如果把内接正 n 边形边数加一倍,即设 AB 为其一边,取 $\overset{\frown}{AB}$ 之平分点 C,联结 AC,BC,用这两个边代替 AB 即得正 $2n$ 边形,其面积为 P_{2n}.$S-P_{2n}$ 是 $2n$ 个相同的弓形.今证这 $2n$ 个弓形面积小于 $\frac{1}{2}(S-P_n)$.为此,只看一个边 AB,并作相应的矩形 $\square ABED$ 如图 1-2,则 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABED$,而(弓形 $ABFCGA$)的面积小于 $2\triangle ABC$.

如果我们把内接正多边形边数增加一倍，则 $S-P_{2n}$ 与 $S-P_n$ 的关系是从(弓形 $ABFCGA$)中减去 $\triangle ABC$，而把原来的一个弓形换成两个小弓形，其弦各为 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$. 但被减去的 $\triangle ABC>\frac{1}{2}$(弓形 $ABFCGA$)，所以这一个弓形被减去了"一大半". 每一个弓形如此，n 个弓形之总和当然也如此. 所以随着每一次把内接正多边形的边数加一倍，$S-P_n$ 就会被减去"一大半". 仿此进行下去，利用卷Ⅹ命题1，即知，只要 n 取得足够大，$S-P_n$(其实就是 $|S-P_n|$)就会变得"要多小有多小".

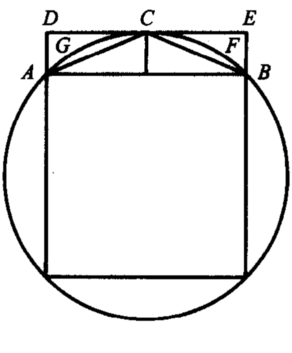

图 1-2

至此，读者们一定会说，由此推知，对任意 $\varepsilon>0$ 必定有 N 存在，使当 $n>N$ 时，$|S-P_n|<\varepsilon$，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=S$. 但是不要太急，不要忘记希腊人还没有极限的明确概念. 而他们对数学严格性的要求又使他们不能用没有定义过的东西.(不过，他们实际上并没有真正做到这一点，例如什么是圆面积，他们就只说它是一个量，而不是数，但是什么是量，什么是量的比都没有下定义. 在20世纪初希尔伯特又写了一本《几何基础》(科学出版社有中译本)，这样才达到了20世纪数学严格性的要求，但是已把《几何原本》改得面目全非了). 不使用极限，使希腊人绕了一个大弯——求助于反证法.

证明的第二部分是求证(1)式，这里他们用了反证法. 设(1)不成立，则一定可以找到比例第四项 S'' 使

$$S:S''=d^2:d'^2. \tag{4}$$

关于比例第四项是否一定存在，《几何原本》又是默认而未证明的. 如果 $S''<S'$，则取 n 充分大，如上所述可以使 S' 的内接正 n 边形 P'_n 与 S' 之差任意小，从而小于 $S'-S''$，即

$$|P'_n-S'|<|S'-S''|,$$

于是有

$$S'>P'_n>S''. \tag{5}$$

在《几何原本》中紧紧放在这个定理前还有一个命题：圆内接相似多边形之比等于圆直径平方之比，这又是很容易证明的. 故

$$P_n:P'_n=d^2:d'^2. \tag{6}$$

再由(4)，有

$$P_n:P'_n=S:S''.$$

因 $P_n<S$，故 $P'_n<S''$，但这与(5)矛盾.

如果设 $S''>S'$，也同样会出现矛盾.

定理证毕.

我们不厌其烦地引证了二千多年前的文献，是为了与我们现在都懂得的微积分作一比较. 我们甚至不妨说，19世纪中叶，柯西和魏尔斯特拉斯正是复兴了欧多克萨斯的穷竭法，才完成了微积分基础的奠定. 首先，他们正式给出了极限的定义，这是欧多克萨斯没有做到的：有了极限，他们就以 P_n 的极限作为圆面积的定义，这也是欧多克萨斯没有想到的；有了这一切，他们就再也用不着绕反证法的大弯子了. 他们定义无穷小即是极限为0的变量，从而"真正"地排除了毕达哥拉

斯“单元”以及后来的不可分量的“痕迹”.这只是在欧多克萨斯的基础上走了更明确的一步.他们也是宣告了亚里士多德潜无限思想的“胜利”,把笼罩着的思辨色彩“清除”了.这一点恐怕他们自己也没有想到.千真万确的是,他们把变量、极限等等归结为不等式,确是得了欧多克萨斯的真传.可惜的是,正是这一点成了 $\varepsilon-\delta$ 的罪名,因为它们使人望而生畏了,这却是变量的数学的精华.

不过,凡事有利必有弊.《几何原本》在数学上的严格性成了人们的“模范”以后,也必然会对人的直觉、感觉、不严格的推理有所排斥.而这种排斥时常也把许多极为生动的,通向真理的其它道路封锁了.以亚里士多德而言,潜无限的思想被推到了主导的地位,实无限的思想难道就一无是处了吗? 否,历史证明不是这样.《几何原本》一个最明显的缺点是轻视数学的实际应用.这不是说希腊数学整个都是轻视应用的.即以欧多克萨斯而言,他不仅是一位数学家,还是一个天文学家(他曾经提出一个关于天体运动的模型),他还是一个医生,一个地理学家.另一位更著名的大人物是阿基米德(Archimedes, 287—212, B.C.).他是亚历山大时期(或称希腊化时期)希腊数学和科学的代表人物.他较晚于欧几里得,但二人大异其趣.他不仅在数学,而且在力学、机械学、光学等各方面都有大贡献.他还是一位伟大的发明家,而欧几里得主要贡献则是完成了《几何原本》(其中不少是他的弟子们的功绩),有点像孔夫子说的“述而不作”,而阿基米德的创造天才却是光彩夺目的.因为我们的目的只是讨论微积分的思想与方法的源起,所以现在就不来讨论希腊数学各个时期特点的比较及其功过了.好在到了公元前 2 世纪至前 1 世纪,罗马人征服了希腊.出现了罗马帝国,希腊数学也退到历史的后台去了.

千年沉睡以后,当数学科学再次醒来,已经开始进入资本主义时代了.社会经济的发展要求变了.到了 16 和 17 世纪,人类面临新的数学问题.其中一些重大问题是:求一般几何形体的长度,面积,体积;求曲线的切线;求运动的速度与加速度;求函数的极大与极小等等.我们的读者一眼就可以看出来,当时人类需要的新科学就是微积分.这些问题一方面有明确的实用背景,但又常与哲学上的论争,与人类争取从天主教神学以及亚里士多德的教条下获得思想解放的斗争紧密联系.伽利略在比萨斜塔上的实验(但是科学史的研究表明,他并没有做这个实验,而是用斜面的实验反驳了亚里士多德)、围绕日心说的斗争是大家都熟知的了.新时代呼唤巨人,他们是笛卡儿、哥白尼、伽利略、开普勒直到牛顿和莱布尼茨.下面是一些例子.

第一个例子是关于积分学的.那个时代人们努力的重点是发展希腊人的穷竭法,但是他们又丢了穷竭法中的精华:用复杂的反证法绕过缺少极限理论带来的困难,把问题归结于不等式,从而为 19 世纪的 $\varepsilon-\delta$ 铺平了道路.他们反而又回到了不可分量(亦即毕达哥拉斯的单元),不过更大胆,而且几乎没有多少玄妙的思辨色彩了.开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)有一本书名叫《测量酒桶体积的新科学》,顾名思义,其中会讲到面积和体积.在开普勒看来,圆是无穷多个顶角无穷小的扇形堆成的,球是无穷多个互相平行的厚度无穷小的圆柱形堆成的.伽利略也是这样,例如他认为若一物体(应为质点)作等加速运动,则在 $t=0$ 到 $t=T$ 这段时间走过的距离将由 $\triangle OAB$ 之面积来表示.因为,若在时刻 t,速度为 $A'B'$,伽利略将它乘以无穷小的时间间隔,$\triangle OAB$ 就是由无穷多个直线段 $A'B'$ 组成的,因此他得出结论:距离由

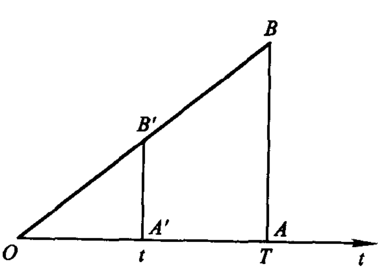

图 1-3

$\triangle OAB$ 之面积来表示(图 1－3).

这样看来,伽利略和开普勒在面积体积问题上是一样的,采用了不可分量的观点.这种观点在伽利略的学生卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri, 1598—1647)的著作里表现得最系统.简单地说,他认为线段是由点组成的,正如链子是由珠子穿成的一样;面是由线组成的,正如布是由纱织成的一样;立体是由平面组成的,正如书是一页一页的纸叠起来的一样.点、线、面就是相应的不可分量,它们在一个或几个维数上是无穷小.

所以,如果说欧多克萨斯是在千方百计地回避无穷小,而为此费尽心思利用了 Archimedes-Eudoxus 公理,利用了不等式,利用了反证法,这一个时代的数学家却是硬着头皮往前闯.虽说不严格,却得到了许多正确的结果,这样不会招致人们的批评吗?卡瓦列里的回答是绝妙的.他说,我的目的只是为了改善穷竭法:我的方法确实不严格,但是我的结果很有用,有用就行.严格不严格那是哲学家的事,别的几何学家不是和我一样不严格吗?

首先,它确实改善了穷竭法.上面我们讲到的希腊的穷竭法太依赖于特殊的几何曲线(例如圆)的特殊性质,现在却有了一定的程式,例如要计算一段抛物线 $y=x^2$ 下的面积 OAB 时(图 1－4),我们把 OA 分成 n 等分,每一段的长记为 d,于是相应的纵坐标是 $d^2,(2d)^2,(3d)^2,\cdots$.如果把 n 取为无穷大,那么图上用实线画的区域都成了直线段,我们用虚线把它们补成矩形的.如果 n 是无穷大,这些矩形和实线所成图形是没有区别的,它们就是不可分量.现在把这些不可分量的面积加起来,就得到 OAB 的面积:

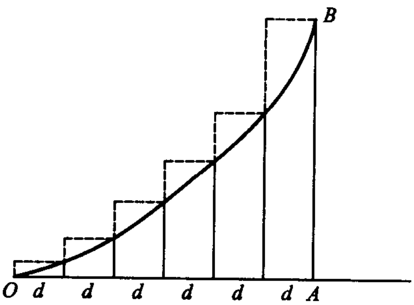

图 1－4

$$
\begin{aligned}
OAB &= d\cdot(d)^2+d\cdot(2d)^2+\cdots+d\cdot(nd)^2\big|_{n=\infty}\\
&= d^3[1^2+2^2+\cdots+n^2]_{n=\infty}\\
&= \left(\frac{OA}{n}\right)^3[1^2+2^2+\cdots+n^2]_{n=\infty}\\
&= OA^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right)\Bigg|_{n=\infty}.
\end{aligned}
$$

这里只用了一个很初等的代数公式

$$1^1+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

还有 $\frac{1}{n}\Big|_{n=\infty}=0$.前式并不难证,后面的 $\frac{1}{n}\Big|_{n=\infty}=0$ 按卡瓦列里的说法,交给哲学家去管好了.不管怎样,许多人都可以按这个程式去计算积分了.如果把严格性暂置一旁,这确实是很大的进步.

第二个例子是关于速度.速度和加速度这些运动学概念的研究在当时的重要性我们已在上面讲过.如果运动轨迹用 $x=x(t)$ 来表示,则大家知道 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 表示平均速度.现在要求瞬时速度,可是又不能令 $\Delta t=0$,因为那样一来就连运动也没有了(牛顿语),所以牛顿称 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 为最初比,然后让 Δt 逐渐趋近 0(请注意,牛顿在这里不但使用了趋近的说法,还多次用了"极限"一词,只不过那时并没有明确的极限概念,牛顿也没有花功夫去说明极限的含意是什么),于是最初比有一个"极