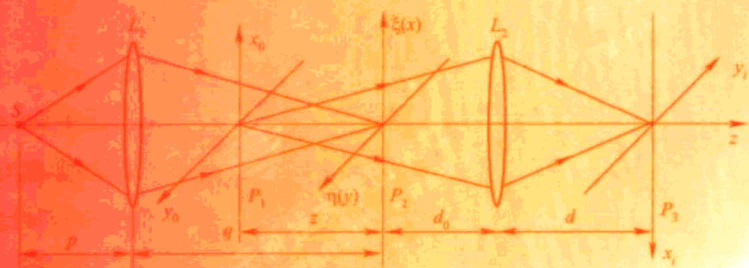
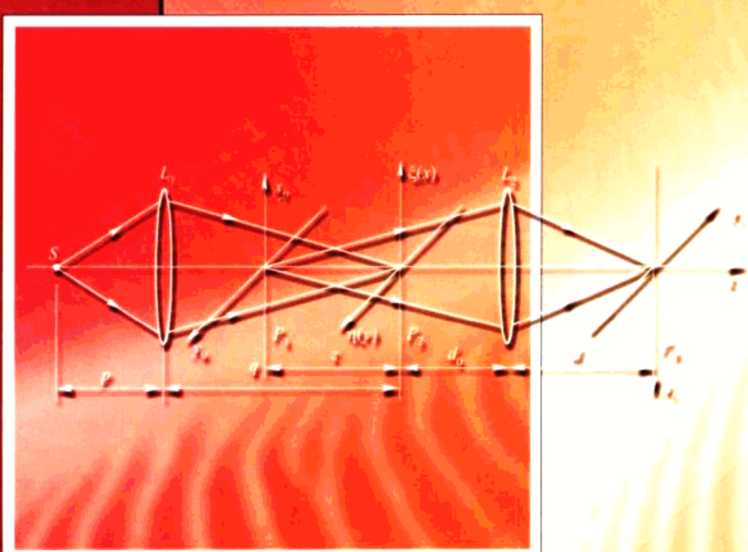
研究生系列教材

现代光学





刘继芳　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

前　言

本书为光学工程、物理电子学、光学、物理学等专业研究生和光信息科学与技术、电子科学与技术等专业高年级本科生而编写。

傅里叶分析方法和线性系统理论的引入使古老的光学焕发了新的青春。随着激光的问世，光学全息、光学信息处理技术迅速发展，原来认为纯粹由电子计算机完成的各种信息处理运算均可由光学系统迅速完成。为了适应相关专业研究生和高年级本科生教学的需要，编者在长期为研究生讲授“现代光学”、为高年级本科生讲授“傅里叶光学”的基础上编写了这本教材。

本教材较系统、全面地反映了现代光学的理论基础和应用基础。主要内容分为三大部分：第一部分为现代光学的数理基础，主要阐述光波场的数学描述、空间频率的概念、傅里叶分析法和线性系统理论、光的衍射理论，并将其用于研究光学系统成像性质和频率特性；第二部分为现代光学的应用，主要讨论光学全息技术和光学信息处理技术；第三部分为现代光学的新进展，主要讲述广义傅里叶变换、小波变换和光学实现方法，以及光学小波变换在信号检测技术中的应用。

本教材各章节的编排以及章节内容的安排既注重知识之间的有机联系，又考虑各自的独立性，并配有习题，便于读者自学，也便于教师根据不同授课对象、对课程的不同要求以及学时数的多少选取适当的讲授内容。

由于编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，敬请读者不吝指正。

刘继芳
2004年6月

第 1 章 现代光学的数学物理基础

光波是电磁波，可由电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 来描述，它们服从电磁场的基本理论和规律，并通过麦克斯韦方程组相互联系。由于引起生理视觉效应、光化学效应以及探测器对光频段电磁波的响应主要是电矢量 $\boldsymbol{E}$，因此通常把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 称为光矢量，把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 随时间的变化称为光振动。

一般来说，光波需要用时间、空间的矢量函数来描述。但是在很多实际应用场合，光波在各向同性介质中传播，不同偏振的光波具有相同的传播特性。因此，可采用标量波近似处理。如果所讨论的光波为平面偏振光波，则光波的电矢量可用同一直角坐标分量来表示，光波电矢量任何时刻都相互平行或反向平行，这无疑可用标量波处理；如所讨论的光波场是非偏振光波，则光波场中任一点的电矢量都无规则地迅速变化，在有限的探测时间内，不表现特定方向的振动优势，这种情况用标量波近似处理也有效。更多的情况是接近满足上述条件，可近似用标量波处理。

1.1 光波场的复振幅描述

本节主要讨论定态光波场。满足如下性质的光波场称为定态光波场：

(1) 光波场中各点的光振动为相同时间频率的简谐振动；

(2) 光波场中各点光振动的振幅不随时间变化，在空间形成稳定分布。

定态光波场可用实值标量函数表示为

$$u(x,\ y,\ z;\ t) = u(x,\ y,\ z)\cos[2\pi\nu t - \varphi(x,\ y,\ z)] \qquad (1.1-1)$$

其中，$(x,\ y,\ z)$为空间一点 P 的位置坐标，ν 为光波的时间频率，$u(x,\ y,\ z)$为光波的振幅，$-\varphi(x,\ y,\ z)$为光波在 P 点的初相。ν 为常量的光波称为单色光波。虽然理想的单色光波并不存在，但是研究单色光具有实际意义，它是研究准单色光和复色光波的基础。

1.1.1 光波场的复振幅描述

为了数学运算方便，通常把光波场用复指数函数表示为

$$u(x,\ y,\ z;\ t) = \mathrm{Re}\{u(x,\ y,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2\pi\nu t-\varphi(x,\ y,\ z)]}\} \qquad (1.1-2)$$

为简单起见，通常又把取其实部的符号 Re{}略去，简写为

$$\mathbf{u}(x,\ y,\ z;\ t) = u(x,\ y,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[2\pi\nu t-\varphi(x,\ y,\ z)]} \qquad (1.1-3)$$

对于单色光波，(1.1-3)式中的时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}$不随空间位置变化，在研究光振动的空间分布时，可将其略去。由此引入光波复振幅的概念，定义光波的复振幅为

$$\mathbf{U}(x,\ y,\ z) = u(x,\ y,\ z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\ y,\ z)} \qquad (1.1-4)$$

显然，复振幅是以振幅为模，初相为辐角的复指数函数，用来描述光波的振幅和相位随空间位置坐标的变化关系。光强随空间位置坐标的变化关系可用复振幅表示为

$$\boldsymbol{I}(x,\ y,\ z)=\mathbf{U}(x,\ y,\ z)\mathbf{U}^*(x,\ y,\ z) \tag{1.1-5}$$

式中，$\mathbf{U}^*$ 为 $\mathbf{U}$ 的复共轭。复振幅的引入，大大方便了光学问题的研究。

光波的最基本形式是平面波、球面波和柱面波。由于任何复杂光波都能用这些基本光波的组合表示，以下简单讨论这些基本光波的复振幅表示。

1. 平面波

平面波的特点是：在各向同性介质中，光波场相位间隔为 2π 的等相面是垂直于传播方向的一组等间距平面，场中各点的振幅为一常量。

如图 1.1－1 所示，设平面光波沿 z 轴方向传播，观察点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，坐标为(x,y,z)，光波在坐标原点的初相为 φ_0，则 P 点的初相为

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\frac{2\pi}{\lambda}z+\varphi_0=kz+\varphi_0 \tag{1.1-6}$$

式中 λ 为光波长，k 为波矢的大小。由于坐标原点选择的任意性，总可使 $\varphi_0=0$，因此，沿 z 轴方向传播的平面波的复振幅可表示为

$$\mathbf{U}(z)=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} \tag{1.1-7}$$

可见，相位函数 $\varphi(z)=kz$ 只随 z 变化，与变量 x、y 无关。

当平面波的传播方向不在 z 轴方向时，用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表示波的传播方向，其方向余弦为 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$，仍设观察点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，于是平面波的复振幅一般可表示为

$$\mathbf{U}(z)=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)} \tag{1.1-8}$$

P 点的相位函数 $\varphi(x,\ y,\ z)=k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$为坐标变量的线性函数。

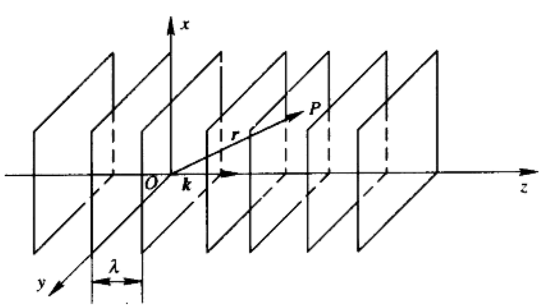


图 1.1－1 沿 z 轴传播的平面波

2. 球面波

点光源发出的光波为球面波，其特征是：相位间隔为 2π 的等相面是一组等间距同心球面，光波场中各点的振幅与该点到球心的距离成反比。由于各种形状的光源都可以看作点光源的集合，因此讨论球面波有实际意义。

若选择直角坐标系的原点与球面波中心重合，xOz 面内的波面线如图 1.1－2 所示。取 $\varphi_0=0$，$r=1$ 处的振幅为 a_0，对于发散球面波，$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同向，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr$；对于会聚球面波，$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 反向，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=-kr$。所以球面波的复振幅为

$$\mathbf{U}(z)=\frac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} & \text{（发散）}\\[2ex] \dfrac{a_0}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} & \text{（会聚）}\end{cases} \tag{1.1-9}$$

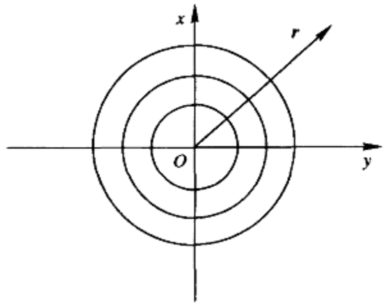


图 1.1－2　球面波示意图

3. 柱面波

均匀无限长同步辐射的线光源发出的光波为柱面波。柱面波的特征是：相位间隔为 2π 的等相面是一组等间距同轴柱面，光波场中各点的振幅与该点到轴线的距离的平方根成反比。

如图 1.1－3 所示，取线光源在一直角坐标轴上，若 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 方向上的投影的大小为 ρ，则柱面波的复振幅为

$$\mathbf{U}(z)=\frac{a_0}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr} & \text{（发散）}\\[2ex] \dfrac{a_0}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} & \text{（会聚）}\end{cases} \tag{1.1-10}$$

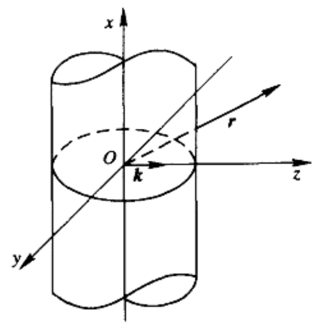


图 1.1－3　柱面波示意图

1.1.2　光波场中任意平面上的复振幅及其空间频率的概念

以上给出的光波复振幅都是三维分布形式。在光学问题中，一般选取光学系统的光轴与 z 轴重合，人们关心的是 z 取一系列常数的二维平面上的光波场分布，比如物面、像面和焦面上的光波场分布。

1. 平面光波场中任意平面上的复振幅

设观察面为 (x, y, z_1) 平面，由(1.1－8)式得到该平面上的复振幅为

$$\mathbf{U}(z)=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z_1\cos\gamma)}=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_1(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)^{1/2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)}$$

令

$$\mathbf{U}_0=u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_1(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)^{1/2}} \tag{1.1-11}$$

对于给定的观察面，z_1 为常量，则 $\mathbf{U}_0$ 也是与 x、y 无关的常量。显然 $\mathbf{U}_0$ 不影响该面上复振幅的相对分布。于是该观察面上复振幅可简写为

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{U}_0 e^{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta)} \tag{1.1-12}$$

考虑到参变量 z_1 取值的任意性，因此，上式就是与 z 轴垂直的任一平面上的光波场复振幅分布的一般形式。

2. 球面光波场中任意平面上的复振幅

这里以发散球面波为例讨论。如图 1.1-4 所示，点光源 $Q(x_0, y_0)$在(x_0, y_0, z_0)面内，观察点 $P(x, y)$在(x, y, z_1)面内，两平面间距离为 $d=z_1-z_0$。Q 到 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，z_0 到 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$，Q 到 z_1 的矢径为 $\boldsymbol{r}_1$，这些矢径的长度分别为

$$\left.\begin{aligned} r &= [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + d^2]^{1/2} \\ r_0 &= (x^2 + y^2 + d^2)^{1/2} \\ r_1 &= (x_0^2 + y_0^2 + d^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-13}$$

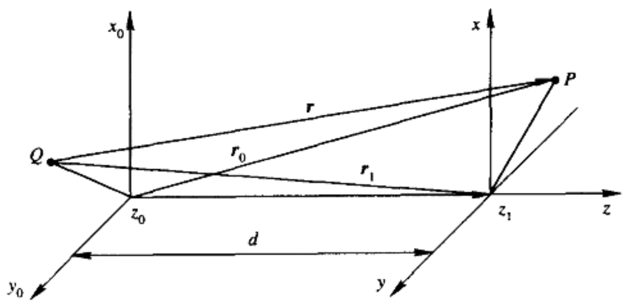


图 1.1-4 离轴发散球面波分析

根据(1.1-9)式，点源 Q 发出的球面波在(x, y, z_1)面上的复振幅为

$$\mathbf{U}(x, y) = \frac{a_0}{r} e^{ikr} \tag{1.1-14}$$

当该光波传播过程满足旁轴条件：点源 Q 到 z 轴的距离和观察点 P 到 z 轴的距离都远小于光波传播距离 d，亦即满足

$$(x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \ll d,\ (x^2 + y^2)^{1/2} \ll d \tag{1.1-15}$$

可将 r_0、r_1 和 r 的表达式作泰勒展开，取旁轴近似为

$$\left.\begin{aligned} r_0 &\approx d + \frac{x^2 + y^2}{2d} \\ r_1 &\approx d + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d} \\ r &\approx d + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2d} \end{aligned}\right\} \tag{1.1-16}$$

由于振幅随 r 的变化比较缓慢，故振幅因子中的 r 可作近似：$r \approx d$，于是得到旁轴近似条件下轴外点源发出的球面波在(x, y, z_1)面上的复振幅分布的表达式为

$$\mathbf{U}(x,\ y)=\frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2d}}=\frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(\frac{x_0^2+y_0^2}{2d}-\frac{x_0x+y_0y}{d}+\frac{x^2+y^2}{2d}\right)} \tag{1.1-17}$$

如果点源在 z 轴上，则有 $x_0+y_0=0$，上式简化为

$$\mathbf{U}(x,\ y)=\frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2d}} \tag{1.1-18}$$

由(1.1－17)和(1.1－18)式可见，在旁轴条件下，球面波在任一平面上的复振幅分布函数的特征是相位因子中含有直角坐标变量的二次项，因此将其相位因子称为二次型相位因子。

如果点源 Q 满足远场条件，即

$$x_0^2+y_0^2\ll\lambda d \tag{1.1-19}$$

则(1.1－17)式中的 $k(x_0^2+y_0^2)/2d$ 项可以忽略，得到

$$\mathbf{U}(x,\ y)=\frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2d}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda d}x+\frac{y_0}{\lambda d}y\right)} \tag{1.1-20}$$

如果观察点 P 的分布范围也都满足远场条件时，即

$$x^2+y^2\ll\lambda d \tag{1.1-21}$$

则(1.1－20)式中的 $k(x^2+y^2)/2d$ 项也可以忽略，于是(1.1－20)式进一步简化为

$$\mathbf{U}(x,\ y)=\frac{a_0}{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda d}x+\frac{y_0}{\lambda d}y\right)} \tag{1.1-22}$$

以上就是在不同近似条件下，球面波在任--平面上的复振幅表达式。

3. 复振幅的空间频率描述

说到频率，人们首先想到的是时间频率，它表示特定波形在单位时间内重复的次数，表明波在时间上的周期性。实际上波也具有空间周期性，因此也可以定义空间频率，用来表示特定波形在空间单位距离内重复的次数。与时间频率不同的是，当我们引入空间频率的概念时，为了同时表征波的传播方向，一般把空间频率定义为矢量形式，它在坐标轴上有相应的空间频率分量，而且其分量可正可负，相应的周期也可正可负。

1) 平面波复振幅的空间频率表示

为了定量描述光波复振幅 $\mathbf{U}(x,\ y)$的空间周期分布，引入新物理量：空间频率 f 和空间周期 Λ，它们在直角坐标系中的对应的分量分别为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ 和$(\Lambda_x,\ \Lambda_y,\ \Lambda_z)$，并把平面波在任一平面的复振幅分布表示式(1.1－12)改写为

$$\mathbf{U}(z)=\mathbf{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\alpha+y\cos\beta)}=\mathbf{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)} \tag{1.1-23}$$

与光波复指数表示式中随时间变化的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu t}$ 比较可见，其空间频率的直角分量分别为

$$\xi=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\quad \eta=\frac{\cos\beta}{\lambda} \tag{1.1-24}$$

空间频率为

$$f=\sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{1.1-25}$$

空间频率常用的单位是线每毫米(l/mm)。相应的空间周期分量分别为

$$\Lambda_x=\frac{\lambda}{\cos\alpha},\quad \Lambda_y=\frac{\lambda}{\cos\beta} \tag{1.1-26}$$

空间周期为

$$\Lambda = \frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \tag{1.1-27}$$

因此，观察平面(x, y, z_1)上平面波的复振幅可用空间频率表示为

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{U}_0 e^{i2\pi(\xi x + \eta y)} \tag{1.1-28}$$

由于 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是波矢量 $\boldsymbol{k}$ 相对于 x 轴和 y 轴的方向余弦，可见沿波矢量 $\boldsymbol{k}$ 方向的空间周期最小，且等于 λ。空间频率的示意图如图 1.1 - 5 所示。图 1.1 - 5(a)为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 取任意方向时的空间周期分量，图 1.1 - 5(b)为空间频率取负值的示意图。

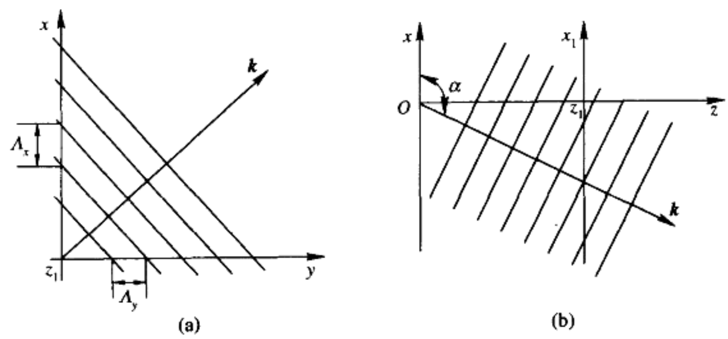


图 1.1 - 5 平面波的空间频率示意图

(a) $\boldsymbol{k}$ 为任意方向；(b) 空间频率分量 $\xi<0$

2) 球面波复振幅的空间频率表示

对于球面波的复振幅，虽然其振幅 a_0/r 随空间位置坐标变化，但是它是单调变化的，无周期性可言，在一定的近似条件下，振幅 $a_0 e^{ikd}/d$ 成为一常量，故无空间频率而言。对于相位，虽然在三维空间具有周期性，但在上述观察面上，即使在旁轴条件下，也含有空间坐标 x, y 的二次因子，如果要定义空间频率的话，空间频率也是随空间坐标变化的函数。

但是，当点源的位置与观察点的分布范围都满足远场条件时，若令 $\boldsymbol{r}_1$ 对 $x(x_0)$、$y(y_0)$ 轴的方向角分别为 α 和 β，并注意到 $\boldsymbol{r}_1$ 是 Q 点到 z_1 点的矢径，则有

$$\frac{x_0}{d} = -\cos\alpha,\ \frac{y_0}{d} = -\cos\beta \tag{1.1-29}$$

代入(1.1 - 22)式得到球面波复振幅的空间频率表示式为

$$\mathbf{U}(x,\ y) = \frac{a_0}{d} e^{ikd} e^{i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)} = \frac{a_0}{d} e^{ikd} e^{i2\pi(\xi x + \eta y)} \tag{1.1-30}$$

式中 $\xi = \dfrac{\cos\alpha}{\lambda}$，$\eta = \dfrac{\cos\beta}{\lambda}$。

可见，当允许作上述一系列近似后，任一平面上的复振幅 $\mathbf{U}(x,\ y)$ 从球面波就变成观察面上限定范围内的、具有空间频率(ξ, η)的一列平面波。如图 1.1 - 6 所示，这是来自远处点光源的光波，在一个小的观察范围可近似看作平面波。

图 1.1 - 6 点光源远处的光波

1.2　二维傅里叶变换与频谱函数的概念

人们把傅里叶分析的方法引入光学，研究光的传播、干涉和衍射等现象，使古老的光学焕发了新的青春，诞生了光学的新分支。

本节介绍傅里叶级数和频谱、傅里叶变换和频谱函数。

1.2.1　傅里叶级数与频谱

1. 傅里叶级数

一个函数系 $\{\varphi_n(x)\}$：$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，…，$\varphi_n(x)$，…，其中每一个函数都是定义在区间 $[a, b]$ 上的实函数或实变量的复值函数，如果它们满足

$$\begin{cases}\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n^*(x)\,\mathrm{d}x = 0 & (m \neq n,\ m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\\ \int_a^b |\varphi_m(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_m^*(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_m > 1 & (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\end{cases} \tag{1.2-1}$$

则称函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[a, b]$ 上正交，其中 $\varphi_n^*(x)$ 是 $\varphi_n(x)$ 的复共轭函数。

如果 $\lambda_m=1$，函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 称为标准(归一化)正交函数系。

如果在正交函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 之外，不存在函数 $\psi(x)$ $(\psi(x)\neq 0$，且 $0<\int_a^b|\psi(x)|^2\mathrm{d}x<\infty)$ 使以下等式成立：

$$\int_a^b \psi^*(x)\varphi_n(x) = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

则此函数系称为完备的正交函数系。

在数学上把任意函数按上述正交函数系“正交函数展开”的方法，可以方便地解决光学中的许多问题，现代光学中常用的正交函数系很多，如傅里叶光学中的三角函数系、复指数函数系，成像理论中的勒让德多项式、泽尼克多项式，光学数字计算中的沃尔什函数系等都是这类完备的正交函数系。

在三角函数系和复指数函数系展开得到的函数项级数，就是大家熟知的傅里叶级数。它是傅里叶和欧拉分别在 18 世纪末和 19 世纪初提出的。以 l 为周期的函数 $f(x)$ 满足狄里赫利条件，在区间 $[-l/2, l/2]$ 或 $[-l/2+a, l/2+a]$（a 为任意实常数）上可展开为如下形式的傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \tag{1.2-2}$$

式中 a_n、b_n 为傅里叶系数，分别为

$$\begin{cases}a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{-l/2}^{l/2} f(x)\cos n\omega x\,\mathrm{d}x & (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{-l/2}^{l/2} f(x)\sin n\omega x\,\mathrm{d}x & (n = 1,\ 2,\ \cdots)\end{cases} \tag{1.2-3}$$

其中 ω 为圆频率，它与周期 l 和频率 ξ 的关系为 $\omega=2\pi/l=2\pi\xi$。

同样，函数 $f(x)$ 也可以展开为复指数形式的傅里叶级数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) \tag{1.2-4}$$

式中 c_n 为复数形式傅里叶系数，且

$$c_n = \frac{1}{l}\int_{-l/2}^{l/2} f(x) e^{-in\omega x}\, dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.2-5}$$

复系数 c_n 与 a_n、b_n 之间的关系为

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = |c_n| e^{i\Phi_n}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = |c_{-n}| e^{i\Phi_{-n}}$$

其中 $|c_n|$ 和 $|c_{-n}|$ 为复系数 c_n 和 c_{-n} 的模，且

$$|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Φ_n 和 Φ_{-n} 为复系数 c_n 和 c_{-n} 的幅角，且

$$\Phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\Phi_{-n} = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

所以有 $\Phi_n = -\Phi_{-n}$。

2. 频谱的概念

由于满足一定条件的函数可展开为傅里叶级数，因此我们可以把一个复杂的周期性波形或振动，或者一个周期性的二维光学信号分解成各次谐波之和，这些谐波的振幅和相位则可通过傅里叶系数 a_n、b_n 计算出来。在实际光学应用中，人们感兴趣的往往不是 a_n、b_n 本身，而是想知道一个复杂周期波由哪些谐波分量组成，它们各自占的比重有多大，也就是说，对各谐波分量的振幅和相位信息感兴趣。为此下面引进频谱的概念。

设所研究的复杂波函数 $f(x)$ 的周期为 l，在区间 $[-l/2, l/2]$ 上绝对可积，则其傅里叶级数展开式可改写为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{l}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos 2\pi n\xi x + b_n \sin 2\pi n\xi x) \end{aligned} \tag{1.2-6}$$

式中 $\cos 2\pi n\xi x$ 和 $\sin 2\pi n\xi x$ 是同频率 $n\xi$ 的谐波分量，它们的和仍为同频率的余弦分量，即

$$a_n \cos 2\pi n\xi x + b_n \sin 2\pi n\xi x = A_n \cos(2\pi n\xi x + \phi_n)$$

其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 和 $\phi_n = \arctan(b_n/a_n)$ 分别表示频率为 $n\xi$ 的谐波振幅和相位。因此该复杂波函数的傅里叶级数可进一步改写成如下形式：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n\xi x + \phi_n) \tag{1.2-7}$$

显然，一个复杂周期波函数(周期信号)可分解为分立频率的谐波分量之和。频率为 ξ 的谐波称为基频分量，频率为 2ξ，3ξ，…，$n\xi$ 的谐波分别称为二次，三次，…，n 次谐波分量(统

称为高次谐波分量)，$a_0/2$ 则称为零频分量或直流分量。

频谱的概念，广义上讲就是求一个函数的傅里叶级数或一个函数的傅里叶变换，因此傅里叶分析也称为频谱分析。实际应用中的频谱是指各谐波分量振幅 A_n 的大小和相位 ϕ_n 随频率的分布，分别称为振幅频谱和相位频谱。由于相位频谱应用较少，通常提到频谱大都指振幅频谱。周期函数也可以展开为复指数形式的傅里叶级数，因此把 $|c_n|$ 和 $|c_{-n}|$、Φ_n 和 Φ_{-n} 随频率的变化也称为振幅频谱和相位频谱，而把复系数 c_n 和 c_{-n} 随频率的变化也称为复系数频谱。

需要指出的是，由 $|c_n|$ 和 $|c_{-n}|$、复系数 c_n 和 c_{-n} 表示的频谱有两种特征：一是出现了负频率，把频率扩展到了 $-\infty$；二是各谐波分量的振幅减小了一半，即 n 次谐波振幅一分为二，一半放在了正频率 $n\xi$ 处，另一半放在了负频率 $-n\xi$ 处。与实际相矛盾的负频率的出现，是由于一个实函数展开成复指数形式的傅里叶级数，其和应是实函数，这只有级数中复指数函数成对以复共轭形式出现才可能。也就是说，有一个正的 n 次谐波出现，那么必然有一个负的 n 次谐波相对应。所以从数学上来讲，出现负频率是很自然的。在物理上，可以理解为在数学运算过程中把实际频率范围扩展了；也可以给负频率赋予新的解释，如在复振幅的空间频率表示中，正、负频率分别表示不同方向传播的平面波。因此，正负频率可同等看待。我们同样可以从负频率处得到某次谐波的振幅和相位信息。

为了更深刻地理解不同形式的频谱的概念，我们以实例来进一步说明。图 1.2－1 所示为一周期为 T、幅度为 A、脉冲宽度为 τ 的矩形脉冲，其数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases}A & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0 & -\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{\tau}{2},\ \dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

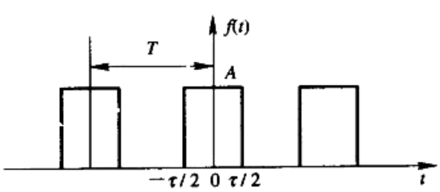


图 1.2－1　周期性矩形脉冲

由(1.2－5)式，其复数形式的傅里叶系数为

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}2\pi nt}{T}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin\dfrac{\pi n\tau}{T}}{\dfrac{\pi n\tau}{T}}\qquad(n=0,\ \pm1,\ \cdots)\tag{1.2-8}$$

因此有：

$$c_0=\lim_{n\to0}\frac{A\tau}{T}\frac{\sin\dfrac{\pi n\tau}{T}}{\dfrac{\pi n\tau}{T}}=\frac{A\tau}{T}$$

$$c_n=c_{-n}=\frac{A\tau}{T}\frac{\sin\dfrac{\pi n\tau}{T}}{\dfrac{\pi n\tau}{T}}$$

该周期性矩形脉冲的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n = \frac{2A\tau}{T}\left|\frac{\sin\frac{\pi n\tau}{T}}{\frac{\pi n\tau}{T}}\right| \tag{1.2-9}$$

至于相位Φ_n，可由(1.2-8)式很简单地求出。由于c_n是一实数，当$n\pi\tau/T$在Ⅰ、Ⅱ象限时，c_n为正，写成复数形式为

$$c_n = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin\frac{\pi n\tau}{T}}{\frac{\pi n\tau}{T}}e^{i0}$$

即相位$\Phi_n=0$；当$n\pi\tau/T$在Ⅲ、Ⅳ象限时，c_n为负，写成复数形式为

$$c_n = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin\frac{\pi n\tau}{T}}{\frac{\pi n\tau}{T}}e^{i\pi}$$

即相位$\Phi_n=\pi$。由以上结果可以作出周期性矩形脉冲的各种频谱图，结果如图1.2-2所示（为作图方便，假设$\tau/T=5$）。

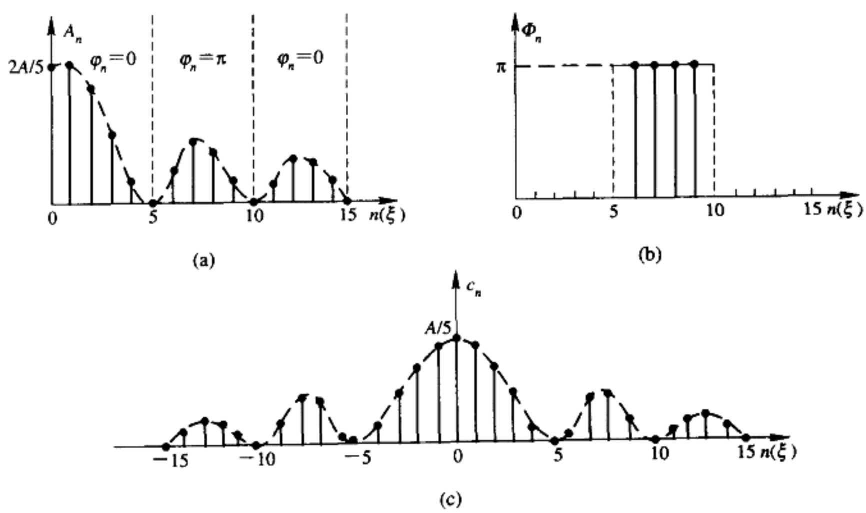


图1.2-2　周期性矩形脉冲频谱图

(a) 振幅频谱图；(b) 相位频谱图；(c) 复系数频谱图

1.2.2　傅里叶变换与频谱函数

1. 傅里叶变换的定义与性质

傅里叶级数对分析周期性信号非常有效，但是在现代光学中，遇到的信号多是非周期性的，这需要采用傅里叶变换的方法将其展开为频率连续的无限谐波之和，因此傅里叶变换在实际应用中就显得更加重要、更为普遍。

在科学技术和许多实际应用领域，傅里叶变换是一个极其有用的数学工具。但是国际上对傅里叶变换和逆变换的定义形式还没有统一规定，不同的文献资料往往采用不同的式子，这里仅介绍工程上最常用、形式最简洁的傅里叶变换形式。类似于周期性函数的正交展开，如果函数$f(x)$在整个x轴上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$$

则该函数可展开为频率连续的无限谐波分量之和

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{1.2-10}$$

其中ξ为频率，$F(\xi)$为$f(x)$的频谱函数，由下式决定

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \tag{1.2-11}$$

$f(x)$则叫做$F(\xi)$的原函数。(1.2－10)式称为$F(\xi)$的傅里叶逆变换，(1.2－11)式则称为$f(x)$的傅里叶变换。$F(\xi)$的傅里叶逆变换和$f(x)$的傅里叶变换可用符号简记为

$$f(x)=\mathrm{FT}^{-1}\{F(\xi)\},\quad F(\xi)=\mathrm{FT}\{f(x)\}$$

或

$$f(x)\leftarrow F(\xi),\quad f(x)\rightarrow F(\xi)$$

如果$f(x)$的傅里叶变换为$F(\xi)$，而$F(\xi)$的傅里叶逆变换正好是$f(x)$，我们说$f(x)$和$F(\xi)$构成一个傅里叶变换对，并简记为

$$f(x)\leftrightarrow F(\xi)$$

下面介绍一下傅里叶变换的一些常用的性质。

1）线性性质

若$f_1(x)\leftrightarrow F_1(\xi)$，$f_2(x)\leftrightarrow F_2(\xi)$，$c_1$和$c_2$为任意复常数，则

$$c_1f_1(x)\pm c_2f_2(x)\leftrightarrow c_1F_1(\xi)\pm c_2F_2(\xi)$$

即函数线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的线性组合，这表明傅里叶变换是线性变换，是分析线性系统的有力工具。

2）平移特性

(1) 位移和时移。若$f(x)\leftrightarrow F(\xi)$，$x_0$为任意实数，则有

$$f(x\pm x_0)\leftrightarrow F(\xi)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi\xi x_0}$$

也就是函数$f(x)$在空域或时域平移，只引起其频谱的相位线性平移，而不改变其振幅频谱。

(2) 频移。若$f(x)\leftrightarrow F(\xi)$，$\xi_0$为任意实数，则有

$$f(x)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}2\pi\xi_0x}\leftrightarrow F(\xi\pm\xi_0)$$

即频谱函数$F(\xi)$在频率轴上平移$\pm\xi_0$，相当于原函数$f(x)$乘以因子$\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}2\pi\xi_0x}$，信号函数$f(x)$与因子$\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}2\pi\xi_0x}$相乘，相当于和频率为$\xi_0$的余弦函数相乘，这正是信号的调制过程，所以频移特性也称为调制特性。

3）相似性定理

相似性定理也称为尺度变换定理。若$f(x)\leftrightarrow F(\xi)$，$a$，$b$为任意实常数，则有

$$f(ax)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

和

$$\frac{1}{|b|}f\left(\frac{x}{b}\right) \leftrightarrow F(b\xi)$$

这表明函数在空域或时域上压缩，则在频域上必然展宽，而且压缩和展宽的因子相同。

4）翻转性质

如果 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，则

$$f(-x) \leftrightarrow F(-\xi)$$

由于函数 $f(-x)$的图形是 $f(x)$的图形按垂直轴的翻转或镜像，因此该性质表明函数 $f(x)$按垂直轴翻转时，它的频谱将作相应的翻转。也就是说，在解决实际问题时，坐标轴方向的选取，并不改变函数的频谱。

5）对称性质

如果 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，则有

$$F(-x) \leftrightarrow f(\xi)$$

这表明当频谱函数 $f(\xi)$与函数 $f(x)$相同时，它对应的原函数就是 $F(-x)$，其函数的形式与 $f(x)$的频谱函数 $F(\xi)$相同，只是自变量不同且异号。频谱函数 $F(\xi)$的逆变换是$f(x)$，由翻转性质可知，它的正变换则是 $f(-x)$。这说明傅里叶变换和逆变换在数学上并没有本质区别，通过改变某个域内坐标轴的方向，正变换就变成逆变换。这为光学中分析空域到频域、频域到空域的变换带来极大方便。

6）共轭性质

如果 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，$f^*(x)$和 $F^*(-\xi)$分别为 $f(x)$和 $F(-\xi)$的复共轭，则有

$$f^*(x) \leftrightarrow F^*(-\xi)$$

这一性质告诉我们，对于实函数（实际遇到的信号函数多是实函数）的频谱 $F(\xi)$，只要知道 $\xi \geqslant 0$ 的函数值，就知道了整个频谱分布，这因为在 $\xi<0$ 时，$F(\xi)=F^*(-\xi)$。

7）面积性质

若 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，则有

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

和

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

该性质表明，$f(x)$在 $x=0$ 点的函数值 $f(0)$等于它的频谱 $F(\xi)$在频率坐标所包围的面积；同样，$F(0)$之值等于原函数 $f(x)$在空域或时域坐标所包围的面积。

由该性质不难得到

$$\left|\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{f(0)}\right| \times \left|\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{F(0)}\right| = 1$$

式中前一个因子为等效面积，后一个因子为等效带宽。这表明对于任意信号函数，其等效面积和等效带宽积都等于 1。

8）微分性质

设 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \leftrightarrow \mathrm{i}2\pi\xi F(\xi), \quad \frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}x^{(n)}}f(x) \leftrightarrow (\mathrm{i}2\pi\xi)^n F(\xi)$$

以及

$$(-\mathrm{i}2\pi x)f(x) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}F(\xi), \quad (-\mathrm{i}2\pi x)^n f(x) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}\xi^{(n)}}F(\xi)$$

这一性质表明，函数的微分运算可以通过傅里叶变换简化为乘积运算。

9）积分性质

设 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，且 $F(0)=0$，则有

$$\int_{-\infty}^{x} f(x')\,\mathrm{d}x' \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}2\pi\xi}F(\xi)$$

如果 $F(0)\neq 0$，则

$$\int_{-\infty}^{x} f(x')\mathrm{d}x' \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}2\pi\xi}F(\xi) + \frac{1}{2}F(0)\delta(\xi)$$

式中 $\delta(\xi)$为 δ 函数。

当 $f(0)=0$ 时，则

$$\frac{1}{-\mathrm{i}2\pi x}f(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\xi} F(\xi')\,\mathrm{d}\xi'$$

由此性质可见，函数的积分运算可通过傅里叶变换简化为除法运算。

10）乘积定理

设 $f_1(x) \leftrightarrow F_1(\xi)$，$f_2(x) \leftrightarrow F_2(\xi)$，则有

$$f_1(x)\cdot f_2(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau)F_2(\xi-\tau)\,\mathrm{d}\tau = F_1(\xi) * F_2(\xi)$$

即两个函数乘积的傅里叶变换等于两个函数傅里叶变换的卷积。

11）卷积定理

设 $f_1(x) \leftrightarrow F_1(\xi)$，$f_2(x) \leftrightarrow F_2(\xi)$，则有

$$f_1(x) * f_2(x) \leftrightarrow F_1(\xi)\cdot F_2(\xi)$$

即两个函数卷积的傅里叶变换等于两个函数傅里叶变换的乘积。

12）能量积分

设 $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

如果 $f(x)$表示某光波场的复振幅分布，左端积分就表示该光波场在所研究的整个区域的总能量，通常称为能量积分。该性质表明空域或时域内的总能量等于频率域内的总能量，能量总是守恒的。

2. 二维傅里叶变换

在现代光学中，通常研究的光学信号是指某个平面上的光强分布或振幅分布，它是二维空间坐标函数，需要用二维傅里叶变换的理论来分析。因此二维傅里叶变换理论在现代光学中应用更为普遍。二维傅里叶变换的定义可由一维傅里叶变换推广得到，二维傅里叶变换具有一维傅里叶变换的所有性质。这里仅给出二维傅里叶变换的定义并作一些简要

说明。

（1）直角坐标系中可分离变量函数的二维傅里叶变换。

如果函数 $f(x, y)$ 满足狄里赫利条件，则它的傅里叶变换存在，其变换式和逆变换式分别定义为

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi x+\eta y)}\, dx\, dy \tag{1.2-12}$$

和

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta) e^{i2\pi(\xi x+\eta y)}\, d\xi\, d\eta \tag{1.2-13}$$

若二维函数在直角坐标系中可以写成两个一元函数的乘积，即

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则有

$$\begin{aligned} \mathrm{FT}\{f(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi x+\eta y)}\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{-i2\pi\xi x}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) e^{-i2\pi\eta y}\, dy \\ &= \mathrm{FT}\{f_X(x)\} \cdot \mathrm{FT}\{f_Y(y)\} \end{aligned} \tag{1.2-14}$$

可见，二维可分离变量函数的傅里叶变换可由两个一维傅里叶变换式的乘积获得。

（2）极坐标系中可分离变量函数的二维傅里叶变换。

极坐标系中可分离变量的二维函数可表示为

$$f(r, \theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta)$$

它的最简单的一类形式是圆对称函数

$$f(r, \theta) = f_R(r)$$

即它仅仅是半径 r 的函数，与极角 θ 无关。为了得到这类函数的傅里叶变换式，对空域和频域平面分别作坐标变换：

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta \qquad & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r\sin\theta \qquad & \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{空域平面} \tag{1.2-15}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi = \rho\cos\varphi \qquad & \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \eta = \rho\sin\varphi \qquad & \varphi = \arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{频域平面} \tag{1.2-16}$$

若设函数 $f(r, \theta)$ 的傅里叶变换为 $F(\rho, \varphi)$，圆对称函数 $f_R(r)$ 的傅里叶变换为 $F_0(\rho, \varphi)$，把(1.2-15)式和(1.2-16)式代入(1.2-12)式，得到

$$\begin{aligned} F_0(\rho, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr \cdot r f_R(r) e^{-i2\pi r\rho(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)} \\ &= \int_0^{+\infty} dr \cdot r f_R(r) \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-i2\pi r\rho\cos(\theta-\varphi)} \end{aligned} \tag{1.2-17}$$

利用零阶第一类贝塞尔函数的积分表达式

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ia\cos(\theta-\varphi)}\, d\theta$$

(1.2 - 17)式简化为频域半径 ρ 的一维函数

$$F_0(\rho,\varphi)=2\pi\int_0^{+\infty} rf_R(r)J_0(2\pi r\rho)\,\mathrm{d}r \tag{1.2 - 18}$$

可见，圆对称函数的傅里叶变换也是圆对称的，而且这一类函数可作为一维函数来处理。这类变换称之为傅里叶-贝塞尔变换或零阶汉克尔变换，用 $\mathrm{BT}\{\cdot\}$ 和 $\mathrm{BT}^{-1}\{\cdot\}$ 分别表示傅里叶-贝塞尔变换和逆变换。这一类变换在现代光学中应用十分广泛。

傅里叶-贝塞尔变换除了具有傅里叶变换的所有性质之外，还有如下性质：

$$\mathrm{BTBT}^{-1}\{f_R(r)\}=\mathrm{BT}^{-1}\mathrm{BT}\{f_R(r)\}=f_R(r)$$

以及

$$\mathrm{BT}\{f_R(ar)\}=\frac{1}{a^2}F_0\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

1.3 卷积与相关

卷积与相关都是由积分定义的两个函数的相乘运算。由于在一定条件下光学系统的成像过程就是一卷积过程，相关可用来研究两个函数的相似程度，相关函数可作为两束光相干性的量度等，因此在现代光学中应用十分广泛。本节介绍卷积与相关的定义、计算及其主要性质。

1.3.1 卷积的定义、性质和计算

1. 卷积的定义和性质

设 $f(x)$ 和 $h(x)$ 是两个实函数，其卷积定义为

$$g(x)=f(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)h(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{1.3 - 1}$$

根据积分的几何意义，可以把求卷积理解为求两个函数 $f(\xi)$ 和 $h(x-\xi)$ 重叠部分的面积。

卷积具有下列的一些性质。

1) 卷积的代数律

卷积满足交换律，即

$$f(x)*h(x)=h(x)*f(x)$$

卷积满足分配律，若 a，b 为两实常数，则有

$$[av(x)+bw(x)]*h(x)=av(x)*h(x)+bw(x)*h(x)$$

卷积满足结合律，即

$$[v(x)*w(x)]*h(x)=v(x)*[w(x)*h(x)]$$

2) 位移不变性

若 $g(x)=f(x)*h(x)$，x_0 为任意实常数，则

$$f(x-x_0)*h(x)=g(x-x_0),\quad f(x)*h(x-x_0)=g(x-x_0)$$

这一性质表明，在作卷积运算的两个函数中，其中任一个函数的位移都不改变卷积的函数形式，卷积的函数只是作一个相同的位移。