中学教师继续教育丛书

数学

初中数学解题研究

张可法 主编

湖南师范大学出版社

初中数学解题研究

主　　编：张可法

组稿编辑：罗灵山

责任编辑：陈灿华

[redacted]

湖南[redacted]学出[redacted]出[redacted]

[redacted]市[redacted]山

湖南省新华书[redacted]县[redacted]刷厂印刷

850×1168[redacted]印[redacted]千字

1999 年 5 月第 1 版　1999 年 6 月第 2 次印刷

印数：11201—16250 册

ISBN7—81031—769—5/G·328

定价：8.10 元

前　言

振兴民族的希望在教育，振兴教育的希望在教师。根据终身教育的思想，加强中学教师继续教育的教材建设，积极推进教育观念、教育思想、教学内容、课程体系、教育技术和教学方法的现代化，建立和完善适应21世纪基础教育改革和发展需要的中学教师继续教育制度，是造就一支高素质的中学教师队伍的重大举措。

为了使我省中学教师的继续教育能更好地开展，教师的教育教学能力和知识水平能尽快提高，我处从1998年4月开始，组织一批比较熟悉中学教师继续教育的专家编写了这套中学教师继续教育丛书。本册由张可法（常德教育学院）拟定编写提纲，第1章和第4章由彭时俊（衡阳教育学院）编写，第2章由张可法编写，第3章由黄立中（株洲教育学院）编写，第5章§1～§7、§10由周继军（长沙教育学院）编写，第5章§8、§9由资斌（耒阳二中）编写．

然后，经集体讨论修改，最后由张可法统编定稿.

在教材编写过程中，尽管编者倾注了大量心血，力求使教材尽量多反映最新学科知识发展动态、教育教学改革研究和实践成果，也力求使教材在先进性、科学性与针对性、实效性方面尽量统一，但由于中学教师继续教育教材的编写是一项全新的工作，能否达到预期目的，尚待实践检验。我们衷心希望从事继续教育工作的同志和接受培训的学员，对这套丛书多提宝贵意见，以便使该丛书在今后不断完善。

这套教材的编写出版，参考了国内外、省内外有关资料，也得到了许多专家、教授的热情帮助和精心审定，在此，谨表诚挚的谢意。

湖南省教育委员会师范教育处

1999 年 4 月 24 日

目　录

第1章　绪论……………………………………………………（1）
§1　数学习题的意义、作用及其分类 ……………………（1）
1.1　数学习题的意义 ……………………………………（1）
1.2　数学习题的作用 ……………………………………（4）
§2　数学解题程序及其分析…………………………………（21）
2.1　理解题意…………………………………………（21）
2.2　拟订方案…………………………………………（27）
2.3　实施解答…………………………………………（33）
2.4　检查小结…………………………………………（37）
§3　提高数学解题能力的途径………………………………（39）
3.1　深入理解概念和命题……………………………（40）
3.2　熟悉基本的解题方法……………………………（42）
3.3　精心选择讲解例题………………………………（43）
3.4　切实加强思维能力的训练………………………（45）
3.5　钻研典型问题……………………………………（54）
3.6　重视非智力因素…………………………………（56）
第2章　解题策略 ………………………………………………（57）
§1　初中数学常用解题策略…………………………………（57）
1.1　顺推与倒推………………………………………（57）
1.2　正面与反面………………………………………（69）
1.3　特殊与一般………………………………………（72）
1.4　局部与整体………………………………………（77）
1.5　类比与联想………………………………………（82）

1.6　化归……………………………………………… (88)
§2　数学解题策略应遵循的原则 …………………… (100)
2.1　目的性原则 ………………………………… (100)
2.2　熟悉化原则 ………………………………… (102)
2.3　简单化原则 ………………………………… (104)
2.4　具体化原则 ………………………………… (105)
2.5　和谐化原则 ………………………………… (106)
2.6　全面性原则 ………………………………… (108)
第 3 章　解题方法……………………………………… (110)
§1　数学解题方法的实质及其分类 ………………… (110)
§2　数学解题方法中的几个关系 …………………… (113)
2.1　数学解题方法与数学教学 …………………… (113)
2.2　数学解题方法与数学方法 …………………… (115)
2.3　数学解题方法与数学思维 …………………… (115)
2.4　数学解题方法与数学解题策略 ……………… (116)
2.5　数学解题方法与数学概念 …………………… (116)
2.6　数学解题方法与数学解题技巧 ……………… (116)
§3　初中数学常用解题方法 ………………………… (117)
3.1　消去法 ………………………………………… (117)
3.2　配方法 ………………………………………… (121)
3.3　待定系数法 …………………………………… (123)
3.4　拆补法 ………………………………………… (125)
3.5　演绎法 ………………………………………… (128)
3.6　归纳法 ………………………………………… (132)
§4　初中数学选择题常用解法 ……………………… (136)
4.1　推算对照法 …………………………………… (136)
4.2　验证法 ………………………………………… (138)
4.3　淘汰法 ………………………………………… (140)

4.4 特值法 …………………………………………… (143)
4.5 图象观察法 ………………………………………… (143)
第 4 章 误解辨析 ………………………………………… (145)
§1 知识性错误 ………………………………………… (145)
1.1 概念模糊 ………………………………………… (145)
1.2 忽视隐含条件 ……………………………………… (146)
1.3 增添潜在假设 ……………………………………… (149)
1.4 不注意定理、公式、法则的条件 ………………… (151)
1.5 忽视特例 ………………………………………… (151)
§2 逻辑性错误 ………………………………………… (153)
2.1 转换论题 ………………………………………… (153)
2.2 虚假理由 ………………………………………… (154)
2.3 循环论证 ………………………………………… (156)
2.4 不等价变换 ……………………………………… (158)
2.5 以偏概全 ………………………………………… (160)
2.6 分类不当 ………………………………………… (160)
§3 策略性错误 ………………………………………… (161)
3.1 类比不当 ………………………………………… (161)
3.2 变更不当 ………………………………………… (163)
3.3 不善于正难则反 …………………………………… (165)
3.4 不善于从整体出发 ………………………………… (166)
3.5 不善于运用“黑箱方法” ………………………… (169)
§4 心理性错误 ………………………………………… (170)
4.1 心理能力不足 ……………………………………… (170)
4.2 缺乏正确的心理势态 ……………………………… (172)
4.3 心理品质不良 ……………………………………… (174)
第 5 章 初中数学常见疑难问题解析 ………………… (176)
§1 实数 ……………………………………………… (176)

1.1　基本概念和性质 …………………………… (176)
1.2　有理数和无理数的判定 ……………………… (178)
§2　根式的化简 ………………………………… (180)
2.1　二次根式的基本性质和运算法则 …………… (180)
2.2　二次根式的化简 …………………………… (181)
2.3　复合二次根式的化简 ……………………… (183)
2.4　共轭根式的化简求值 ……………………… (185)
§3　非负数 ……………………………………… (186)
3.1　基础知识 …………………………………… (186)
3.2　非负数的应用 ……………………………… (187)
§4　奇、偶数与完全平方数 …………………… (194)
4.1　奇数与偶数 ………………………………… (195)
4.2　完全平方数 ………………………………… (199)
§5　怎样求代数式的值 ………………………… (204)
5.1　整体代入法 ………………………………… (204)
5.2　凑配法 ……………………………………… (205)
5.3　公式变形法 ………………………………… (207)
5.4　解方程（组）法 …………………………… (207)
5.5　设参法 ……………………………………… (208)
5.6　韦达定理法 ………………………………… (208)
§6　一元二次方程 ……………………………… (209)
6.1　求一元二次方程的解及一元二次方程根的
简单性质 …………………………………… (209)
6.2　判别式的应用 ……………………………… (214)
§7　韦达定理及其应用 ………………………… (220)
7.1　求根或求根的对称式的值 ………………… (221)
7.2　确定方程中的字母系数 …………………… (222)
7.3　构造新方程 ………………………………… (223)

7.4 根的讨论 …………………………………………………… (225)
§8 辅助线的作法 …………………………………………… (229)
8.1 添特殊线法 …………………………………………… (230)
8.2 线段平移法 …………………………………………… (232)
8.3 图形旋转法 …………………………………………… (233)
8.4 轴对称变换法 ………………………………………… (235)
8.5 位似变换法 …………………………………………… (236)
8.6 构造图形法 …………………………………………… (238)
§9 有关面积问题 ……………………………………………… (240)
9.1 有关面积的计算 ……………………………………… (240)
9.2 有关面积的证明 ……………………………………… (242)
9.3 有关面积的作图 ……………………………………… (243)
9.4 有关面积的最值 ……………………………………… (244)
9.5 运用面积法解题 ……………………………………… (245)
§10 几何定值问题………………………………………… (247)
10.1 以静制动法………………………………………… (247)
10.2 极端原理法………………………………………… (249)
参考文献…………………………………………………………… (254)

第1章 绪 论

本章是数学习题理论的概述，它包括数学习题的意义及其分类，数学解题程序及其分析，提高数学解题能力的途径.

§1 数学习题的意义、作用及其分类

1.1 数学习题的意义

解答数学习题是学习数学的重要环节.

数学本身的发展过程就是不断提出问题、解决问题的过程.为了解决各种数学问题，人们创立了许多丰富多彩的数学理论，引入不同的数学概念，规定出许多公理，推出许多定理、公式、法则.因此，可以说问题是数学的心脏.美国数学家哈尔莫斯说："数学究竟是由什么组成的？是公理？定理？证明？概念？定义？理论？公式？方式？诚然，没有这些组成部分数学就不存在，这些都是数学的组成部分.但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏，这个观点是站得住脚的，数学家存在的主要理由就是解题.因此，数学的真正的组成部分是问题和解".

从数学发展的历史看，情况正是这样.古埃及尼罗河水经常泛滥，土地需重新丈量，人们正是在解决这个问题的过程中，创立了几何学；我国古代数学名著《九章算术》就是解决当时提出

的 246 个典型问题的著作；我国南宋时期数学家秦九韶所著的《数学九章》也可以说是一本解决数学问题的习题集，共有 9 类 81 个问题；17 世纪下半期，由于资本主义生产方式的发展，科学技术不断进步．天文学、力学、弹道学、光学要发展，要求数学必须突破原有的常量数学的局限，以解决更精确地描述运动尤其是变速运动全过程的问题．在这种情况下，牛顿与莱布尼兹各自独立地创立了微积分学．在当代，随着电子计算机的发展，人们又提出了机器证明和人工智能等问题，这样的例子不胜枚举．

在数学本身的发展过程中，也提出了许多问题．最典型的就是初等数学三大难题，即：

（1）费尔玛大定理：方程 $x^n+y^n=z^n$，当 n 为大于 2 的正整数时没有正整数解．

（2）四色定理：平面上的任何地图，最多只需要 4 种颜色填涂，就能把不同的国家区分开来．

（3）哥德巴赫猜想：任何一个大于 4 的偶数，都是两个奇质数之和．

几百年来，人们为解决这几个问题付出了巨大的努力．20 世纪 70 年代，数学家哈肯和阿佩尔借助于计算机，证明了“四色定理”．在 90 年代，英国数学家怀尔斯运用代数几何方法解决了费尔玛大定理的证明问题．1966 年我国著名数学家陈景润把哥德巴赫猜想的证明推进了一大步，但这个问题至今尚未解决，看来要留待到下个世纪了．

在中学数学教学中，在 20 世纪 60～70 年代世界上掀起了新数运动，不少国家纷纷地把近代数学知识如微积分、概率统计等知识引入中学数学．我国也不例外．但是，实践表明，这条路行不通，新数运动失败了．近年来，随着数学教育研究的不断深入，一些新的教育思想如“大众数学”、“问题解决”、“数学机械化”、“非形式化原则”等等相继出现，并不同程度地为人们所接

受. 特别是从 20 世纪 80 年代开始，随着现代认知心理学关于“问题解决”的研究不断深入，“问题解决”在中学数学教学中已成为一个世界性潮流，我国也处在这个潮流中. 国外和我国的许多学者为此作出了重要贡献.

这个潮流的出现具有深刻的时代背景. 人类社会正在由工业社会向信息社会过渡，特别是计算机技术迅猛发展，因此，单凭健壮体魄、灵巧双手和简单技术，只能够胜任简单机械劳动，远远落后于时代的需要. 21 世纪的劳动力将是较少体力型而更多智力型的，较少机械的而更多电子的，较少稳定的而更多变化的劳动力. 信息社会要求未来劳动力具有较高的文化素养，具有创造能力，特别是具有较高的解决问题的能力. 正因为如此，“问题解决”受到社会越来越多的关注.

什么是“问题解决”? 有 3 种不同的理解:

一是把“问题解决”看成是一种技能，即通过“问题解决”而获得各种具体的解题方法和技术. 这样理解把“问题解决”看成是寻找解题术，背离了“问题解决”的基本精神.

二是把“问题解决”看成是一种教学手段. 这是指把“问题解决”从属于具体数学知识的教学，即通过问题来引入有关的数学内容，并通过“问题解决”达到复习、巩固及检查的目的. 另外，从更广义的角度来说，我们还可以通过“问题解决”调动学生学习数学的积极性，如体现学习数学的重要性，感受科学研究的乐趣. 这种理解有局限性，它片面强调了数学知识的传授，有可能扼杀学生创造性思维，没有深入到“问题解决”的实质.

三是把“问题解决”看成是一种艺术，即“问题解决”在本质上是一种创造性活动. 按照这样的理解，重要的并非在于机械地记忆解题法则、技巧，并加以模仿，而是如何创造性地应用所学到的各种知识和方法去解决问题. “问题解决”的核心并非是各种解题方法或算法，而是一些十分一般的思想方法或思维模

式，即关于思想方法的强调是更为基本的、更为重要的.

“问题解决”的心理学基础是数学教育的认知科学研究和所谓的“构造主义的数学学习观”. 具体地说，认知心理学的基本立场是认为心理学的研究不应局限于可见行为，而应深入到认识主体内在的思维活动，特别应当深入研究知识的贮存、提取、表达、发展等问题. 所谓“构造主义的数学学习观”，是指数学学习并非是一个被动的吸收过程，而是一个以已有知识和经验为基础的主动的建构过程. 这些理论和教学实践密切结合，使“问题解决”受到越来越广泛的支持.

当前，我国教育战线正面临由“应试教育”向“素质教育”转变的重要历史任务，“问题解决”与“素质教育”的基本精神是一致的，它是通过数学教学对学生进行素质教育的一个重要方面，从而提高学生的素质.

“问题解决”与具体的数学知识和技能的教学之间的关系不是互相排斥、互相抵触的，而应以“问题解决”的基本精神促进数学知识和方法的学习. 通过改革，一些传统的知识讲授可以转变为“问题解决”的教学. 数学习题教学也是“问题解决”的一个重要方面，它为数学习题的教学明确了指导思想和方向. 从某种意义上来说，“问题解决”是更高层次的数学习题教学，我们应当在数学习题教学中，更好地体现“问题解决”的精神实质.

1.2 数学习题的作用

数学习题在中学数学教学中的作用可以从以下4个方面进行分析.

1.2.1 获取知识

解答数学习题，需要运用所学过的知识，从而起到复习、巩固所学知识的作用.

例1 已知 $an-bm\neq0$，$a\neq0$，$ax^2+bx+c=0$，且 $mx^2+nx+p=0$，求证方程 $(an-bm)x^2+2(cm-ap)x+$

$(bp-cn)=0$ 有两相等实数根.

证 要证方程 $(an-bm)x^2+2(cm-ap)x+(bp-cn)=0$ 有两个相等的实数根，即要证

$$\Delta=4(cm-ap)^2-4(an-bm)(bp-cn)=0,$$

即证 $(cm-ap)^2=(an-bm)(bp-cn)$.

因 $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 & ① \\ mx^2+nx+p=0, & ② \end{cases}$

①×m－②×a 得

$$(bm-an)x+(cm-ap)=0,$$

解得 $x=\dfrac{ap-cm}{bm-an}$. ③

将③代入①得

$$a\left(\frac{ap-cm}{bm-an}\right)^2+b\left(\frac{ap-cm}{bm-an}\right)+c=0,$$

即 $a(ap-cm)^2+b(ap-cm)(bm-an)+c(bm-an)^2=0$,

化简得 $(cm-ap)^2=(an-bm)(bp-cn)$.

故方程有两个相等的实数根.

此题涉及的知识点比较多，有一元二次方程根的判别，一元二次方程的公共根，解一元一次方程，消去法，代入法，代数式的恒等变形等等. 通过做此题，可对这些知识起到复习、巩固作用. 要注意让学生仔细审题，$ax^2+bx+c=0$ 且 $mx^2+nx+p=0$ 不是两个独立的一元二次方程，而表示两个方程有公共根.

通过解答数学习题除了可以复习、巩固旧知识外，还可以建立新旧知识之间的联系，引起学生思考，从而引入新知识. 例如，可以先让学生练习用配方法解一元二次方程，引入一元二次方程求根公式；先让学生解一元二次方程，观察根与系数的关系，得出一元二次方程根与系数关系的一般公式. 有些习题本身也可以作定理用. 例如讲授平行线分线段成比例后，可以让学生

做下面的练习.

图 1.1 中，直线 EF 分别交$\triangle ABC$ 的三边 AB、BC，CA 所在直线于 D、E、F，求证：$\dfrac{DA}{DB}\cdot\dfrac{EB}{EC}\cdot\dfrac{FC}{FA}=1$.

这就是梅涅劳斯定理，只须作 $BG /\!/ EF$，交 AC 于 G，就可很容易得到证明. 利用它可以较简单地解决一批问题，例如下列习题：

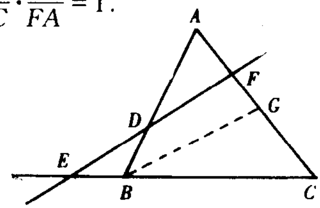

图 1.1

例 2 如图 1.2 所示，D，E，F 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC，CA，AB 上的点，$DC=\dfrac{1}{3}BC$，$BF=\dfrac{1}{3}AB$，$AE=\dfrac{1}{3}AC$，求证：$S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle GNM}$.

证 直线 FC 分别交$\triangle ABD$ 的三边所在直线于 F，M，C，由上述习题得

$\dfrac{MA}{MD}\cdot\dfrac{CD}{CB}\cdot\dfrac{FB}{FA}=1$，即 $\dfrac{MA}{MD}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$，故 $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{6}{1}$.

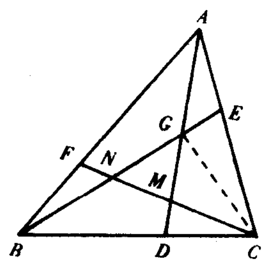

图 1.2

又直线 BE 分别交$\triangle ADC$ 的三边所在直线于 E，G，B，由上述习题有

$\dfrac{GA}{GD}\cdot\dfrac{BD}{BC}\cdot\dfrac{EC}{EA}=1$，即 $\dfrac{GA}{GD}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{1}=1$，故 $\dfrac{GA}{GD}=\dfrac{3}{4}$.

故 $GA:GM:MD=3:3:1$.

同理可得 $BN:NG:GE=3:3:1$，$CM:MN:NF=$

3:3:1. 连 GC，则

$$\frac{S_{\triangle GBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DG}{DA}=\frac{4}{7},$$

$\therefore\quad S_{\triangle GBC}=\frac{4}{7}S_{\triangle ABC}.$

又 $\quad \frac{S_{\triangle GNC}}{S_{\triangle NBC}}=\frac{GN}{BN}=\frac{3}{3}=1,$

$\therefore\quad S_{\triangle GNC}=\frac{1}{2}S_{\triangle GBC}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$

$$\frac{S_{\triangle GNM}}{S_{\triangle GMC}}=\frac{NM}{MC}=\frac{3}{3}=1,$$

$\therefore\quad S_{\triangle GNM}=\frac{1}{2}S_{\triangle GNC}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.$

故 $\quad S_{\triangle ABC}=7S_{\triangle GNM}.$

1.2.2 培养能力

基本技能、运算能力、逻辑思维能力、空间观念的培养与提高，都必须通过解答习题来进行；要想能够运用所学知识解决简单的实际问题，逐步提高分析问题和解决问题的能力，特别是发展思维能力，也都必须通过解答习题来进行.

运算包括对数、字母、式的具体运算和集合、对应等抽象运算，要求准确、迅速、合理，在准确的基础上迅速，在合理的指导下迅速而准确，这些都只有在不断的练习中逐步做到.

例3 在实数范围内解方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$.

此题若把方程的左边展开，将会得到一个关于 x 的一元四次方程，尽管有一般的方法可解，但是相当复杂，需要十分熟练的运算技巧.

为了使运算更简捷，我们可以把方程左边变形为 $(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)$，令 $t=x^2+3x$，得到

$$t^2+2t-24=0.$$

这是一个关于 t 的一元二次方程，很容易得到方程的解.

我们观察方程的特点，左边4个因子，每个都是前面的因子加1，而$1\cdot2\cdot3\cdot4=24$，$(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)=24$，这样，可以立刻得到下面更简单的解法：经观察，$x=1$和$x=-4$是原方程的根．当$x>1$时，$x(x+1)(x+2)(x+3)>24$，当$x<-4$时，$x(x+1)(x+2)(x+3)>24$；当$-4<x<1$时，$|x(x+1)(x+2)(x+3)|<24$，故$x(x+1)(x+2)(x+3)<24$，方程仅有两个实数根，即$x_1=1$，$x_2=-4$．

例4 若$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，求x^3-2x^2+x-3的值．

此题可用几种方法计算：

第一种：直接用$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$代人原式求值，很繁．

第二种：将$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$代人原式求值，仍较繁．

第三种：由$x=\sqrt{3}+1$得$x-1=\sqrt{3}$，然后将原式化为$(x-1)$的多项式，将$x-1=\sqrt{3}$代人，这比第二种方法又简单了一些．

第四种：由$x-1=\sqrt{3}$，得$x^2-2x+1=3$，即$x^2-2x-2=0$，

原式$=x^3-2x^2+x-3=x^3-2x^2-2x+3x-3=x(x^2-2x-2)+3(x-1)=3\sqrt{3}$

这种方法最简单、合理．

逻辑思维能力包括科学的思维方法，合理的推理，严密的论证，清楚条理的书写格式，简明准备的数学语言等，这些也只有在数学习题的解答中逐步形成．

例5 已知$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，AD和AE分别是BC边上的高和中线，求证$DF=\dfrac{1}{2}AB$．

证 如图1.3所示，取AB的中点F，连结FD、FE．