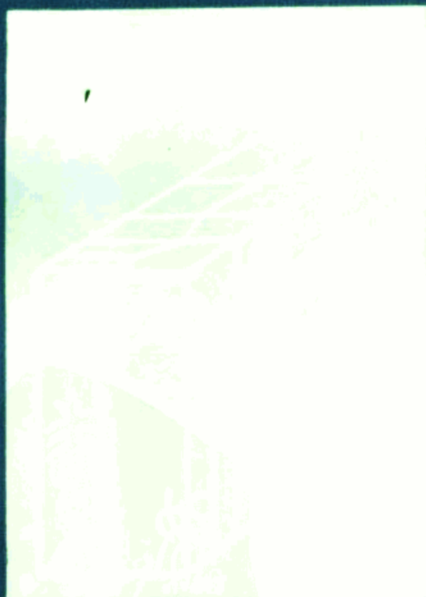
[加] P. P. 席尔维斯特
[英] R. L. 弗 拉 里 著

有限元法在电气工程中的应用

Finite elements for electrical engineers



简柏敦 倪光正 译

浙江大学出版社

译者前言

20 多年来，有限元法在数值求解各种学科和工程技术的实际问题方面，显示出极大的优越性和生命力。对于电气工程领域，有限元法同样是用于各类电磁场、电磁波工程问题定量分析与优化设计的最主要的数值方法，并且无一例外地是构成各种先进、有效的计算软件包的基础。因此，顺应这种在学科研究和工程技术应用上不断发展的需要，P. P. Silvester 和 R. L. Ferrari 合著的这本书无论在学术或工程应用价值上都得到了国际学术与工程界的肯定评价。至今，本书(第 2 版)除英文原版外，已有日本、西班牙和俄文三种译本。

由 P. P. Silvester 和 R. L. Ferrari 合著的这本书的特点是：系统而又循序渐进地阐述了有限元法在电气工程领域中的应用，其内涵丰富且与工程实用接口，而不着意于描述前沿研究成果，避免了过多的数学论述。这样，本书既易于被高等院校电类专业大学生和研究生们所接受，又适合于从事教学和科研的高校教师、科学工作者以及从事实际工作的工程师们阅读。

本书的两位作者都是电工学科领域国际知名学者，尤其是 Silvester 教授，在电磁场和电磁波的有限元分析方面，是世所公认的开拓者，有很高的造诣。本书(第 2 版)英文原版是 Silvester 教授于 1991 年赠送给当时在加拿大麦吉尔大学与他合作从事科研的倪光正教授的。在作者对中国怀有热烈友好情感的气氛中，倪光正极其愉快地表示了将努力实现翻译本书的愿望。日后，这一愿望不仅得到了我国电工界和英语教育界知名学者简柏敦教授的全力赞同，也得到了浙江大学出版社和英国剑桥大学出版社的全力支持。

回顾本书翻译的全过程，译者深信在此书第 1 版中译本已经产生其学术与工程应用价值情况下，本书第 2 版中译本的出版，必将以

其新应用、新数学方法和新程序技术的丰富内涵，有助于推动我国读者进一步跟踪和掌握有限元法在电气工程领域中的实际应用，而这也正是作者自 1991 年至今多次向译者表达的意愿。

译者谨向支持本书出版的持有英文版权的英国剑桥大学出版社和浙江大学出版社致以谢意。

译文中不妥或理解失当之处，敬请读者指正。

译　者

1994 年 8 月于浙江大学

序　言

此书第1版问世至今，已有5年。在当时很多有关有限元分析法的问题，尚属研究前沿，而现在却已成为工业界所惯用的方法。因此，新版必然涉及更多的材料和更广的范围，因而这本书将比其前版内容更多一些。熟悉前版的读者将发现此书内容，因新应用、新数学方法和新程序技术的展示，而大为丰富。

有限元法在电气工程中的应用范围，在以往5年中，大为扩展。在日常工作中应用有限元方法的工程师人数，也大为增加。为了满足广大读者的需要，本书的两位作者写于此卷书中已扩展的材料，不但比以前包含了更高层次的内容，而且也增加了初级材料的选择。另外还选有范围更广阔的计算程序，它们不仅适应修改和试验，使所设计的程序易于阅读理解，而且最终(如果真如此)将获得高效能的计算。

两位作者非常感谢很多学生，他们曾提供建议，修正错误并协助使第2版在第1版基础上得以改进。

PPS 和 RLF
蒙特利尔与剑桥
1988年8月

第一版序言

虽然现在已有很多研究论文描述有限元法在电磁学问题中的应用，但是迄今为止在这一领域中还没有教科书出现，这是令人惊奇的。因为有限元法用于解决电气工程问题的最初文章已于 1968 年出现，几乎与第一本有限元法应用于土木工程的教科书同时问世。

本书作者们已经对从事各种电气工程的听众讲授过有限元的课程，因为缺乏有适当背景材料的书，感到不便。本书的意图是使它既适用于高年级大学生，也适用于从事实际工作的工程师们。本书对于数学并无要求，着重于在其成熟领域内的应用，而不是展示其研究的前沿。

两位作者对很多协助形成此书的同仁，尤其是他们的学生们致谢。

PPS 和 RLF

蒙特利尔与剑桥

1983 年 6 月

目　录

第五章 用于积分算子的有限元

第六章 铁磁材料中的微分算子

第七章 二维的时域和频域问题

第一章　一维有限元

§1.1 引　言

本书用一个简单的一维问题，来说明如何应用有限元法求解，然后将此基本方法加以概括，使其适用于更为复杂的场合。在一维空间中，有限元法在很多方面相似于电气工程师们在电路理论和半导体电子学中所熟悉的分段逼近技术。本章开首所举的例子，是有损耗的直流输电线，这个问题不但结构简单而且可以用解析法求解，这样，可以将有限元法的近似解与已知的精确解直接比较。往后各章，再进入二维和三维的问题，在数学表达方式和相关的数值求解技术两方面，作出探讨。

§1.2 直流输电线

设有一对埋置地下用以传送电信号的管子，如图 1.1(a)所示。这种情况常会发生，例如输送天然气的管道，使其载有电信号以测量流量、检查裂痕或提供其他信息。这里将假设我们只对低频感兴趣，但管道是电阻性的，因此将有纵向电压降和流经管道之间地中的漏电流存在。这对管道所组成的传输线，将认为是由一电压源所激励(例如连接到热电偶上的放大器)；其接收端则看成接有轻微的负载，实际上可以认为是开路。问题是确定信号电压的沿线分布和接收端的电压。

用解析法求解这一问题，可以考虑该线很短的一段长度 dx，如

图 1.1(b)所示。沿该线长度方向的电阻 $r\mathrm{d}x$ 产生一个纵向电压降 $\mathrm{d}v$，而流经由并联电导 $g\mathrm{d}x$ 所代表的两管间大地中的电流为 $\mathrm{d}i$。在两端点 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间的电压差 $\mathrm{d}v$ 和电流差 $\mathrm{d}i$ 分别为

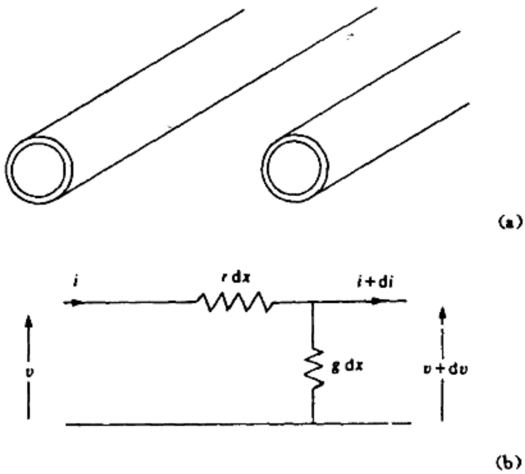


图 1.1 (a)埋在地下，用以传送记录信号和流体的管道；
(b)一小段管道 $\mathrm{d}x$ 的等值电路。

$$\mathrm{d}v=-ir\mathrm{d}x, \tag{1.2.01}$$

$$\mathrm{d}i=-(v+\mathrm{d}v)g\mathrm{d}x。 \tag{1.2.02}$$

略去二阶项，可重写成

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-ri, \tag{1.2.03}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}=-gv。 \tag{1.2.04}$$

对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=-r\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}, \tag{1.2.05}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}x^2}=-g\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\tag{1.2.06}$$

经交替代换后，可得一对微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=rgv\tag{1.2.07}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}x^2}=rgi。\tag{1.2.08}$$

显然，电压与电流都服从同样形式的二阶微分方程。很明显，从物理意义上看，在这里有两个边界条件可以应用。首先是电压有指定值，现令输入端 $x=L$ 处电压为 V_0，即

$$v|_{x=L}=V_0;\tag{1.2.09}$$

其次是在接收端电流应为零值，即 $i=0$。但式(1.2.03)清楚地表明电流为零等效于电压的导数为零，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0。\tag{1.2.10}$$

后两个方程提供了求解电压 v 的二阶方程所需的边界条件。为此将试探解

$$v=V_1\exp(+px)+V_2\exp(-px)\tag{1.2.11}$$

代入式(1.2.07)，得

$$\begin{aligned}&p^2\left[V_1\exp(+px)+V_2\exp(-px)\right]\\&\quad=rg\left[V_1\exp(+px)+V_2\exp(-px)\right]。\end{aligned}\tag{1.2.12}$$

这个方程只有在 p 具有定值($p=\sqrt{rg}$)时，才成立。所以试探解必须修改成

$$v=V_1\exp(+\sqrt{rg}\,x)+V_2\exp(-\sqrt{rg}\,x)。\tag{1.2.13}$$

式中，V_1 和 V_2 的值仍须从边界条件中确定。在接收端开路时，即在 $x=0$ 处，要求电压的一阶导数为零。对式(1.2.13)求导，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\sqrt{rg}\,(V_1-V_2),\tag{1.2.14}$$

上式表示实际上只有一个待求常数 V，$V=V_1=V_2$，而不是两个不同的常数。因此所求的解为

$$v=V\left[\exp(+\sqrt{rg}\,x)+\exp(-\sqrt{rg}\,x)\right]。\tag{1.2.15}$$

式中，V 值可以很容易地从 $x=L$ 处，电压 V 为定值 V_0 这一条件求得，即

$$V[\exp(+\sqrt{rg}L)+\exp(-\sqrt{rg}L)]=V_0。\tag{1.2.16}$$

解得 V 并代入式(1.2.15)，即有

$$v=V_0\frac{\exp(+\sqrt{rg}x)+\exp(-\sqrt{rg}x)}{\exp(+\sqrt{rg}L)+\exp(-\sqrt{rg}L)}。\tag{1.2.17}$$

最后得出有损耗传输线问题的完整解析解。这个解，后面将结合由有限元法求得的对应近似解，进行仔细的研究。

§1.3　有限元法

在有限元法中，不直接求解描述传输线的微分方程，而是利用等效的物理原理，即电压沿线作如此的分布，以使其功率损耗为最小。在需求精确解时，这种电压的重新分布有时是很难用数学来表示的。但在近似的意义上，这种表达并不困难，其步骤如下：

(1)用电压分布 $v(x)$ 来表达传输线中的功率损耗 W：

$$W=W[v(x)]。\tag{1.3.01}$$

此式的准确形式，目前并不重要，以后将再进一步展示；

(2)将感兴趣的区域(整个传输线)剖分为 K 个有限部分，或称为**有限单元**；

(3)沿线在每个单元中应用一个分离的近似表达式，构成电压 $v(x)$ 的如下近似形式

$$v(x)=\sum_{i=1}^{M}v_i f_i(x),\tag{1.3.02}$$

式中，$f_i(x)$ 为已知函数的某种恰当的组合。这些近似式必须包含 M 个常数，但至今每个单元中系数 v_i 是未知的，因为沿线电压尚未求得；

(4)在每个单元中，用近似函数 $f_i(x)$ 和它们的 M 个待定系数 v_i，来表达功率。因为函数 $f_i(x)$ 是预先选取的，所以是已知的，因此功率

将仅为待定系数的函数，即

$$W=W(v_1,v_2,\cdots,v_M);\tag{1.3.03}$$

(5)对 MK 个系数引入约束条件，以便保证电压在单元间连续。这样经约束后，所有单元的总体将具有某 N 个自由度，$N\leqslant MK$；

(6)在电压沿线作连续分布的约束条件下，依次变动每个系数 v_i，求取功率的极小值，即有

$$\frac{\partial W}{\partial v_i}=0,\ i=1,\cdots,N。\tag{1.3.04}$$

借助于求极小值求得各系数，从而获得电压沿线的近似分布。

这种相对抽象的描述，打开了一大类方法的大门。至于该用多少单元，它们是否应具有相同的大小？哪一种近似函数最好？约束条件应如何引入？应采用哪一类求极小值的方法？这些和其他的问题会导致不同的答案，并定义出整个有限元方法族。本章将仅描述一种组合的选择，某些其他的组合将在本书以后章节中描述。

在有限元法中，有一个关键步骤不容含糊，那就是求极小值的量总是功率。所以求解问题的起点必然是列出传输线的功率消耗，因此选用一种适合于解题的功率表达式是很恰当的。

考虑如图 1.1(b)所示的一短线段 dx，由左端输入该线段的功率可表为

$$W_{in}=vi,\tag{1.3.05}$$

而流出右端的功率为

$$W_{out}=(v+dv)(i+di)。\tag{1.3.06}$$

输入与流出量之差将是该线段 dx 中所消耗的功率。忽略二次项 $dvdi$，这一差值即为

$$dW=vdi+idv。\tag{1.3.07}$$

上式右边第一项可认为是在两导线间大地中耗散的功率；第二项表示导线自身的功率损耗。将下列两式代入式(1.3.07)，可写出完全用电压表示的功率

$$di=-gdx\ v\tag{1.3.08}$$

$$i=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\tag{1.3.09}$$

从而每单位长度的功率将为

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=-gv^2-\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2,\tag{1.3.10}$$

而全线的总功率为

$$W=-\int_0^L\left[gv^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x。\tag{1.3.11}$$

这一结果看起来代表一条物理定律而不容选择，但在另一方面，它的近似以及求极小值的技巧却是多样的。这些问题将在以后加以发展。

§1.4 电压的分段近似

为了描述沿传输线的电压 $v(x)$ 分布，现采用一个简单而很一般的方法，那就是构造**分段直线**近似的方法。将跨度为 $0\leqslant x\leqslant L$ 的全线分割为 K 段或**有限单元**，在每个单元内，假定电压在其端点值间线性变化。在两个线段交接处电压必须连续；但是由于电压设为分段直线分布，故显然其斜率将不可能也连续。通过确定式(1.3.11)中的导数使电压 v 连续是可能的，而电压梯度的连续则是不可能的。

为了使此方法便于在计算机上进行，将 K 个单元有序地从左端(接收端)开始编号。每个单元的左右两端用下标 l 和 r 表示，如图1.2(a)所表示的 5 个单元一样。单元 k 两端的电压和电流可用两种方法表示，它的选择决定于具体内容。一种有用的标记方法是指定每个节点一个序数，如图 1.2(a)，并将电压与电流分别表示为 v_2 或 i_9 那样。另一种方法，适用观察一个单元，是用单元数表示节点，并用下标 l 和 r 分别表明左右两端。用这种表示方法，电压和电流可表示成 $v_{(k)l}$或 $i_{(k)r}$，并将两个单元端点的相应位置表示为 $x_{(k)l}$和 $x_{(k)r}$。在任何单元内，电压与距离 x 呈线性变化的这一假设，可以用下列方程表示

$$v=\frac{x_{(k)r}-x}{x_{(k)r}-x_{(k)l}}v_{(k)l}+\frac{x-x_{(k)l}}{x_{(k)r}-x_{(k)l}}v_{(k)r}。\tag{1.4.01}$$

为了简单起见，以后括号内的下标将被略去而不致引起误解，因为所

考虑的仅是一个单元。将式(1.4.01)写成下式将很方便

$$v=\alpha_l(x)v_l+\alpha_r(x)v_r, \tag{1.4.02}$$

其中位置函数

$$\alpha_l(x)=\frac{x_r-x}{x_r-x_l} \tag{1.4.03}$$

$$\alpha_r(x)=\frac{x-x_l}{x_r-x_l}, \tag{1.4.04}$$

为了简洁而被引入。相似的表达式应用于每个有限单元。

全线的总功率将很容易地可由各单元内功率之总和算得:

$$W=\sum_{k=1}^{K}W_K, \tag{1.4.05}$$

式中,单元 k 内的功率将如下式所示

$$W_k=-\int_{x_{(k)l}}^{x_{(k)r}}\left[gv^2+\frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx。 \tag{1.4.06}$$

将近似的近似表达式(1.4.02)代入每个单元,在第 k 个单元内的功率可求得为

$$W_k=-\frac{1}{r_k}\int_{x_{(k)l}}^{x_{(k)r}}\left[v_l\frac{d\alpha_l}{dx}+v_r\frac{d\alpha_r}{dx}\right]^2dx$$
$$-g_k\int_{x_{(k)l}}^{x_{(k)r}}\left[v_l\alpha_l+v_r\alpha_r\right]^2dx。 \tag{1.4.07}$$

在这里和往后将假设单位长度的电阻 r 和电导 g,在任何单元内皆为常数,虽然它们在所有的单元内,没有必要都相等。换句话说,r 和 g 都分段地为常数,并且单元的分割必须如此进行,以使线的特性只有在单元的端点处才发生变化。这一限制大为简化计算工作的组织和程序的编制,虽然在原则上并不带有强制性。例如在式(1.4.07)中,这就使参数 r 和 g 有可能移出积分符号外。

一个单元内的功率损耗,可以非常简洁地用矩阵二次式表达如下:

$$W_k=-\begin{bmatrix}v_l & v_r\end{bmatrix}\left[\frac{1}{r_k}\mathbb{S}+g_k\mathbb{T}\right]\begin{bmatrix}v_l\\ v_r\end{bmatrix}。 \tag{1.4.08}$$

这里$\mathbb{S}$和$\mathbb{T}$是 2×2 矩阵,其元素为