华东师范大学
函授教材

代数学习指导书

华东师范大学数学系
代数教研組編

华东师范大学出版社

华东师范大学函授教材

代数学习指导書

华东师范大学数学系
代数教研組编

华东师范大学出版社

代数学习指导書

华东师范大学数学系
代数教研組編
（内部讀物　凭証发行）

*

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路 3663 号）
上海市書刊出版业营业許可証出 088 号
上海新华印刷厂印刷　新华書店上海发行所发行

*

开本 787×1092 公厘 1/27　印張 2 4/27　字數 47,000
1958年11月第1版
1958年11月第1次印刷
印數 1—7,880

統一書号：13135·3
定　价：(8) 0.24 元

校　对：黃純飞

引　言

代数是师范学院数学系基础学科之一，它設置的目的在使学生获得基本的、系統的代数知識，掌握初步的，严密的代数方法．通过代数的学习使我們对于中等学校代数的內容能有系統地、較深入的了解，并略知近世代数的方法与发展的趋势，同时作为进一步学习其它的数学和物理学等所必需的基础知識．

代数課程共学习三个学期，它是中学代数課程的自然发展．这一門課程包括以下內容：綫性代数初步，数的概念的发展，多項式理論初步（包括方程論）无理式及无理方程，不等式及不等方程．这些內容的深入討論对于現任中等学校教师来說，显然是非常必要的．除此以外，我們还引入近世代数的一些基本概念如群，环，体和同构等，使数的概念的发展和多次式理論得到更好的、更系統的处理，使我們能更深入、更全面的看問題．另一方面，我們还簡单的介紹了綫性規划初步，以便更好的联系实际．

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　行列式

这一章包括三个主要内容：(1)数学归納法．(2)数环与数体．(3)行列式．

数学归納法是証明数学命題和公式的一种重要的方法，我們不但要知道它的原理，而且要掌握这一方法去进行論証．

数环与数体的学习目的是使我們对于行列式、方程組、多項式等可以在某一个范圍內来討論的問題有明确的了解，并为将来介紹抽象的环与体的概念作好一些准备工作；同时在学习第五单元二次齐式时就要用到实数体和复数体．

行列式的起源是由于求綫性方程組的解。从解含两个未知量两个方程的綫性方程組和含三个未知量的三个方程所构成的綫性方程組，我們引入了二阶与三阶行列式的概念，为了推广这一概念到 n 阶行列式，我們必須学习关于有限集合的一些概念和性質．因而引入了排列对换及置换的概念，而它們也就是行列式的理論基础．n 阶行列式是本章中最重要的概念之一，必須深入的理解并掌握它的基本性質．直接应用 n 阶列式的定义来計算行列式显然是是很繁难的，特别是对 n 的較大的数值，因此我們引入了子式及代数余子式的概念，并研究了行列式的各种展开法．这样一来，就可以把 n 阶行列式化为較低阶的行列式来表出．我們应当很好的掌握这些方法并且熟練地应用它們去計算行列式．最后，我們应用 n 阶行列式的理論去解系数行列式不等于零的含 n 个未知量和 n 个方程的綫性方程組，而这个特殊情况的研究是討論綫性方程組一般情况（第二章）的基础．

§1. 数学归納法 本节介紹了数学上最基本的概念——集合，并具体的用直观方法介紹了自然数集的三个基本性质，从此推得自然数集的两个重要性质，从而相应的得到作为証明数学命題极为重要的两种数学归納法原理．后面所举的例子尽量考虑到两种数学归納法原理的用法，以及用数学归納法証明的数学命題的几种形式．

1．在这里提出了数学上的一个最基本的概念——集合．一般說集合这个概念不給它明文的定义了，我們只要求給出集合的时候要給得明确．对任何事物而言都应該能明确地判别它是在这集合中或不在这集合中．譬如，設 S 为現在这屋子里的所有人所成的集．这 S 是給得非常明确的，任何事物属于 S 或不属于 S 是非常明确的；在这个屋子里而且是人就属于这个集合 S，在这屋子里的不是人的事物或不在这屋子里的任何事物都不属于 S．又如設 S 为所有看得見的事物的全体所組成．这就給得很不明确，有許多事物无法判明是否属于 S．又如設 S 为所有形如 $3n+2$，其中 n 为自然数，的全体所組成的集合；这集合給得很明确，对任何事物都能判定它是为属于 S．又如設 S 为所有 $a+b\sqrt{2}$ 形式的数的全体．这就沒有給明确，a, b 究竟取什么数？数集是集合的一个特殊形式——以数为元素的集合．

2．对自然数集，我們介紹了自然数的有序性，离間性与最小性．我們主要的意图是从自然数的最小性推出数学归納法原理来，至于这三个性质怎么来的，我們不詳加討論，因为这牵涉到更抽象的自然数公理处理的間題．有兴趣的話可以参考吳品三譯的数与多項式．但是这些材料与实际需要并沒有太大的关系．

3．定理1与定理2实质上也是自然数集的基本性质，在自然数公理处理的时候，还把定理2作为自然数集的公理之一，而把最小性作为一个推論．我們在这里的处理却却相反，原因是从直观上看，最小性似乎更直观些．

4．整个推理过程是这样

自然数的最小性 $\left\{\begin{array}{ll} \text{定理 1} & \to \text{定理 4} \\ \text{（自然数集的性质）} & \text{（第一种数学归納理原理）} \\ \text{定理 2} & \to \text{定理 3} \\ \text{（自然数集的性质）} & \text{（第二种数学归納法原理）} \end{array}\right.$

两种归納法的証明是一样的．在运用的时候，第一种归納法是常用的，但是有些問題的証明（例如例 4 与例 5），用第一种归納法就不够．必須要用第二种归納法．

5．用数学归納法来証明問題的时候，必須遵循这样三个步驟：(甲)怎样把原問題改成有限或无限序列的断語 $P_1, \cdots\cdots, P_n, \cdots\cdots$；或即首先明确 P_1 是什么，P_2 是什么，……，P_n 是什么，……．一般說，这一步驟不必写出来，但是思想上首先要明确．

（乙）証明 P_1 的正确性，这往往只是一个很簡单的驗算，但是决不能忽略．

（丙）在数学归納法的假設下（即假設 P_{n-1} 正确或假設 $P_1, \cdots\cdots, P_{n-1}$ 的正确），来証明 P_n 的正确性．这是具体計算的过程，是关鍵的一部份，也是比較繁难的一部份．

思考題

（i）什么是集合，什么是数集？

（ii）自然数集的元素是指那些数？什么是自然数集的最小性？整数全体所成的集合有沒有这个性质？大于－10 的整数全体有沒有这个性质？正有理数的全体有沒有这个性质？

（iii）怎样从自然数的最小性推出数学归納法原理？

（iv）用数学归納法时要通过那些步驟？

§2．数环与数体　本节首先介紹了中学里出現那些数的系統及其相互包含的关系．为了解决在討論多項式时什么样的数集才能取作系数范圍的問題，引入了数环与数体的概念（环与体是近世代数的

基本概念)而后面所举的例子一方面告訴讀者作为数环、数体的一些重要典范，而另一方面是培养讀者对所給数集判别其是否数环或数体的能力.

本节要求:

1. 首先要弄清楚在中学里出现的那些数的系統、其相互包含的关系.

2.弄清楚数环与数体的定义,并且要举得出例子来。

3. 要有能力判别所給数集是否是数环或数体.

对这三个要求我們提出几点注意:

1. 有理数与无理数是对立的(註);它們統一于实数. 而要注意实数是复数的一部份,并非对立的,复数集是 $a+bi$ 形式(其中 a, b 是任意实数)的全体,当 $b=0$ 时的复数 $a+bi$ 就是实数,当 $a=0$ 时的复数称为純虛数;純虛数与实数还不能組成复数集.

我們这里所指的分数是指这种形式的有理数: $\frac{n}{m}$,其中 m, n 为整数,且 $m\neq 0$, 及 m 除不尽 n. 所以整数与分数是对立的, 它們統一于有理数.

〔註: 所謂两个概念是对立的,即指互相排斥的. 在这里指的是一个数若是有理数,则它不可能是无理数. 反之亦然.〕

2. 要弄清楚数环数体的定义, 首先要弄清"閉合"这两字的意义,詳細的定义我們以后再談. 我們在这里是指下列意义:設 P 是一个数集, 若对于 P 中任两元素(这两个元素可以是相同的或不相同,但必須是 P 中的元素) a 与 b, $a+b$ 总也在 P 中,则称数集 P 关于加法是閉合的.

同样,关于减法閉合,关于乘法閉合都是一样的意义.

有一些数集可以关于除法是閉合的, 例如正有理数的全体所組成的数集关于加法,乘法、除法是閉合的,但是关于减法不閉合。

要注意,数集 P 关于某一运算(加、减、乘或除)閉合,必須是对任意两个(也即每两个的意思) P 中的数經过这运算, 所得結果仍在 P

中,只要有两个P中的数,經过运算所得結果不在P中(虽然其它的数經过运算所得結果仍在P中),我們就称P关于这个运算不閉合,自然数集关于减法就是一例.弄清了"閉合"这个概念之后,数环数体的定义就容易理解了.

3. 在判别一个数集是否是数环与数体时,首先必須弄明确所給的数集,那些数是在数集中,那些数不在此数集中.

在驗証"閉合性"时,只要取两个此数集中的标准形式的数作运算,看所得的結果是否仍然在此数集中.

在驗証数集对某运算不閉合,只須在此数集中取两个特殊的数,作它們的运算,所得的結果不在此数集中即可.

例如:設P是所有$a+b\sqrt{2}$,所成的数集,其中a与b为非零有理数.

由于 $2+3\sqrt{2},\quad -2+3\sqrt{2}\in P.$

而 $(2+3\sqrt{2})+(-2+3\sqrt{2})=0+6\sqrt{2}\notin P.$

所以P关于减法不閉合.P不是数环,更不是数体.

4. 复数是最大的数体,有理数是最小的数体,换句話說:任何数体都包含有理数体,而它又含于复数体之內.

思考題:

1. 自然数,整数,分数,有理数,无理数,实数,純虛数,复数等之間的关系如何?

2. 什么叫做数环数体?我們为什么要討論数环数体?

3. 任何数体包含有理数体,是不是任何数环都包含整数环?

§3. 二阶和三阶行列式 这一节的目的是一般地解二元一次方程組与三元一次方程組,从而导出二阶及三阶的行列式,用行列式表达出二元一次方程組及三元一次方程組的一般解的形式.由此提出这样一个問題:是否可以把行列式概念推广到四阶,五阶,……从而

来解多元一次方程組.

我們提出下列一些注意.

1. 要弄清楚方程或方程組的解是什么意思.那就是能滿足方程或方程組的变量值,例如方程組.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=4 \\ 5x_1+\ \ x_2=11 \end{cases}$$

当取 $x_1=2, x_2=1$ 时得　$4=4$ 及 $11=11$.

这就叫做 $x_1=2, x_2=1$ 滿足所給方程組，或 $x_1=2, x_2=1$ 为所給方程的解. 有些方程組可以沒有解的，也有些方程組可以有不至一个解. 例如方程組 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=7 \\ 2x_1+3x_2=8 \end{cases}$

显然不可能有解. 方程組 $\begin{cases} x_1+\ \ x_2=3 \\ 3x_1+3x_2=9 \end{cases}$

就有无限多个解: $x_1=1, x_2=2, x_1=2, x_2=1, x_1=3, x_2=0, \cdots\cdots$

2. 二元一次方程組 $\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{matrix}$ 的解的过程实际上就是中学里大家熟知的消去法. 把第一式乘 a_{21} 減去第二式乘 a_{11} 即得

$$(a_{12}a_{21}-a_{22}a_{11})x_2=a_{21}b_1-a_{11}b_2,$$

同样的得另一式. 三元一次方程組的解也是一样.

3. 所謂二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 就是指式子 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 所以用行列式这个形式来記这个式子,无非是为了記忆上的方便.三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 就是指式子 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

要注意,用两个指标来区别文字,无非也是为了書写和記忆上的方便.第一个指标是指这个文字所在的行,第二个指标是指这个文字所在的列. 二阶行列式的式子很容易記忆. 三阶行列式的式子，除

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

掉書上的記法外，还可以利用下列形式来記：

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{12} & a_{22} \end{array}$$

就是在行列式右旁再添上第一第二列，然后依次作斜綫．依↘方向的斜綫上三文字的乘积取正号，依↙方向的斜綫上三文字的乘积取負号，这样的六个乘积的代数和就是三阶行列式的值．

4．二阶与三阶行列式的引入是为了二元与三元一次方程組的解可以得出一个方便的形式（当系数行列不为零时）．因而，引起这样一个問題，是否可以定义四阶及高阶的行列式，使得对四元及更多元的一次方程組（系数行列式不为零时）的解得出一个方便的形式：答案是肯定的，这正是我們后面几节中所要討論的．四阶行列式是二十四个乘积的代数和，式子非常复杂，如果也象对二阶和三阶那样引入，将是非常繁冗．我們在后面将用另外的方法引入 n 阶行列式，再利用行列式的性质来說明这样定义行列式正合乎我們对解多元一次方程組的要求．

思考題：

1）为什么引入行列式（或引入行列式起什么作用）？

2）怎样計算二阶三阶行列式？計算要熟練．

3）怎样解二元及三元一次方程組（系数行列式不为零者）？用行列式解方程組比我們常用的消去法是繁一点还是方便一点．那个好？

§4．排列和置换　为了要在下一节中引入 n 阶行列式首先在这一节里引入排列，对换，置换等概念．这一节我們要求（1）懂得排列，排列的反序数，排列的偶奇性．（2）了解对换对排列的偶奇性的所起的作用，偶排列与奇排列的个数（3）懂得置换的意义．置换与对换的

关系，奇置换与偶置换．我們提出下列一些注意：

1．这一节的内容大致安排如下：

排列的定义 → 排列的反序数的定义 → 由反序数定义排列的奇偶性
对换的定义 } → 定理1. 对换使排列改变奇偶性 →

→ 定理3. 偶排列数 = 奇排列数 = $\frac{n!}{2}$

置换的定义，置换的写法，置换的个数，置换的偶奇性，置换与排列的关系．

要注意，引理是为了定理 3 而引入的，定理 2 不是很重要的。

2．排列的反序数不是排列的絕对性質．实际上，排列的反序数是对某一标准排列的順序而言的．例如我們說 321 有三个反序数，这是对标准的自然順序而言的．如果首先沒有給繪出 n 个东西的标准順序，那就无法确定这 n 个东西的排列的反序数，例如以“張”，“王”，“赵”三字作排列，張王赵，王赵張，无法确定它們的反序数．标准順序改变时，排列的反序数显然也要改变．例如以 123 为标准順序时排列 321 的反序数是 3，若以 213 为标准順序，則排列 321 的反序数为 2．書上所指的反序数都是指在以自然順序 $12\cdots\cdots n$ 为标准順序的反序数．

計算反序数可以按書上方法計算，也可以用下法来算：在某排列

$$i_1 i_2 \cdots\cdots i_n$$

中，設有 m_1 个数在 i_1 的前面，且比 i_1 大；有 m_2 个数在 i_2 的前面，且比 i_2 大，……有 m_n 个数比 i_n 大的数在 i_n 的前面，則反序数 $=m_1+\cdots\cdots+m_n$．例如排列

$$\begin{array}{cccccccc} 8 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 5 & 4 \end{array}$$

，故反序数 $=18$，这是个偶排列．

3．对換是一个变换，它把一个排列变到另一个排列去，新旧排列的不同就仅是其中两个数碼对調了一下．比如

排列　$53124 \xrightarrow{\text{經过对换}(3,4)} 54123$

其实定理 2 是显然的，經过若干次的对换总可以把一指定的排列变到另一指定的排列去．例如，我們要把排列53124变到排列 32415 去只要經过下列一些对换即可：

$$53124 \xrightarrow{(35)} 35124 \xrightarrow{(25)} 32154 \xrightarrow{(41)} 32451 \xrightarrow{(15)} 32415$$

实际上，就是先把 3 搬到第一位，再把 2 搬到第二位，…….

定理 1 是个重要关鍵．它的証明很簡单，分成两步，第一步証明了相邻两个数碼对换使排列的奇偶性改变(即奇排列变成偶排列，偶排列变成了奇排列)；第二步証明了，任一对换都可以連續施行奇数个相邻数碼的对换而得．例如

$$53124 \xrightarrow{(25)} 23154.$$

它可以用連續施行相邻数碼的对换而得：

$$53124 \xrightarrow{(53)} 35124 \xrightarrow{(51)} 31524 \xrightarrow{(52)} 31254 \xrightarrow{(12)} 32154 \xrightarrow{(32)} 23154.$$

一共施行了 5 个相邻数碼的对换．

4. 定理 3 也可以这样証．首先証，两个不同的排列通过同一对换所得的排列一定也不相同．这几乎是显然的．

其次証，偶排列个数不可能比奇排列的个数多；因为假如偶排列个数 r 比奇排列个数 s 要多，$r > s$．則把这 r 个偶排列通过同一个对换就得到 r 个不同的奇排列；这不可能，因为奇排列个数 $s < r$，这就矛盾了．所以偶排列个数不可能比奇排列的个数多，同样，奇排列个数不可能比偶排列个数多．因此两者必須相等，而总和为 $n!$，所以各为 $\frac{n!}{2}$ 个．

5. 置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是一个变换，它把 1 变到 i_1，2 变到 i_2，……，n 变到 i_n；这里 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_n$ 就是 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 这 n 个

数的一个排列.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$都是說明1变到3，2变到1，3变到2去的一个变换,所以它們代表同一个东西:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

因此,我們总可以把置换表式中的第一行排成自然順序，即$123\cdots n$. 当置换表式的第一行排成自然順序时,第二行中不同排列就代表不同置换. 因此,置换个数一共 $n!$ 个.

当置换的第一行排成自然順序时，第二行排列的奇偶性就是置换的奇偶性.或者置换的第二行排列对第一行排列的相对奇偶性(即以第一行为标准順序时来計算第二行的反序数)就是置换的奇偶性.这一点沒有証,讀者可以自已去考慮.

§5. n 阶行列式　这一节的目的在于从二阶及三阶行列式的表达形式中找出一些規律,从而定义 3 n 阶行列式,又从 n 阶行列式的定义出发导出七个基本性質.

1. 从三阶行列式出发

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

这式子一共六項,每項是三个文字的乘积,这三个文字在行列式中总是处在每两个都不同行与不同列，而这六項就是所有这种形式的可能,每一項前面的符号是正或是負由第二个指标所成的排列(当第一个指标排成自然順序时）的偶奇性而定把这个規律推广而得 n 阶行列式的定义(見教本).

拿四阶行列式为例:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

它是 $4!=24$ 項的代数和，每一項都是四个文字的乘积，这四文字都在不同行与不同列，所以一般的項是

$$a_{1i_1}\quad a_{2i_2}\quad a_{3i_3}\quad a_{4i_4}$$

而 $i_1i_2i_3i_4$ 是1234的一个排列，这一項取正号或負号就看这排列是偶排列或奇排列而定．例如，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 取負号，$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 取負号，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 取正号．

2．行列式中項的符号要按照組成項的文字在行列式中的地位来定，有时容易被表面文字所模糊．

例如行列式

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

的展开中項 $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$ 的符号，不应該看1234的反序数而定，应該把該項排成 $a_{22}a_{44}a_{11}a_{33}$，再看2413的反序数，所以是正号．

3．性質1° 是每一行列式与它的轉置行列式相等：$D=D'$．証明是按照这样二点来进行的：

（甲）D 的展开中的每一項都在 D' 中出現，且項数相同．

（乙）每一項在 D 中出現的符号与在 D' 中出現的符号相同．有了这两点当然說明 D 与 $D_{\prime}$ 相等了．

4．性質 2°：交換行列式的两行(列)，行列式改变符号．

要証明 $D=-D_1$ 只要証这样两点：

（甲）D 的展开中的每一項都在 D_1 中出現，且項数相同．

（乙）每一項在 D 中出現时的符号与在 D_1 中出現的符号相反．

(甲)这一点是显然的．証明(乙)，主要看一个标准項

$$a_{1\alpha_1}\quad a_{2\alpha_2}\quad\cdots\quad a_{n\alpha_n}\tag{8}$$

在 D 与 D' 中的符号．它在D中的符号由置换

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\tag{9}$$

的奇偶性来决定．它在 D_1 中的地位，列的編号数没有变(因为 D 与 D_1 只是第 i 行与第 j 行对調，元素在 D 中第几列在 D_1 中仍在第几列)，而 $a_{i\alpha_i}$ 在 D_1 中是在第 j 行，$a_{j\alpha_j}$ 在 D_1 中是在第 i 行，其他元素的行数不变，所以(8)在 D_1 中各元素的地位是：

$a_{1\alpha_1}$　在第一行第 α_1 列

……　…………………

$a_{i\alpha_i}$　在第 i 行第 α_i 列

………………………………

$a_{j\alpha_j}$　在第 j 行第 α_j 列

……　…………………

$a_{n\alpha_n}$　在第 n 行第 α_n 列

所以(8)在 D_1 中出現时的符号按置換

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n\\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_i & \cdots & \alpha_j & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}\tag{10}$$

而定．置換(10)与置換(9)的差别就仅是第一行上把 i 与 j 对換了一下．因此(8)在 D 与 D_1 中出現时的符号相反．

性质 $3°$ 可以看作是性质 $2°$ 的推論，証明很简．性质 $3°$ 的第二个証法可以不看．

性质 $4°$ 的証明很簡单，它对我們計算行列式上很有帮助，可以使运算簡单些．例如

$$\begin{vmatrix}85 & 126 & 51\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=17\cdot\begin{vmatrix}5 & 8 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com