

易進平面幾何 下冊 (全兩冊)

★ 版權所有 ★

編者	郁 租 同
繪圖者	郁 會 鑫
出版兼發行	易 進 出 版 社
	上海(9)大通路138弄11號
印刷者	中 和 印 刷 廠
	上海(9)淮安路727弄30號
經售處	全 國 各 大 書 店

(字數：123090字)

定價 7,500 元

1954年4月第四版

13001—17000

易進平面幾何下冊目錄

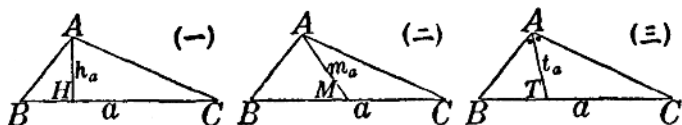
第二編	第十二章	作圖法及軌跡.....	第 159 頁
216.	作圖法	217.	三角形上之文字
218.	討論	228.	作圖題之解析法 基本三角形
230.	第十二章作圖法提要		
	1.	次要教材	2. 軌跡 動點 3. 軌跡定理
	4.	用解析法求軌跡	5. 軌跡交截法
	第三編	比例 相似多邊形	
第十三章	比例之基本定理.....		第 176 頁
231.	比 比值 比例		
232.	外項 內項 前項 後項	第四比例項	
233.	連比例 比例中項	第三比例項	
第十四章	比例線段		第 183 頁
244.	比例線段	253.	內分線段 外分線段
254.	分角線定理	256.	第十四章證法提要
第十五章	相似多邊形		第 192 頁
257.	相似多邊形	267.	相似三角形之選擇法
268.	比例線段之視察法		
269.	證兩線之積等於另兩線之積		
274.	比例線段不在兩三角形上之證法		
275.	相交兩弦定理	277.	割線定理
278.	切割線定理	286.	第十五章證法提要
第十六章	射影 三角形三邊之關係.....		第 216 頁
288.	一點之射影 一直線之射影		
294.	畢氏定理		
298.	以三角形之三邊表三高線之公式		
299.	三角形中線定理		

- 300.** 以三角形之三邊表三中線之公式
302. 以三角形之三邊表三角平分線之公式
303. 外徑定理
304. 以三角形之三邊表外接圓直徑之公式
305. 第十六章定理提要
第三編 相似形總結第 233 頁
306. 相似法之作圖
307. 證兩線段之乘積或比值爲一常量
第四編 多邊形之面積
第十七章 等積形.....第 239 頁
308. 單位面積 多邊形面積 等積形
324. 以三角形之三邊表其面積之公式
327. 變一圖形成另一圖形 卽作等積形
332. **334.** 商高定理 畢達哥拉斯定理
343. 第十七章定理提要
第四編 多邊形之面積總結.....第 259 頁
344. 作直線等分三角形或四邊形
第五編 正多邊形及圓
第十八章 圓之內接及外切正多邊形.....第 265 頁
345. 正多邊形 **352.** 正多邊形之中心
353. 正多邊形之半徑 邊心距
354. 正多邊形之中心角 **369.** 外中比 黃金分割
第十九章 圓之度量.....第 277 頁
388. 扇形 **391.** 圓環 **393.** 弓形
394. 相似扇形 **396.** 相似弓形及相似弧
401. 圓周率 **402.** 第十八章及第十九章定理提要
第五編 正多邊形及圓總結.....第 288 頁
 平面幾何應用題.....第 291 頁
 下冊補充題.....第 299 頁

第二編 第十二章 作圖法及軌跡

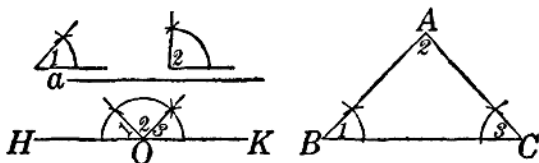
216. 作圖法 用幾何方法,依所設條件以作所求圖形。

217. 三角形上常用之文字 用 a, b, c 表三角形之邊, A, B, C 表其對角,如圖一: A 角對 a 邊。用 h_a, h_b, h_c 表其高,如圖一: $AH \perp BC$ 為 a 邊上之高,用 h_a 表之。用 m_a, m_b, m_c 表其中線,如圖二: AM 為 a 邊上之中線,用 m_a 表之。用 t_a, t_b, t_c 表其分角線,如圖三: AT 為 A 角之分角線,用 t_a 表之。



218. 討論 就已知條件與圖形間之關係,加以討論,以決定作法之可能與不可能,或決定解法之多寡。

219. 作圖題一 已知一邊,一鄰角,一對角,作一三角形



設: a 為三角形之邊, $\angle 1$ 為其鄰角, $\angle 2$ 為其對角。

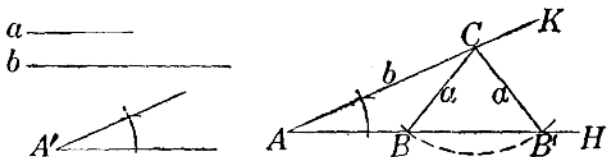
求: 作一個三角形。

作法: 1. 作直線 HK , 從 HK 上之 O 點, 作 $\angle 1$ 及 $\angle 2$, 等於已知角, 所餘之 $\angle 3$, 即為所求之三角形之第二角。
2. 作 $BC = a$, $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 3$, 二邊相交於 A 。
3. 則 $\triangle ABC$ 即合所求。

討論: 若已知角之和等於或大於一平角, 則此形不能作。

220. 系 已知一邊, 一鄰角與一對角, 可作一三角形。

221. 作圖題二 已知兩邊與其中一邊之對角,求作一三角形.



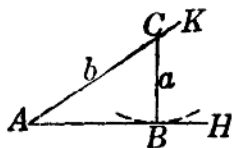
設: a 及 b 為三角形之兩邊 $\angle A'$ 為 a 邊之對角.

求: 作一個三角形.

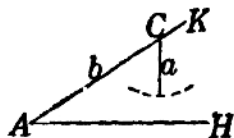
- 作法: 1. 作 $\angle HAK = \angle A'$, 在 AK 上, 截取 $AC = b$.
 2. 以 C 為圓心, a 為半徑, 作弧, 交 AH 於 B 及 B' .
 3. 則 $\triangle ABC$ 及 $\triangle AB'C$ 皆合所求.

討論: 1. 若 a 邊大於由 C 至 AH 之垂線, 因而由 C 所作之弧交 AH 於二點, 則可作二圖. 如上:

2. 若 a 邊等於由 C 至 AH 之垂線, 因而由 C 所作之弧與 AH 相切, 則可作一圖, 直角 $\triangle ABC$. 如右:



3. 若 a 邊小於由 C 至 AH 之垂線, 因而由 C 所作之弧不與 AH 相遇, 則不能作圖. 如右:



222. 系 已知兩邊與一邊之對角, 可作一三角形.

223. 作三角形必須已知三部份. 至少有一邊如下:

- (a) 三邊 (在第 10 頁) (b) 二邊及其夾角 (在第 28 頁)
 (c) 二角及其夾邊 (在第 29 頁)
 (d) 二角及其中一角之對邊 (在第 159 頁)
 (e) 二邊及其中一邊之對角 (如上)

習題五十六

1. 求作一直角三角形, 已知其斜邊及一銳角.

設: c 為斜邊, $\angle 1$ 為銳角.

求: 作一直角三角形.

作法: 1. 作任意長直線 BX .

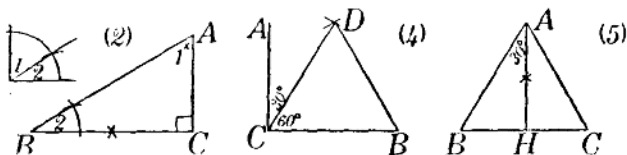
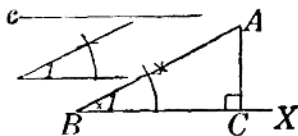
2. 在 B , 作 $\angle B = \angle 1$, 取 $BA = c$

3. 作 $AC \perp BX$, 則 $\triangle ABC$ 即合所求.

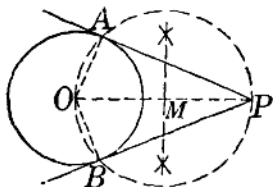
2. 求作一直角三角形, 已知其夾直角之一邊及其對角.

3. 求作一直角三角形, 已知其斜邊及一直角邊.

4. 三等分一直角. 5. 求作一等邊三角形, 已知其高.



224. 作圖題三 從圓外一已知點, 作已知圓之切線.



設: P 為 $\odot O$ 外之一已知點.

求: 從 P 點作 $\odot O$ 之切線.

作法: 1. 作 OP .

2. 平分 OP 於 M .

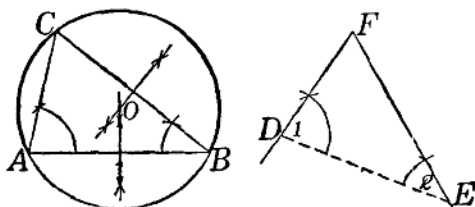
3. 以 M 為圓心, OM 為半徑作圓交 $\odot O$ 於 A 及 B .

4. 作 PA 及 PB , 均為所求之切線.

證明: 作 OA 及 OB , 則 $\angle OAP = rt. \angle$, 又 $\angle OBP = rt. \angle$, 故 $PA \perp OA$, 又 $PB \perp OB$. 故 PA 及 PB 均為 $\odot O$ 之切線.

225. 系 從圓外一已知點, 可作已知圓之切線.

226. 作圖題四 以一已知直線為弦,在其上作一弓形,使其所含之弓形角等於一已知角.



設: AB 為已知直線, $\angle F$ 為已知角.

求: 以 AB 為弦作一弓形使其內接角等於 $\angle F$.

作法: 1. 在 $\angle F$ 之邊上任取二點 D 及 E , 作 DE .

2. 以 AB 為底, 作 $\triangle ABC$, 使 $\angle A = \angle 1$, 而 $\angle B = \angle 2$.

3. 作 $\triangle ABC$ 之外接圓, 則弓形 ACB 即合所求.

證明: 因 $\angle C = \angle F$.

故在此弓形 ACB 內之任何弓形角等於 $\angle F$.

227. 系 以一已知直線為弦,在其上可作一弓形弧使所含之角等於一已知角.

習題五十七

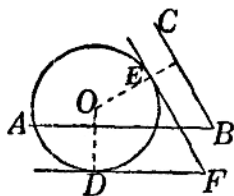
I. 作二直線皆切於已知圓, 令其交角等於任一已知角.

設: $\angle ABC$ 及 $\odot O$ 為已知

求: 作二直線皆切於 $\odot O$,

其交角 $= \angle ABC$.

作法: 1. 從圓心 O 作 AB 及 BC 之垂線, 交圓周於 D 及 E .



2. 過 D 及 E 作圓之切線, 相交於 F , 則 $\angle DFE$ 即合所求.

證明: $DF \parallel AB$, 而 $FE \parallel BC$, $\therefore \angle F = \angle B$ (看 39 頁)

2. 作一已知圓之切線,使平行於已知直線.

3. 作一已知圓之切線,使垂直於已知直線.

提示: 作半徑平行於已知直線.

4. 在已知線段上作一弓形使所含之弓形角等於
(a) 90° (b) 60°

5. 求作一圓,過不在一直線上之三點.

6. 求已知圓之圓心或圓周上一部分弧之圓心.

228. 作圖題之解析法 基本三角形

(一) 作草圖 難解之作圖題,可先作一草圖,假定合於所求.

草圖上線或角之長短大小,不必與所求之圖全合.

(二) 畫記號 草圖上已知部份須畫出記號,以便觀察.

(三) 作基本三角形 就題中已知各部份,研究其關係,或須添畫補助線,而尋出一可作之三角形,稱為**基本三角形**,先作成之.

(四) 作正圖 由基本三角形完成欲求之正圖.

以上各節稱為**解析法**. 下列諸例,可資參考.

229. 作圖題之步驟 解作圖題應有下列六個步驟

(1) 假設 (即題中已知部份) (2) 求作

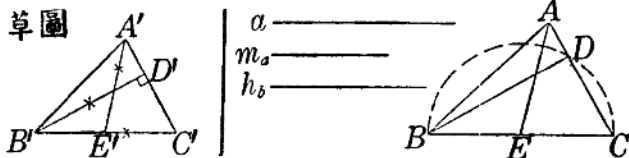
(3) 解析 (4) 作法 (5) 證明 (6) 討論

注意: (一) 解析及證明可省去其一. 用解析法可以不寫證明,因作法原依解析所得為根據,而證明僅為反其順序. 有時討論亦可省去.

(二) 若已知邊所對之角為直角,其頂點必在用已知邊為直徑所作之半圓上. 若為任何角,其頂點必在用已知邊為弦所作能內接已知角之弓形弧上.

例一 求作一三角形, 已知其一邊, 此邊上之中線, 及另一邊上之高。

草圖



設: a 為三角形之一邊, m_a 為 a 邊上之中線,
 h_b 為另一邊 b 上之高。

求: 作此三角形。

解析: (一) 假定 $\triangle A'B'C'$ 為所求之三角形。

(二) 已知 $B'C'$ 相當於 a , 而 $A'E'$ 相當於 m_a 。

又 $B'D'$ 相當於 h_b , 且 $\angle B'D'C' = rt. \angle$

(三) 在 $rt. \triangle B'D'C'$ 中, 已知斜邊及一直角邊, 故為可作。

作法: 1. 作 $BC = a$. 2. 以 BC 為直徑, 作半圓。

3. 以 B 為圓心, h_b 為半徑作弧, 交半圓於 D .
作 BD 及 CD .

4. 以 BC 之中點 E 為圓心, m_a 為半徑作弧, 交 CD 之延長線於 A . 作 AB .

5. 則 $\triangle ABC$ 為求作之三角形。

證明: $BC = a$, $BD = h_b$, $AE = m_a$

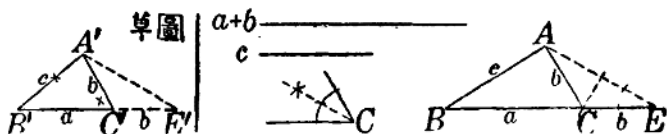
因 $\angle BDC$ 為直角 (半圓之圓周角), 故 BD 為高。

因 E 為 BC 之中點, 故 AE 為中線。

討論: 若 $h_b = a$, 或 $h_b > a$, 則此題不能作。

注意: $\triangle BDC$ 為基本三角形。

例二. 求作一三角形, 已知二邊之和與此二邊之夾角, 及第三邊.



設: $a+b$ 為三角形二邊之和, $\angle C$ 為此二邊之夾角, 又 c 為第三邊.

求: 作此三角形.

解析: (一) 假定 $\triangle A'B'C'$ 為所求之三角形.

(二) 圖中只知 $A'B'$ 及 $\angle A'C'B'$ 二部份, 是不可作.

(三) 若延長 $B'C'$ 至 E' , 使 $C'E' = C'A'$, 作 $A'E'$.

則 $\triangle A'B'E'$ 中, $A'B'$ 相當於 c , 而 $B'E'$ 相當於 $a+b$ 且 $\angle E' = \angle C'A'E'$, 但 $\angle A'C'B' = \angle E' + \angle C'A'E' = 2\angle E'$

即 $\angle E' = \frac{1}{2}\angle A'C'B'$, 相當於 $\frac{1}{2}\angle C$.

在 $\triangle A'B'E'$ 中, 已知二邊及一邊之對角, 故為可作.

作法: 1. 作 $BE = a+b$. 作 EA , 使 $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$

2. 以 B 為圓心, c 為半徑, 作弧, 交 $\angle E$ 之邊於 A , 作 BA .

3. 作 AE 之中垂線, 交 BE 於 C . 作 AC .

4. 則 $\triangle ABC$ 為求作之三角形.

討論: 若 $a+b$ 等於或小於 c , 則此題不能作.

(證明可省. 因有解析)

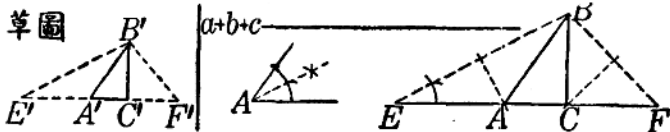
附註: 解析(二)中, 已知二部份, 是不可作.

凡作三角形, 必須已知三部份. 看第 160 頁第 223 節.

習 題 五 十 八

1. 求作三角形, 已知 a, m_a, h_c .
 2. 求作三角形, 已知 a, b, h_b .
 3. 求作三角形, 已知 a, h_b, h_c .
 4. 求作直角三角形, 已知其斜邊, 及兩直角邊之和.
 5. 求作三角形, 已知其一邊, 一鄰角, 及他兩邊之和.
 6. 求作直角三角形, 已知其兩直角邊之和, 及一銳角.
 7. 求作三角形, 已知 a, b, h_c . ($2\Delta, b$ 可作兩線)
 8. 求作三角形, 已知 $a, h_b, \angle B$.
- 例三. 求作一直角三角形, 已知其周界及一銳角.

草圖



設: $a+b+c$ 為直角三角形之周界. $\angle A$ 為銳角.

求: 作此直角三角形.

解析: (一) 假定 $\triangle A'B'C'$ 為所求之直角三角形.

(二) 圖中只知 $\angle B'A'C'$ 相當於 $\angle A$, 而 $\angle A'C'B' = 90^\circ$, $\angle$ 是不可作.

(三) 若將 $A'C'$ 向左及右延長, 使 $A'E' = A'B'$, 而 $C'F' = C'B'$, 則 $\triangle E'F'B'$ 中, $E'F'$ 相當於 $a+b+c$.

而 $\angle E' = \frac{1}{2} \angle B'A'C'$ 相當於 $\frac{1}{2} \angle A$,

又 $\angle F' = \frac{1}{2} \angle A'C'B' = 45^\circ$

在 $\triangle E'F'B'$ 中, 已知二角及夾邊, 故為可作.

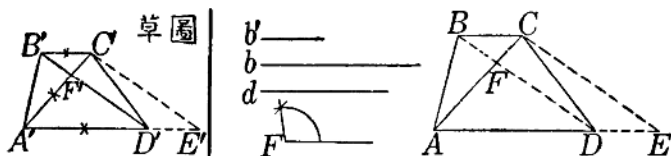
作法: 1. 作 $EF = a+b+c$.

2. 作 $\angle E = \frac{1}{2} \angle A$, 作 $\angle F = 45^\circ$, 兩邊相交於 B .

3. 作 EB 及 FB 之中垂線, 交 EF 於 A 及 C , 作 AB 及 CB .

4. 則 $\triangle ABC$ 為求作之三角形.

例四. 求作一梯形, 已知其二底邊, 一對角線及二對角線所夾之角. [下述方法, 稱為**平移法**, 看 299 頁]



設: b 與 b' 為梯形之二底邊, d 為其一對角線
 $\angle F$ 為二對角線所夾之角.

求: 作此梯形.

解析. (一) 假定 $A'B'C'D'$ 為所求之梯形.

(二) 圖中已知部份為 $B'C'$, $A'D'$, $A'C'$, $\angle A'F'D'$

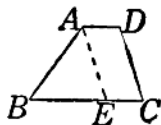
(三) 若由 C' 作 $C'E' \parallel B'D'$, 遇 $A'D'$ 於 E' , 則 $D'E' = B'C'$,
 在 $\triangle A'C'E'$ 中, $\angle A'C'E' = \angle A'F'D'$, 相當於 $\angle F$, 而 $A'C'$
 相當於 d , 又 $A'E'$ 相當於 $b+b'$, 故 $\triangle A'C'E'$ 為可作.

作法: 1. 作 $AC = d$ 2. 作 CE , 使 $\angle ACE = \angle F$.
 3. 以 A 為圓心, $b+b'$ 為半徑, 作弧, 交 $\angle ACE$ 之邊於 E ,
 作 AE . 4. 在 AE 上, 取 $ED = b'$, 作 DC .
 5. 作 $DB \parallel EC$. 6. 作 $CB \parallel DA$, 遇 DB 於 B .
 7. 作 AB . 8. 則 $ABCD$ 為求作之梯形.

習題五十九 看 299 頁 平移法

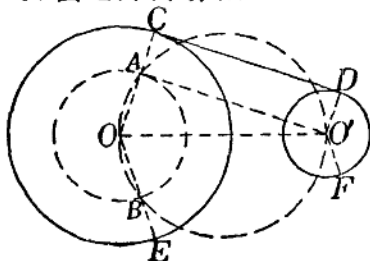
1. 求作三角形, 已知其周界及底端兩角.
2. 求作等腰三角形, 已知其周界及底角.
3. 求作一梯形, 已知其四邊.

解析: 若由 A , 作 $AE \parallel DC$, 則……



4. 求作一梯形, 已知其二底, 一腰及一底角. (圖同上)
5. 求作梯形, 已知二底 (b 及 b') 二對角線 (d_1 及 d_2)
6. 求作梯形, 已知一底, 二對角線及對角線所夾之角.

7. 求作兩已知圓之外公切線



設: $\odot O$ 與 $\odot O'$ 為兩已知圓。此兩圓之半徑為 r 及 r' 。

求: 作此兩圓之外公切線。

作法: 1. 以 O 為圓心, 兩圓半徑之差 $r-r'$ 為半徑, 作小圓。
 2. 以 OO' 為直徑作一圓, 交小圓於 A 與 B 。
 3. 作 OA 與 OB , 延長之, 遇外圓於 C 與 E 。作 AO' 。
 4. 以 C 與 E 為圓心, AO' 為半徑, 作弧, 交 $\odot O'$ 於 D 與 F 。
 5. 作 CD (與 EF) 即為所求之外公切線。

證明: $AC = OC - OA = r - (r - r') = r' = O'D$,

而 $CD = AO'$, 故 $ACDO'$ 為平行四邊形。

故 $CD \parallel AO'$ 而 $AC \parallel O'D$, 則 $\angle OCD = \angle OAO' = 90^\circ$ 。

而 $\angle O'DC = 90^\circ$ 。因知 CD 為兩圓之外公切線。

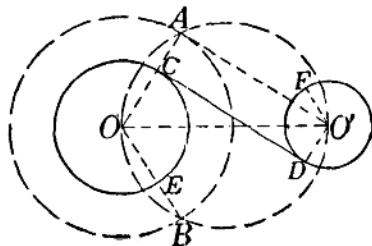
8. 求作兩已知圓之內公切線。

設: $\odot O$ 與 $\odot O'$ 為已知。

求: 作此兩圓之內公切線。

作法: 1. 以 O 為圓心, 兩圓半徑之和 $r+r'$ 為半徑作大圓。

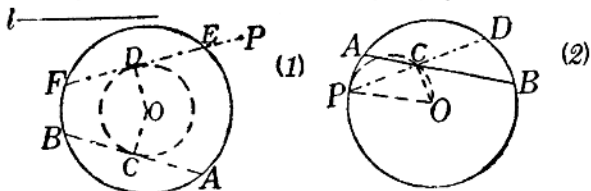
(其餘與上同, 學者補足之)



230. 第十二章作圖法提要 (一)作三角形 複看第 160 頁第 223 節 (二)解析法 複看第 163 頁第 228 節

複習題十二

1. 過一已知點,作一已知圓之割線,使其圓內之部份等於定長. 提示: 作弦 $AB = \text{定長 } l$
2. 從已知圓周上一點求作一弦,使被一已知弦所平分. 提示: PO 為已知.

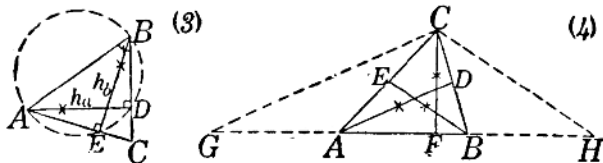


3. 求作一三角形,已知 $h_a, h_b, \angle B$.

提示: 以 $AD = h_a$ 為弦,作弓形 $\widehat{ABD}$,能內接 $\angle B$.

4. 求作一三角形,已知 m_a, m_b, h_c .

解析: 作 $CG \parallel DA$, 作 $CH \parallel EB$, 遇底邊之延長線於 G 與 H 則 $CG = 2DA$, 而 $CH = 2EB$, 又 $GA = AB = BH$.



5. 求作一三角形,已知 $a, \angle B, h_a$.

6. 求作一三角形,已知 $\angle A, h_a, t_a$.

提示: 先用 h_a, t_a 作基本三角形.

7. 求作一三角形,已知 a, h_a, m_a .

注意: 另有作圖題在第 182 頁及第 191 頁,極重要.

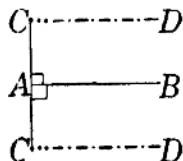
1. 次要教材 軌跡宜在高中精細研究,此處略為敘述.

2. 定義 軌跡 動點

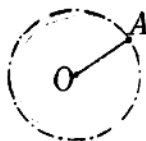
某點依一定之條件而移動,其所經之路線,稱爲此點之軌跡.移動之點,稱爲動點. 軌跡是一條線或幾條線.

3. 軌跡定理 [第一] 有一定距離(定長)之點之軌跡

(一) 距一直線有定長之等距離之點,其軌跡爲在此直線兩側距定長之平行線. 如圖: AB 爲直線, AC 爲定長, $CD \parallel AB$, 則 CD 爲軌跡. (設 C 點距 AB 半寸移動)

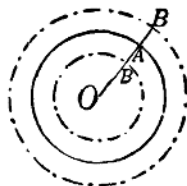


(二) 距一定點有定長之等距離之點,其軌跡爲以定點爲圓心,定長爲半徑之圓. 如圖: 以定點 O 爲圓心,定長 OA 爲半徑,所作之圓,即爲軌跡.



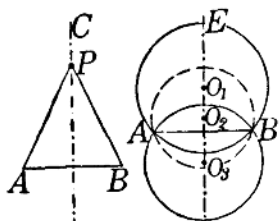
(設 A 點距定點 O 半寸移動)

(三) 距一圓周有定長之等距離之點,其軌跡爲已知圓之半徑與定長之和或差爲半徑之同心圓. 如圖: O 爲已知圓之圓心, OA 爲半徑, AB 爲定長, 則以 OA 與 AB 之和或差爲半徑,所作之外內兩同心圓,即爲軌跡.

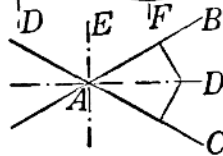


[第二] 等距離之點之軌跡

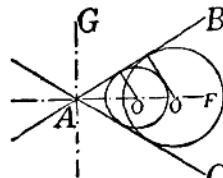
(四) (a) 與一直線兩端(或與兩定點)等距離之點,其軌跡爲此線之中垂線 如: CD .
(b) 過一直線兩端(或過兩定點)之圓,其圓心之軌跡爲此線之中垂線 如: EF .



(五) (a) 與一角之兩邊(或與相交兩直線)(或與兩不平行線)等距離之點,其軌跡爲此角之平分線 如: AD 與 AE .

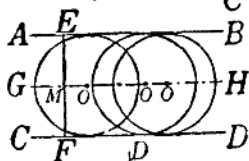


(b) 切一角之兩邊之圓(或切相交兩直線之圓)(或切兩不平行線之圓)其圓心之軌跡爲此角之平分線.

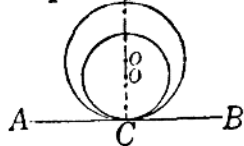


如: AF 與 AG .

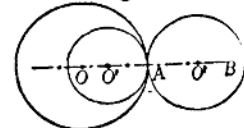
(六) 與兩 $\parallel$ 等距離之點(或切兩 $\parallel$ 之圓心)其軌跡爲過此兩線距離中點之平行線 如: GH .



(七) 切於直線上一一定點之圓,其圓心之軌跡爲過此定點所作直線之垂線 如: CD .



(八) 切於圓周上一一定點之圓,其圓心之軌跡爲從已知圓之圓心連定點之直徑,或延長線 如 OB .

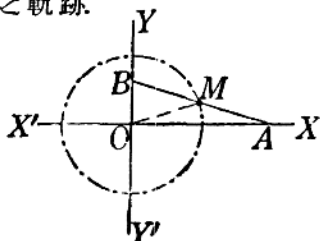


4. 用解析法求軌跡 求軌跡時,可先解析,但解析部份可以不說明,或說明解析求得軌跡,不必再證明,因證明已包含在解析之內。如下題 1。

次 要 習 題 一 用解析法求軌跡

1. 有一定長之直線,兩端在互相垂直之二直線上移動。求此直線中點之軌跡。

設: $YY' \perp XX'$ 於 O 點,
又 AB 為定長之直線。
條件: AB 之兩端 A 及 B
在 XX' 及 YY' 上移動。
而 M 為 AB 之中點。



求 M 點之軌跡。

解析: 作 OM 。

因 M 為直角 $\triangle AOB$ 斜邊 AB

之中點, 故 $MO = MA = MB = \frac{1}{2}AB \cdots$ (此為定長)

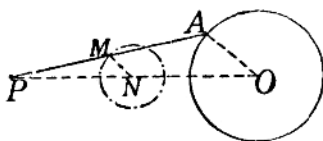
軌跡: 雖 M 隨 AB 移動, 但距 O 點恆為 $\frac{1}{2}AB$, 且 O 為定點。

故 M 點之軌跡為以 O 為圓心, 以 $\frac{1}{2}AB$ 為半徑之圓周。

2. 從圓外一定點至圓周作任意直線, 求其中點之軌跡

設: P 為定圓 O 外之一定點。

條件: PA 為至圓周之任意
直線而 M 為 PA 之中點。



求 M 點之軌跡。

解析: 連 PO , 取 PO 之中點 N (此可為定點) 作 MN ,
則 $MN \parallel AO$, 且 $MN = \frac{1}{2}AO \cdots$ (此為定長)

軌跡: 故 M 點之軌跡為以 N 為圓心, 以 $\frac{1}{2}AO$ 為半徑之圓周。