



考试名家指导

MBA Maths

2005版

联考复习指导系列

第3版

王式安 史荣昌
庄大蔚 郑家俊 编 著

数学分册

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



MBA 联考复习指导系列

数 学 分 册

第 3 版

王式安 史荣昌

庄大蔚 郑家俊

编著



机 械 工 业 出 版 社

本书由机械工业出版社出版，未经出版者书面许可，本书的任何部分不得以任何方式复制或抄袭。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (C I P) 数据

MBA 联考复习指导系列. 数学分册/ 王式安等编著. —3 版.

—北京: 机械工业出版社, 2004. 8

ISBN 7-111-10749-7

I. M... II. 王... III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 077819 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 蓝伙金 边 萌 责任编辑: 边 萌 徐永杰

责任印制: 石 冉

三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 8 月第 3 版第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16 · 16.25 印张 · 371 千字

定价: 30.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

第3版前言

这是一套针对 MBA 联考选拔性应试的必备丛书。

我们会同北京大学、清华大学、中国人民大学、北京理工大学、西安交通大学、北京交通大学、上海交通大学、同济大学等几所高校的 MBA 辅导名师和资深命题专家，组织编写了这套考试名家指导丛书，分为“MBA 英语专项训练系列”，“MBA 联考复习指导系列”，“MBA 联考模拟试卷系列”等共 13 本。该套丛书严格依据最新 MBA 联考大纲及最新命题方向和趋势编写，题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理，应试针对性极强。

一、超一流豪华师资阵容

本套丛书的作者团队是从全国 MBA 辅导名师中精心挑选组成的。他们多年来一直从事 MBA 考前辅导和命题研究工作，既能把握考生需求与应试精髓，又能洞察 MBA 命题规律与趋势。

讲课 $\longleftrightarrow$ 著书 $\longleftrightarrow$ 研究，紧密结合，相互推动，在讲课中实践，在著书中提炼，在研究中升华，这是一流应试辅导丛书品质保证的基石。我们的作审者团队如下：

数学团队：王式安 赵达夫 史荣昌 庄大蔚 郑家俊

英语团队：曹其军 王建华 安娜 习传进 吴梅

张磊 章杰

面试指导团队：李培煊 赵鑫全 过聚荣 邱明

逻辑团队：杨武金 柴生泰

写作团队：谷衍奎 赵玲

二、紧扣 MBA 联考最新大纲，直击 2005 年 MBA 联考真题

丛书紧扣最新大纲，精心研制的例题与习题，难度上等同或略高于真题考试难度，在题型设置上与 2005 年联考保持一致，其中数学分册中含有许多作者原创性的考试应对技巧和经验介绍。我们不鼓励“题海战术”，而是立足于帮助考生在深入研究最新考纲和历年真题的基础上，准确把握联考的难点、重点和命题趋势，直击 2005 年 MBA 联考真题。

三、体系明晰、精讲精练，提供 MBA 联考标准化解决方案

“MBA 英语专项训练系列”包括：《英语词汇实战宝典》、《商务词汇与动词词组》、《英语阅读理解高分技巧精粹》、《MBA 联考英语阅读理解 100 篇精粹》、《MBA 联考英语万能写作》（背诵版）、《英语历年真题精解》（阅读理解、翻译、完型填空）

编者的话

本书是为准备参加 2005 年全国 MBA 联考考试的考生所编写的,它适应于考前系统复习,有助于全面提升应试备考能力。

本书的编者结合多年来参加全国统一考试命题工作和教学实践的经验,严格按照全国工商管理硕士教育指导委员会制定的 2005 年 MBA 联考综合能力(数学)考试大纲要求,共同努力编写本复习备考书,本书每章分三部分,分述如下:

一、知识点评述

简述本章重要概念、理论、性质、定理、公式和方法,帮助考生总结、归纳所学知识。

二、典型例题分析

精选了一部分例题,其中包括往年的 MBA 联考真题和历年的备选题,各种题型反映了大纲所要求的深度和广度。对每个例题除详细解答外还给出了思路分析和评注,指出解决这类题型的关键或思路实质,以促进考生从根本上掌握解题的基本方法。

三、习题与答案

习题基本上按 MBA 联考真题要求编写,分为充分性判断题与问题求解题,它们中有些就是往年 MBA 联考真题,有些是历年备选习题,习题都有答案,有些还给出解法或提示。不过建议读者不要一开始就看解答,一定要坚持自己先做,做不出或做完后再核查对照,核对后一定还要总结一下,才能真正作到融会贯通。

需要指出的是,2005 年全国 MBA 联考综合能力考试大纲·数学部分作了相当大的调整,本书依据新大纲也作了相应的调整。

本书是为 MBA 联考应试者所写。

由于时间仓促,书中难免有所疏漏,诚请专家和读者指正。

6 本书，实用性强，使考生易于针对英语弱项，专项强化提高，快速突破英语难关。

“MBA 联考复习指导系列”包括：《英语分册》、《数学分册》、《面试分册》、《逻辑分册》、《写作分册》5 本书。该体系紧密结合最新大纲和指定用书，精讲精练，突出应考难点与重点，洞穿历年真题，强化训练提高，应试针对性极强。

“MBA 联考模拟试卷系列”包括：《英语分册》、《综合能力分册》两本书。严格按照 2005 年 MBA 联考考试大纲和命题趋势精心设计，考点分布合理，试卷难度等同或略高于真题难度，提供全真模拟考场感觉，融汇了众多作者多年教学、辅导、命题研究的心血和智慧，直击 2005 年 MBA 联考真题。

四、一套应试针对性很强的辅导书应具备的要素

一套好的辅导教材，总要具备四个要素：

□是看它是否严格遵循最新考试大纲；□是看它是否具有前瞻性，能否针对正式的考试；□是看它的作者是否真正透彻了解 MBA 联考的要求，内容的难度是否与联考试卷相符或略高；□是该书是否能满足考生的需求，是否凸显了为考生备考服务的宗旨。

本套丛书很好地体现了这四方面的要求，每道试题都是众多辅导名师与专家教学经验的结晶。往届高分考生的经验说明，“三道题做一遍不如一道题做三遍”、“三本书各读一遍不如一本书读三遍”。通过参考人员对本套丛书的认真阅读和演练，相信必将会为顺利考入名校 MBA 打下坚实的基础。

我们力争将本套丛书培育成为 MBA 辅导教材的精品。

希望经过我们不懈的努力和 20 多位 MBA 联考辅导专家的倾情之作，能够为您顺利突破 MBA 联考保驾护航。

MBA 考试名家指导专题策划小组

目 录

第3版前言

编者的话

第一章 绝对值、比和比例、平均值	(1)
第一节 充分条件	(1)
第二节 绝对值	(4)
第三节 比和比例	(9)
第四节 平均值	(20)
习题及参考答案	(23)
第二章 代数式运算、方程与不等式	(26)
第一节 整式的运算	(26)
第二节 方程与方程组	(35)
第三节 不等式与不等式组	(45)
习题及参考答案	(58)
第三章 函数、极限、连续	(63)
第一节 函数	(63)
第二节 极限	(65)
第三节 函数的连续性	(67)
第四节 典型例题详解	(69)
习题及参考答案	(78)
第四章 一元函数微分学	(82)
第一节 导数	(82)
第二节 微分	(84)
第三节 函数的性质	(85)
第四节 典型例题详解	(86)
习题及参考答案	(99)
第五章 一元函数积分学	(102)
第一节 不定积分	(102)
第二节 定积分	(104)

第三节 典型例题详解·····	(108)
习题及参考答案·····	(123)
第六章 多元函数微分学 ·····	(126)
第一节 多元函数·····	(126)
第二节 偏导数与多元函数微分·····	(128)
第三节 典型例题详解·····	(130)
习题及参考答案·····	(135)
第七章 行列式 ·····	(137)
第一节 行列式基本知识点简介·····	(137)
第二节 典型例题详解·····	(139)
习题及参考答案·····	(144)
第八章 矩阵 ·····	(146)
第一节 矩阵基本内容简介·····	(146)
第二节 典型例题详解·····	(151)
习题及参考答案·····	(159)
第九章 向量及线性方程组 ·····	(163)
第一节 向量及线性方程组基本内容简介·····	(163)
第二节 典型例题详解·····	(167)
习题及参考答案·····	(180)
第十章 矩阵的特征值与特征向量 ·····	(186)
第一节 基本内容简介·····	(186)
第二节 典型例题详解·····	(187)
习题及参考答案·····	(191)
第十一章 随机事件及其概率 ·····	(194)
第一节 随机事件的概念及其运算·····	(194)
第二节 事件的概率·····	(199)
第三节 条件概率·····	(206)
第四节 事件的独立性及独立试验序列概型·····	(212)
习题及参考答案·····	(216)
第十二章 随机变量 ·····	(224)
第一节 随机变量和离散型随机变量及其分布·····	(224)
第二节 连续型随机变量的概率密度与分布函数·····	(230)
第三节 随机变量的数学特征·····	(236)
习题及参考答案·····	(243)

第一章 绝对值、比和比例、平均值

第一节 充分条件

一、基本内容简介

(一) 知识要点

1. 定义

对两个命题 A 和 B 而言,若由命题 A 成立,则一定可以推出命题 B 也成立(即 $A \Rightarrow B$ 为真命题),则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件.

2. 条件与结论

两个数学命题中,通常会有“条件”与“结论”之分,若由“条件命题”的成立,肯定可以推出“结论命题”也成立,则称“条件”充分.若由“条件命题”不一定能推出(或不能推出)“结论命题”成立,则称“条件”不充分.

例如:不等式 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立.

- (1) $1 < x < 3$; (2) $x > 7$; (3) $x = 5$; (4) $x < 6$;
(5) $-1 < x < 6$.

此例中,题干“ $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立”,这个命题是“结论”,下面分别给出了 5 个命题都是不同的“条件”.现在我们可以把它们按充分与否分为两类:

条件(1)、(3)、(5)充分.

条件(2)、(4)不充分.

(二) 知识点评述

1. 条件充分性判断

从给定的条件出发去分析,在此条件下,结论是否一定成立,若是,则条件充分;若否,则条件不充分.我们在做充分性判断的试题时,一般不可从“结论”入手去求解!那样只能得出“条件”对“结论”的“必要性”,而与充分性判断相背离.如:在上例中,由结论命题: $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立,可解得 $-1 < x < 6$.这只证明条件(5)是必要的.事实上,条件(5)是结论 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立的充分必要条件,才“歪打正着”被你找到了一个充分条件.

2. 充分性判断的标准化答案

本讲义中,所有充分性判断题的(A)、(B)、(C)、(D)、(E)五个选项所规定的含义,均以下

列陈述为准,即

(A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分.

(B) 条件(2)充分,但条件(1)不充分.

(C) 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分.

(D) 条件(1)充分,条件(2)也充分.

(E) 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和(2)联合起来也不充分.

上述5个选项,把条件(1)和(2)以及两条件联立起来(的充分性)的所有情况都包括了,但其中“联合”不是数学名词,没有准确的定义,改为“联立”与原题意比较贴切.

例如:不等式 $x(6x+5) < 4$ 成立.

$$(1) x > -1; \quad (2) x < \frac{1}{3}.$$

从条件(1)不难看出 x 的取值无上限, $x(6x+5)$ 的值当 $x \rightarrow +\infty$ 时必有 $x(6x+5) \rightarrow +\infty$, 原不等式不可能恒成立.

从条件(2),可取 $x = -2$ 代入不等式:

左边 $= -2(-12+5) = 14 >$ 右边,原式不能成立.

从 $x(6x+5)$ 也可看出,当 x 取足够小的负值时, $x(6x+5)$ 为正值且无上限.

所以条件(1)和(2)都不充分,但条件(1)和(2)联立起来(即 $\begin{cases} x > -1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$)

时,使原不等式成立,即联合起来充分. 因为 $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 这个区间,是原不等式解集 $X = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 的一个子集,肯定可以使不等式成立. 因此,此题的答案是(C).

二、典型例题详解

【例1】 (2003年) 一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根之差的绝对值为4.

$$(1) \begin{cases} b = 4, \\ c = 0; \end{cases} \quad (2) b^2 - 4c = 16.$$

解 答案是(D).

由条件(1),方程化为

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 0$$

则 $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| = 4$, 条件(1)充分.

由条件(2),方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两个根

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm 2$$

$$\text{则} \quad |x_1 - x_2| = \left| \left(-\frac{b}{2} + 2\right) - \left(-\frac{b}{2} - 2\right) \right| = 4$$

条件(2)也充分.

【例 2】 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其前 80 项之和为

$$S_{80} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{80}$$

可求出

$$(1) a_3 + a_7 + a_{74} + a_{78} = 100;$$

$$(2) a_4 + a_{11} + a_{69} + a_{76} = 96.$$

解 答案是(A).

从(1) 和等差数列的性质知:

$$a_1 + a_{80} = a_3 + a_{78} = a_7 + a_{74} = 50$$

$$S_{80} = \frac{a_1 + a_{80}}{2} \times 80 = 2000$$

所以条件(1) 充分.

同理, 由条件(2) 只能求出 S_{79} 而得不到 S_{80} , 所以条件(2) 不充分.

【例 3】 已知不等式 $|\log_2(x-1)| \leq 3$ 成立.

$$(1) x > 1;$$

$$(2) 2 \leq x \leq 9.$$

解 答案是(B).

$y = \log_2(x-1)$ 为增函数, 其定义域为 $x > 1$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时有 $y \rightarrow +\infty$. 不满足原不等式, 所以条件(1) 不充分.

再看条件(2), 当 $2 \leq x \leq 9$ 时 $\log_2(x-1) \geq 0$ 恒成立, 又因 $y = \log_2(x-1)$ 为增函数, $x = 9$ 时 $y_{\max} = 3$; $x = 2$ 时 $y_{\min} = 0$, 所以条件(2) 充分.

【例 4】 若等式 $|x - \lg y| = x + \lg y$ 成立, 其中 x 和 $\lg y$ 都是实数, 且 $y \geq 1$

$$(1) y = 1 \text{ 且 } x \geq 0;$$

$$(2) \sqrt{x}(y-1) = 0.$$

解 答案是(D).

条件(1) 代入等式:

$$\text{左边} = \text{右边} = 0$$

等式成立, 条件(1) 充分.

条件(2) $\sqrt{x}(y-1) = 0$ 成立, 必有 $x \geq 0$ 这一隐含条件, 条件(2) 即

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y > 1 \end{cases}$$

无论哪一种情况都能使原等式都成立, 所以条件(2) 也充分.

【例 5】 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项之和为 S_n , 若 S_{60} 的值可以求得:

$$(1) a_5 + a_{44} = 100 - 3k;$$

$$(2) a_{17} + a_{56} = 3k + 100 \quad (k \in \mathbf{R}).$$

解 答案是(C).

由于 $k \in \mathbf{R}$ 是一个任意实数, 所以条件(1) 和(2) 都不充分. 但条件(1) 和(2) 联合起来即

$$\begin{cases} a_5 + a_{44} = 100 - 3k \\ a_{17} + a_{56} = 3k + 100 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(1) + (2) 得

$$a_5 + a_{17} + a_{44} + a_{56} = 200$$

根据等差数列的性质:

$$a_1 + a_{60} = a_5 + a_{56} = a_{17} + a_{44} = 100$$

$$S_{60} = \frac{a_1 + a_{60}}{2} \times 60 = 3000$$

条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分.

关于充分性判断的进一步研讨,将在本书以后各章节中分别加强训练,务求达到2004年MBA联考对此类题型的指定要求.

第二节 绝对值

一、基本内容简介

1. 定义

实数 a 的绝对值记作 $|a|$,其文字叙述的定义的数学表达式如下:

$$|a| = \begin{cases} a, & (a \geq 0) \\ -a, & (a < 0) \end{cases}$$

2. 几何意义

一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离值,就是这个实数的绝对值.

3. 绝对值的性质

(1) 对称性 互为相反数的两个实数的绝对值相等,即

$$|-a| = |a|$$

(2) 等价性 任何实数的平方的算术平方根就是这个实数的绝对值,即

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\text{其中 } a \in \mathbf{R})$$

(3) 自比性 任意实数的绝对值不小于它自身,而绝对值的相反数不大于它自身,即

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

当且仅当 $a \geq 0$ 时,右边等号成立;而 $a \leq 0$ 时,左边等号成立.

(4) 非负性 任何实数 a 的绝对值非负.即 $|a| \geq 0$,推而广之,当有

$$\sqrt{a^2} \geq 0, \quad |f(a \cdot b)| \geq 0, \quad a^2 \geq 0, \quad [f(x)]^2 \geq 0, \quad a \geq 0 \text{ 时}$$

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(5) 基本绝对值不等式

$$1) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a > 0)$$

$$2) |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ 或 } x \geq a \quad (a > 0)$$

3) $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$,右边等号成立的充要条件是 $ab \geq 0$,而左边等号成

立的充要条件是 $\begin{cases} ab \leq 0 \\ |a| \geq |b|. \end{cases}$

4) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, 即有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和.

例如: 等式

$$|2x - 11| = |x - 3| + |x - 8|$$

成立的条件是().

(A) $3 \leq x \leq 8$

(B) $x \leq 8$

(C) $(x - 3)(x - 8) \geq 0$

(D) $x \geq 3$

(E) $-8 \leq x \leq -3$

解 由

$$|2x - 11| = |(x - 3) + (x - 8)| \leq |x - 3| + |x - 8|$$

这一基本绝对值不等式, 等号成立的充要条件为 $(x - 3)(x - 8) \geq 0$ 可以得知:

当 $x \leq 3$ 或 $x \geq 8$ 时, 等式都能成立.

二、典型例题详解

(一) 条件充分性判断题

【例 1】 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $|a - b| = |a| + |b|$ 成立.

(1) $ab \geq 0$;

(2) $ab \leq 0$.

解 答案是(B).

分析 题干是由基本绝对值不等式: $|a - b| \leq |a| + |b|$ 中等号成立的特殊情况, 目的是进一步明确指出上述绝对不等式中等号成立的充要条件, 以充分性判断题形式出现, 只是为了使大家区分此绝对不等式与绝对不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ 等号成立的条件是不同的.

【例 2】 已知 $|y - a| \leq 2$ 成立.

(1) $|2x - a| \leq 1$;

(2) $|2x - y| \leq 1$.

解 答案是(C).

分析 由条件(1)和(2)中都含变量 x 来看, 两个条件都必然不是充分条件. 现在要考虑两个条件联合起来是否充分, 即考查

$$\begin{cases} |2x - a| \leq 1 & (1) \\ |2x - y| \leq 1 & (2) \end{cases}$$

是否充分.

由条件(2)得

$$|y - 2x| \leq 1 \quad (3)$$

由 $\begin{cases} \text{条件(1)} \\ \text{条件(3)} \end{cases}$ 可得到

$$|2x - a| + |y - 2x| \geq |(2x - a) + (y - 2x)|$$

即

$$1 + 1 \geq |y - a|$$

所以

$$|y - a| \leq 2$$

这就是说条件(1)和(2)联合起来是充分的.

【例 3】 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

$$(1) f(x) = \left| x - \frac{2}{5} \right| + \left| \frac{1}{10} + x \right|; \quad (2) f(x) = x + \frac{1}{54x^2} (x > 0).$$

解 答案是(D).

分析 由条件(1)有

$$f(x) = \left| \frac{2}{5} - x \right| + \left| \frac{1}{10} + x \right| \geq \left| \left(\frac{2}{5} - x \right) + \left(\frac{1}{10} + x \right) \right| = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $\left(\frac{2}{5} - x \right) \left(\frac{1}{10} + x \right) \geq 0$ 时等号成立, 取等号成立的一个充分条件 $\left(\frac{2}{5} - x \right) \left(\frac{1}{10} + x \right) = 0$, 可得: $x = \frac{2}{5}$ 或 $x = -\frac{1}{10}$ 时, $y_{\min} = \frac{1}{2}$.

由条件(2)有

$$f(x) = x + \frac{1}{54x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{54x^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{54x^2}} = \frac{1}{2}$$

当且仅当 $\frac{x}{2} = \frac{1}{54x^2}$, 即 $x = \frac{1}{3}$ 时, $y_{\min} = \frac{1}{2}$.

因此, 条件(1)充分, 条件(2)也充分.

【例 4】 已知 $|\log_{\frac{1}{2}} x| = -\log_{\frac{1}{2}} x (x > 0)$.

$$(1) x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]; \quad (2) x \in [1, 3].$$

解 答案是(B).

分析 由对数函数的性质, 当底数 $a \in (0, 1)$ 时

$$x \in (0, 1) \text{ 对数 } \log_a x > 0$$

$$x \in (1, +\infty) \text{ 对数 } \log_a x < 0$$

当 $x = 1$ 时, $\log_a x = 0$. 因此, 只有当 $x \geq 1$ 时 $-\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$ 才能成立.

所以条件(1)不充分, 但条件(2)充分.

【例 5】 数列 $\{\lg |a_n|\}$ 为等差数列.

(1) 数列 $\{|a_n|\}$ 为等比数列, 且 $a_n \neq 1$; (2) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $q > 0$.

解 答案是(D).

分析 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_n > 0$ 时, 必然有 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列的结论. 而 $|a_n| \iff a_n > 0$, 因此, 条件(1)和(2)中的前半部分就已经充分了. “且如何, 如何”属画蛇添足, 无需考虑.

【例 6】 $|x^2 - 5x| < 6$ 能够成立.

$$(1) x > 3; \quad (2) x < 5.$$

解 答案是(C).

分析 条件(1)不充分, 不是大于 3 的一切实数都能使原不等式成立. 举出一个反例就可以否定条件(1)的充分性. 如: 当 $x = 6$ 时, 原不等式就不成立. 同理, 条件(2)也不充分, 例如当 $x = -2$ 时, 原不等式也不成立.

但是条件(1)和(2)“联合”起来, 即 $\begin{cases} x > 3 \\ x < 5 \end{cases} \iff 3 < x < 5$ 时, 原式显然成立.

所以条件(1)和(2)单独都不充分,但它们联合起来是充分的.

【例 7】 (2003 年) 不等式 $|x-2| + |4-x| < S$ 无解.

(1) $S \leq 2$;

(2) $S > 2$.

解 答案是(A).

分析 因为 $|x-2| + |4-x| \geq |(x-2) + (4-x)| = 2$,

即使 $S = 2$, 不等式 $|x-2| + |4-x| < 2$ 仍然无解.

所以条件 $S \leq 2$ 充分.

评注 判断充分性的试题,如果题干是一个可求解的简单不等式,如本题,则可以去求出使这个条件不等式成立的充要条件,即求出解集. 本题解集 $X = (-1, 2) \cup (3, 6)$, 然后观察所给的两个条件(1)和(2). 条件所描述的集合中,只要含有任何解集 X 之外的元素,则条件不充分. 本题条件(1)和(2)显然都不充分,但它们联合起来,得到的 $x \in (3, 5)$ 是解集 X 的子集,因此充分.

(二) 问题求解题

【例 8】 若关于 x 的不等式 $|3-x| + |x-2| < a$ 的解集是 $\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是().

(A) $a < 1$

(B) $a \leq 1$

(C) $a > 1$

(D) $a \geq 1$

(E) $a \neq 1$

解 答案是(B).

分析 $|3-x| + |x-2| \geq |(3-x) + (x-2)| = 1$, 即使 $a = 1$ 时, 原不等式仍然无解.

所以 $a \leq 1$ 时解集为 $\emptyset$.

【例 9】 $k \in \mathbf{R}$, 绝对值 $|2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k}|$ 可以化简为().

(A) 0

(B) $2^{-(2k-1)}$

(C) 2^{2k-1}

(D) -2^{2k+1}

(E) $2^{-(2k+1)}$

解 答案是(E).

分析 因为参变量 k 的值不定, 绝对值符号内三个 2 的幂无法计算, 但它们同为 2 的幂, 所以可用分解因式的方法化简, 即

$$\begin{aligned} 2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k-1)} + 2^{-2k} &= -2^{-2k}(-2^{-1} + 2 - 1) = -2^{-2k} \times 2^{-1} \\ &= -2^{-2k-1} = -2^{-(2k+1)} \\ | -2^{-(2k+1)} | &= 2^{-(2k+1)} \end{aligned}$$

【例 10】 使不等式 $0 < |x-3| - |x-5| < m$ 成立的实数 m 的取值范围是($x \in \mathbf{R}$ 且 $x \geq 4$)().

(A) $m > 2$

(B) $m \geq 2$

(C) $m > 1$

(D) $m \geq 1$

(E) $1 < m < 2$

解 答案是(A).

分析 由绝对值不等式的性质定理有

$$|a| - |b| \leq |a + b|$$

当且仅当 $ab \leq 0$ 且 $|a|$ 不小于 $|b|$ 时等号成立. 又因为 $|x-3| \geq |x-5|$ 在 $x \geq 4$ 的条件下成立, 再依据绝对值的性质, 把原式化为它的等价命题

$$0 < |x-3| - |5-x| < m$$

这样一来, 在已知 $x \geq 4$ 的条件下, 又有

$$(x-3)(5-x) \leq 0$$

这时不等式

$$|x-3| - |5-x| \leq |(x-3) + (5-x)|$$

等号成立的条件也齐备了. 所以 $|x-3| - |5-x| \leq 2$, 综上所述, 不等式

$$0 < |x-3| - |x-5| \leq 2$$

成立, 从而得知只有 $m > 2$ 时才能满足题目的条件.

【例 11】 等式 $|2m-7| = |m-2| + |m-5|$ 成立, 则实数 m 值的范围是().

(A) $2 \leq m \leq 5$

(B) $m \leq -2$ 或 $m \geq 5$

(C) $-2 < m < 5$

(D) $m \leq 2$ 或 $m \geq 5$

(E) $m \leq -5$ 或 $m \geq -2$

解 答案是(D).

分析 原式等号成立的充要条件是

$$(m-2)(m-5) \geq 0$$

所以

$$m \leq 2 \quad \text{或} \quad m \geq 5$$

【例 12】 已知 $x \in [2, 5]$, $|a| = 5-x$, $|b| = x-2$, 则 $|b-a|$ 的取值范围是().

(A) $[-3, 5]$

(B) $[0, 5]$

(C) $[1, 3]$

(D) $[3, 5]$

(E) $[0, 3]$

解 答案是(E).

分析 因为 $x \in [2, 5]$, 又 $|b-a| = |a-b|$, 所以

$$|a-b| \leq |a| + |b| = (5-x) + (x-2) = 3$$

$$|a-b| \geq ||a| - |b|| = |(5-x) - (x-2)| = |7-2x| \geq 0$$

即

$$0 \leq |b-a| \leq 3$$

【例 13】 等式 $|3x-7| = |3-2x| + |x-4|$ 成立的条件是().

(A) $\frac{3}{2} < x < 4$

(B) $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$

(C) $x \geq \frac{3}{2}$

(D) $x \leq 4$

(E) $x \leq \frac{3}{2}$ 或 $x \geq 4$

解 答案是(E).

分析 原式即 $|3x-7| = |2x-3| + |x-4|$

因为 $|2x-3| + |x-4| \geq |(2x-3) + (x-4)| = |3x-7|$

上面这个不等式中等号成立的条件是

$$(2x-3)(x-4) \geq 0$$

所以 $x \leq \frac{3}{2}$ 或 $x \geq 4$.

【例 14】 不等式 $\frac{|a-b|}{|a|+|b|} < 1$ 能成立.

(1) $ab > 0$;

(2) $ab < 0$.

解 答案是(A).

分析 原式即

$$|a-b| \leq |a| + |b|$$

因为不等式 $|a-b| \leq |a| + |b|$ 中, 等号成立的条件是 $a(-b) \geq 0$, 即 $ab \leq 0$.

所以 $|a-b| \leq |a| + |b|$ 中, 小于号“ $<$ ”成立的充要条件是 $ab > 0$.

【例 15】 不等式 $|a-b| \leq 3$ 恒能成立.

(1) $|a+2| \leq 1$ 且 $|b+2| \leq 2$; (2) $|a-2| \leq 2$ 且 $|b-2| \leq 1$.

解 答案是(D).

分析 由条件(1)有

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a+2-b-2| = |(a+2)-(b+2)| \\ &\leq |a+2| + |b+2| \leq 1+2=3 \end{aligned}$$

即 $|a-b| \leq 3$, 条件(1)充分.

由条件(2)有

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a-2-b+2| = |(a-2)-(b-2)| \\ &\leq |a-2| + |b-2| \leq 2+1=3 \end{aligned}$$

即 $|a-b| \leq 3$, 条件(2)充分.

第三节 比 和 比 例

一、基本内容简介

(一) 知识要点

1. 比的定义

两数相除称为两数之比, 即

$$a \div b = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

称为 a 比 b , 称 a 为比的前项, b 为比的后项, $\frac{a}{b}$ 称为比值. 记作 $a:b = \frac{a}{b}$.

2. 比的性质

(1) $a:b = k \Leftrightarrow a = kb$.

(2) $a:b = ac:bc$ ($c \neq 0$).

3. 比例的定义

相等的比称为比例, 记为

$$a:b = c:d \quad \text{或} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

又如: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$, 等等.