高等学校教材

点集拓扑讲义

（第三版）

熊金城 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教

点集拓扑讲义

（第三版）

熊金城　编

高等教育出版社

第一版编者的话

为了教学的需要，编写了这个讲义作为点集拓扑课程的教材。

讲述点集拓扑学，通常有两种安排材料的方式：一是先系统地介绍度量空间，然后以此为模式建立拓扑空间的理论；另一是径直讨论拓扑空间，然后另辟章节论述度量空间。前一方式初学者较易接受，但不可避免地会带来大量的重复；后一方式可以安排得十分紧凑，但由于过于抽象读者不易体会背景。本书中我们试用介于两者之间的做法：以拓扑空间的理论为纲，而将对度量空间的讨论归入相应的章节，并且在每一处尽可能借助度量空间以及欧氏空间的直观，用以启发拓扑概念；也尽可能将对拓扑空间的讨论随时应用于度量空间和欧氏空间，以增进读者对度量空间和欧氏空间的拓扑性质的理解。我们希望这样能够在保持拓扑空间的理论线条清晰的情况下使读者对概念的引出感到自然，并避免由于高度抽象带来的枯燥感。由于这种安排方式，不可避免地使我们将度量空间的一个重要的非拓扑性质“完备性”作为附录，放在最后。

本书第一章是关于集合的预备知识。熟悉朴素集合论的读者完全可以只是浏览一下以习惯尔后用到的术语。第二章是全书的理论基础，起着特别重要的作用，第三章较为独立，以后的章节除个别的定理和习题外，对它并无要求。第四，第五，第六这三章则是连贯着的，很难加以分割。

我们有意识地将全书分为两段，以适应不同的情况。如果课时不足，第七，八两章的内容可以舍去，余下的部分仍自成一个体系。

此外，在各个章节中给出了足够的例子，用以帮助读者澄清容易引起混淆的各种近似的拓扑概念的细致差别。在每节之后编写了一定数量的习题。其中大部分是简单的，但也有一些对初学者有中等的难度，我们加上了 * 号以示区别。

学习这个课程并不预先要求读者有广博的数学知识；仅就逻辑的需要而言，只要知道一些关于自然数及实数的基本性质即可。但是为了对所讨论的问题有更好的理解，却希望读者对微积分中讨论的连续性概念有所体会。一般说来，懂得微积分的读者阅读此书应当没有任何困难。

在编写此书的过程中主要用到的两篇中文材料是江泽涵著《拓扑学引论》(上海科技出版社,1978)和廖山涛著《点集拓扑讲义》(北大印刷厂,油印,1960)；此外也参照了一些外文书刊，恕不一一列举。

本书的最初稿本是 1979 年编者应邀在南京师范学院数学系举办的一个讲习班上讲课时所编的讲义；后又经过修改作为中国科技大学数学系高年级学生拓扑课程的教材。(顺此提及在中国科技大学 77,78 两届学生的拓扑课程中只是用一学期的一半时间讲述本书第一章至第六章的内容再加上第八章的第二节,其余一半时间则讲述代数拓扑。)本书也在安徽教育学院数学系(对该系 77 届部分选课的学生)试用过。

编写此书的过程中，编者得到了北京大学江泽涵教授和廖山涛教授的支持，鼓励和帮助。南京师范学院数学系杨润生同志曾认真校阅过本书最初的稿本。四川大学刘应明教授为本书的出版作了认真而细致的审阅，提出了许多宝贵的意见，指出了原瑰中多处疏漏与失当。对于以上的各位同志，编者于此致以衷心的谢意。

编　者

1981 年春于中国科技大学

第二版前言

为本书的重版，编者在保持原书基本结构不变的前提下对其进行了全面的修订。一方面订正了原书中的某些错误并使细节更为合理，另一方面也作了一些涉及全局性的变更。后者特别包括以下几个方面：

第一，在材料的安排方面的变动。

(1) 将初版第一章中关于子空间和(有限)积空间的两节和第八章中关于商空间的一节组织为新版的第二章。这是因为，一来这几节有一个共同的特征，它们都是讨论如何通过已知的拓扑空间构造新的拓扑空间；二来商空间的概念是一个基本概念，提到前面来讲授可以避免在某种情形下由于课时的不足而被遗漏。

(2) 将初版中讨论度量空间完备性的附录列为独立的一章。这样做的原因在于点集拓扑学中这部分内容的重要性应优先于安排在后面的两章。

(3) 对于完备度量空间和映射空间两部分内容进行了少量的增补。

新版中的第一章仍然是关于集合的预备知识。熟悉朴素集合论的读者完全可以只是浏览一下以习惯尔后用到的术语。第二章和第三章是全书的理论基础。第四章至第七章讨论几个最为重要的拓扑性质。因此，第二章至第七章是点集拓扑学中的核心内容，在任何情形下都是应当授完的。我们以为在一般的情形下至少应当授完第八章。至于第九章和第十章，它们当然也都是点集拓扑学中的基本内容，但在课时实在不足时，可以考虑适当割舍。

第二，读者在学习一门新的近代数学课程的时候，往往会对新概念的引进感到突兀，并且也常因此而引起某种程度的不适

应。对于学习像拓扑学这种抽象的课程，情形更是如此。因此，在全书中加强了新概念引入前的铺垫，特别是加强阐述新概念与读者已经掌握的数学知识的联系，以使读者意识到引进这些概念的必要性和自然性。

第三，在专业词汇和数学符号的使用方面进行了全面的修订，以求尽量符合 1993 年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》和关于数学符号的国家标准(GB3102.11—93)。同时，对于个别的词汇和符号也作了一点变通的处理，例如：

(1) 对于个别未被《数学名词》收入的常用词，尽量避免使用，但依旧向读者介绍。仍然将“成员”列为“元素”的同义词便是一例。

(2) 集合 A 的内部和闭包分别记作 A^o 和 A^-。为了与集合的内部运算，闭包运算等符号相协调，我们在大多数场合下使用 A' 表示集合 A 的余集，按照国标中规定它本应当记作 $\complement A$。后一种记法我们在相应的定义中作了介绍。

在前后三年从事此书修订工作期间，编者先后在中国科学技术大学和华南师范大学工作，这两个单位为之提供了讲授此书的机会和必要的工作条件。编者的科研工作一直得到国家自然科学基金委员会的资助，这也是修订工作得以顺利进行的一个重要的条件。中国科学技术大学叶向东教授，华南师范大学左再思教授，黄锦能教授和沈文淮教授将他们多年讲授此书的宝贵经验无保留地提供给编者作为修订此书的参考。淮北煤炭师范学院宋万干老师帮助校对了手稿。此外，特别要提到的是高等教育出版社文小西先生对于此书作了十分认真细致的审校，特别是他对于专业名词和标准符号的使用方面提供了大量中肯的意见。对于以上提到的单位和个人，编者于此表示衷心的感谢。

编 者

1997 年春于华南师范大学

第三版前言

本书这次重版主要作了以下方面修订：

第一，我们历来就觉得在大学的拓扑学课程中，应当给学生们介绍一点代数拓扑知识。目前大多数院校都不开专门的代数拓扑课程，为了做到这一点，只有在点集拓扑课程中添加有关章节了。这次，我们将基本群及其应用作为独立的一章，添加到这本讲义之中。在这一章中我们引入了空间的基本群，计算了一些简单空间的基本群，并且还给出了两个重要的应用：2 维 Brouwer 不动点定理和 Jordan 分割定理的证明，通过最短的篇幅向读者显示代数拓扑方法理论的精妙和应用的广泛，以期吸引读者进一步研究学习拓扑学的兴趣。

第二，朴素集合论中等价于选择公理的一些命题，如 Tukey 引理、Zemelo 假定、Zorn 引理、良序原则等等为高等数学的许多课程所需要，然而没有一个课程对此作系统的介绍。集合论和点集拓扑的关系相对说来比较密切，因此我们这次重版在书中重新组织了一章“朴素集合论(续)”。这一章与原来的一章“朴素集合论”共同构成了介绍朴素集合论的一个比较完整的材料。

第三，对于原来的内容作了一次全面的校订，同时也改写了部分内容。

对于组织教学，我们作如下的建议：

第一，本讲义的第一卷是点集拓扑这一学科最为基础的知识。就我国大部分高校的实际情况而言，一学期的课程(周学时4)教完这些内容，应当是最基本的要求，也是完全可能的。

第二，第二卷是为那些对点集拓扑要求较高的院校(或专业)准备的。打算将来进一步学习与数学分析或几何拓扑相关学科的

学生，这一篇中的内容也是基本的，可以作为教材，也可以作为这些学生自学的阅读材料。

第三，第二卷第一章“朴素集合论(续)”中的第二节和第三节，完全是为了介绍朴素集合论的完整性而编写，本书的其他部分与这些内容没有逻辑关联。因此它们可以只作为有兴趣者的阅读材料。

本书编写过程中，编者得到了国家自然科学基金(10171034)的资助，特此鸣谢。

编　者

2003 年秋于华南师范大学

目　　录

第Ⅰ卷　点集拓扑基础

第Ⅱ卷　积空间和映射空间

第 I 卷

点集拓扑基础

第 I 部

[illegible]基本[illegible]要点

第一章　朴素集合论

在这一章中我们介绍有关集合论的一些基本知识. 从未经定义的"集合"和"元素"两个概念出发给出集合运算，关系，映射以及集合的基数等方面的知识. 至于选择公理我们只是稍稍提了一下，进一步的知识待到要用到时再阐述. 这样安排旨在不使读者过早地陷入繁难的逻辑困惑之中.

这里所介绍的集合论通常称为"朴素的集合论"，这对大部分读者已经是足够的了. 那些对集合的理论有进一步需求的读者，例如打算研究集合论本身或者打算研究数理逻辑的读者，建议他们去研读有关公理集合论的专著.

即使就朴素集合论本身而言，我们也无意使本章的内容构成一个完全自我封闭的体系，主要是我们没有打算重建数系，而假定读者对于有关正整数，整数，有理数，实数的基本知识以及其中的四则运算，大小的比较($<$和$\leqslant$)和实数理论中关于实数的完备性的论断(任何由实数构成的集合有上界必有上确界)等决不会陌生. 此外，对于通常的(算术)归纳原则也按读者早已熟悉的方式去使用，而不另作逻辑处理.

1.1　集合的基本概念

集合这一概念是容易被读者所理解的，它指的是由某些具有某种共同特点的个体构成的集体. 例如我们常说"正在这里听课的全体学生的集合"，"所有整数的集合"等等. 集合也常称为**集，族，类**.

集合(即通常所谓的"集体")是由它的**元素**(即通常所谓的"个体")构成的. 例如正在这里听课的全体学生的集合以正在听课的每一个学生为它的元素；所有整数的集合以每一个整数为它的元素. 元素也常称为**元**，**点**，或**成员**.

集合也可以没有元素. 例如平方等于2的有理数的集合、既大于1又小于2的整数的集合都没有任何元素. 这种没有元素的集合我们称之为**空集**，记作$\varnothing$. 此外，由一个元素构成的集合，我们常称为**单点集**.

用文字来描述一个集合由哪些元素构成(像前面所作的那样)，是定义集合的一个重要方式. 此外，我们还通过以下的方式来定义集合：记号

$$\{x \mid 关于 x 的一个命题 P\}$$

表示使花括号中竖线"|"后面的那个命题P成立的所有元素x构成的集合. 例如，集合$\{x \mid x 为实数,并且 0<x<1\}$即通常所谓开区间$(0,1)$. 在运用集合这种定义方式时有时允许一些变通，例如集合$\{x^2 \mid x 是实数\}$便是集合$\{y \mid y=x^2, 其中 x 是实数\}$的简略表示，不难明白这个集合实际上是由全体非负实数构成的. 集合表示方式中的竖线"|"也可用冒号":"或分号";"来代替. 此外，也常将一个集合的所有元素列举出来再加上花括号以表示这个集合. 例如$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示由元素a_1，a_2，$\cdots$，a_n构成的集合. 如果确实不至于发生混淆，在用列举的办法表示集合时容许某种省略. 例如，有时我们可以用$\{1,2,3,\cdots\}$表示全体正整数构成的集合，用$\{1,3,5,\cdots\}$表示全体正奇数构成的集合. 然而，在上述两个集合中前者有可能会被误解为全体正素数构成的集合，而后者也有可能会被误解为全体正奇素数构成的集合. 因此，我们并不鼓励这种做法，除非从上下文的陈述中我们能够得到不被误解的保证. 我们再三提醒读者注意：不管你用任何一种方式定义集合，最重要的是不允许产生歧义，也就是说你所定义的集合的元素应当是完全确定的.

在本书中，我们用：

$\mathbb{Z}_+$ 表示全体正整数构成的集合，称为**正整数集**；

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合，称为**整数集**；

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数构成的集合，称为**有理数集**；

$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合，称为**实数集**，

并且假定读者熟知这些集合.

设 A 是一个集合，a 是一个元素. 如果 a 是 A 的元素，记作 $a\in A$，读为 a **属于** A；如果 a 不是 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读为 a **不属于** A. 例如，我们有：$2\in\mathbb{Z}_+$，$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ 等等. 对于任何集合 A 和任何元素 a，$a\in A$ 和 $a\notin A$ 这两者必有且仅有一个成立.

我们总用等号"$=$"表示逻辑上的同一，例如 $a=b$ 表示符号 a 和 b 代表着同一个事物. 因此，如果 A 和 B 是两个集合，$A=B$ 读为 A **等于** B，表示它们是由相同的元素构成的集合，即 A 的每一个元素都是 B 的元素，并且 B 的每一个元素也都是 A 的元素. 将这意思表达得更为形式一点便是：若 $x\in A$ 则 $x\in B$，并且若 $x\in B$，则 $x\in A$. 这是验证两个集合相等的最为基本的方式. 不等号"$\neq$"是等号"$=$"的否定. 如果 A 和 B 是两个集合，$A\neq B$ 读为 A **不等于** B，意味着或者 A 中至少有一个元素不是 B 的元素，或者 B 中至少有一个元素不是 A 的元素，亦即或者存在 $x\in A$ 使得 $x\notin B$，或者存在 $x\in B$ 使得 $x\notin A$.

以下的这个定理等价于形式逻辑中的相应命题，从直觉看去也是自明的.

定理 1.1.1 设 A，B，C 都是集合，则

(1) $A=A$；

(2) 若 $A=B$，则 $B=A$；

(3) 若 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$. ■

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即：若 $x\in A$，则 $x\in B$，我们便记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读为 A **包含**

于 B 和 B 包含 A.

定理 1.1.2 设 A，B，C 都是集合，则

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset A$，则 $A=B$;

(3) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

证 (1) 显然.

(2) $A\subset B$ 意即：若 $x\in A$，则 $x\in B$；$B\subset A$ 意即：若 $x\in B$，则 $x\in A$. 这两者合起来正好就是 $A=B$ 的意思.

(3) 设 $x\in A$. 由于 $A\subset B$，故 $x\in B$；又由于 $B\subset C$，从而 $x\in C$. 综上所述，如果 $x\in A$ 就有 $x\in C$. 此意即 $A\subset C$. ■

空集不含任何元素，所以它包含于每一个集合之中. 由此我们可以得出结论：空集是惟一的. 因为如果 $\varnothing_1$，$\varnothing_2$ 都是空集，据前说应当有 $\varnothing_1\subset\varnothing_2$，以及 $\varnothing_2\subset\varnothing_1$. 根据定理 1.1.2 可见，$\varnothing_1=\varnothing_2$.

设 A，B 是两个集合. 如果 $A\subset B$，我们则称 A 为 B 的**子集**；如果 A 是 B 的子集，但 A 又不等于 B，即 $A\subset B$，$A\neq B$，也就是说 A 的每一个元素都是 B 的元素，但 B 中至少有一个元素不是 A 的元素，这时，我们称 A 为 B 的**真子集**，并且记作 $A\subsetneqq B$ 或者 $B\supsetneqq A$.

下述定理 1.1.3 的证明就像定理 1.1.2 的证明一样简单，我们留作习题.

定理 1.1.3 设 A，B，C 都是集合，则

(1) $A\subsetneqq A$ 不成立;

(2) $A\subsetneqq B$ 和 $B\subsetneqq A$ 不能同时成立;

(3) 如果 $A\subsetneqq B$，并且 $B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$. ■

我们常常需要讨论以集合作为元素的集合，并且为了强调这一特点，这类集合常称为**集族**，并多用花写字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，…等来表示. 例如，若 $\mathscr{A}=\{\{1\},\{1,2\},\varnothing\}$，则 $\mathscr{A}$ 是一个集族，它的三个元素分别是单点集 $\{1\}$，由两个元素组成的集合 $\{1,2\}$ 和空