广义相对论（第二版）

General Relativity

刘 辽 赵 峥 编著

高等教育出版社

广义相对论

第二版

刘 辽 赵 峥 编著

高等教育出版社

内容提要

本书第一版是刘辽教授根据多年来在北京师范大学物理系讲授“广义相对论”课程的经验，在《广义相对论》讲义的基础上整理、撰写而成的．本书第二版由刘辽教授和赵峥教授修订而成，新版改正了原版中不少错误并增添了一些新内容。

本书是广义相对论的入门书，内容叙述深入浅出，详尽全面，材料的选择比较恰当，不少篇幅吸收了广义相对论一些经典著作的若干精华，并吸收了近年来有关领域的新成果。内容包括：广义相对论的物理基础、黎曼空间的张量运算、爱因斯坦引力场方程和引力场的能量表述、引力辐射、Kruskal 度规、致密物质和致密星、黑洞物理、宇宙学。

本书可作为我国高等学校理工科高年级大学生、研究生的广义相对论课程的教学用书，也可供有关的科学研究人员、教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

广义相对论/刘辽，赵峥编著. —2 版. —北京：
高等教育出版社，2004.7
ISBN 7－04－014430－1

Ⅰ.广… Ⅱ.①刘…②赵… Ⅲ.广义相对论 Ⅳ.O412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 033486 号

策划编辑 陶 铮 **责任编辑** 王文颖 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 吴文信
版式设计 史新薇 **责任校对** 康晓燕 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		
		版　　次	1987 年 11 月第 1 版
开　　本	787×960 1/16		2004 年 7 月第 2 版
印　　张	25.5	**印　　次**	2004 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	470 000	**定　　价**	36.80 元

谨以此书献给那些
在科学高峰的攀登中
持之以恒、不畏险阻的勇士们！

序　言

狭义相对论和广义相对论分别建立于1905年和1915年前后，它们是许多实验物理学家、理论物理学家、数学家和天文学家长期集体努力的产物。而在该领域中有突出贡献的集大成者则是伟大的物理学家爱因斯坦(A. Einstein, 1879—1955)。

两个理论都是物质世界的时空理论和在时空中物质运动的普遍理论。但两者仍有所不同，狭义相对论认为物质世界存在一种优越的所谓惯性系，从惯性系看来，空间的大小和时间的快慢与物体的运动状态有关，但时空的几何性质却丝毫不受运动物质的影响。例如，静置空间各处的标准钟，一旦调整同步，就不受周围运动物质的影响，永远保持同步；用静置空间各处的标准尺所测得空间的几何性质也不受周围运动物质的影响，永远遵守欧几里得几何学。

广义相对论则不然，它首先认为，一切坐标系都是平权的，不仅空间的大小和时间的快慢与物体的运动状态有关，而且物质世界的时空性质完全取决于运动着的物质，完全取决于运动物质所产生的引力场，它断言，我们事实上并不是生活在平直的欧几里得空间而是生活在一个弯曲的黎曼空间。

从哲学上看，广义相对论比狭义相对论更进一步地揭示了时间、空间与运动着的物质之间的辩证关系，标志着人类对客观物质世界的时空结构认识上的深化。

从物理学看，在不同领域，狭义相对论和广义相对论所起的作用则有所不同。大家知道，在通常的宏观物理学中，不论广义相对论或狭义相对论都是可以忽略不计的，而在微观高能物理学中，狭义相对论却取得了辉煌的成就，例如，目前认为，任何正确的基本粒子理论都必须满足洛伦兹协变性要求，正是在这一思想的指引下，20世纪30年代狄拉克(P. A. M. Dirac)把狭义相对论和量子力学结合起来，预言了正电子和其他反粒子的存在。40年代以来发展起来的洛伦兹协变量子场论在研究基本粒子的相互转化规律方面又取得了巨大成就。所有这些都表明狭义相对论是我们认识微观高能物理现象所不可缺少的一个重要基础理论。但迄今为止，广义相对论在当今的微观物理学中还没有得到应用，其原因乃在于引力相互作用比其他已知的三种相互作用，即强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用分别小10^{38}倍到10^{25}倍，因此一些物理学家认为，在微观领域，广义相对论的影响或引力作用可忽略不计。然而近20年来不少理论物理学家认为，即使在微观领域，当宇宙曲率甚大(例如接近 Planck

曲率 10^{66}cm^{-2})时，广义相对论或引力将起着最重要的作用。

至于涉及大尺度时空范围(或称宇观领域)内的物质过程，广义相对论已日益成为一门不可缺少的理论工具了。

1915 年爱因斯坦首次由广义相对论圆满地说明了牛顿力学所无法解释的水星近日点的进动，预言星光经过太阳表面应有 1.75″的引力偏转。3 年后，A. Eddington 实测证实了上述预言，1919 年 V. M. Slipher 和 1929 年哈勃(E. P. Hubble)等人先后发现了河外星系的谱线红移现象，1922 年 A. Friedmann 和 1927 年 G. Lemaitre 先后由广义相对论提出膨胀宇宙论模型，企图说明这种红移本质上是一种多普勒红移。1948 年 G. Gamov 提出大爆炸宇宙论(原始火球模型)首次企图建立一种宇宙的演化理论，1965 年所发现的 3K 微波背景辐射被认为是对原始火球模型的有力支持。20 世纪 60 年代所发现的高能天体——类星体和脉冲星大大地刺激了人们对于黑洞的研究，也进一步推动了天体晚期演化——白矮星、中子星等的研究。1968 年 J. Weber 声称接受到从银河系中心发射来的引力波，虽然这一试验并未取得以后重复实验的支持，但却推动了这方面的进一步研究。如上所述，广义相对论在恒星晚期演化问题和黑洞问题，及宇宙演化问题上都起着十分重要的作用。

“一切产生出来的东西都一定要死亡”(歌德《浮士德》)。总有一天“地球，一个像月亮一样的死了的冻结了的球体，将在深深的黑暗里沿着愈来愈狭小的轨道绕行在同样死了的太阳周围”(恩格斯《自然辩证法》“导言”第 17 页)。当恒星，星系完成它们一生的演化后结局是什么？黑洞是恒星的一种最终归宿吗？宇宙是无穷尽的，还是有始终的？我们相信广义相对论中的黑洞理论与宇宙演化理论将会给我们以启示！

本书是根据作者多年来在北京师范大学物理系的讲稿整理而成的。按照广义相对论的课程计划，广义相对论课程分成Ⅰ、Ⅱ两个阶段。本书就是第一阶段的入门教材。第二阶段的教材，我们采用 S. W. Hawking 和 C. F. R. Ellis 的 *The Large Scale Structure of Space-time*(1974)和 R. Wald 的 *General Relativity*(1984)，以及梁灿彬的《微分几何入门与广义相对论》(2001)。本书的不少内容取自 C. Møller(1952)，L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz(1975)，Y. B. Zeldovich 和 I. D. Novikov(1971)，S. Weinberg(1972)以及 C. W. Misner，K. S. Thorne 和 J. A. Wheeler(1973)等人的名作，更多的较新内容则直接取自原始论文。本书新版希望保持原书的特色，力求做到叙述比较全面，推演比较详尽。因此，本书完全可以作为一本自学的教材。

不少同行和学生曾对本书的原型——1980 年的油印讲义，以及 1987 年的第一版，提出过许多改进意见，他们是肖兴华教授(宇宙论)，李宗伟教授(致密星)，裴寿镛教授(致密星)，桂元星教授(黑洞物理)，王永久教授(黑洞物

理），此外李鉴增教授，张力生博士和喻乃昌博士曾参加了本书第一版的整理工作，段一士教授，黄永畅教授曾对第一版提出过不少宝贵的改进意见，应特别提到黄超光教授，在第二版的改写中他提出了不少重要的改进意见并亲手参与了一些章节的编写。本书新版编著者特向为本书做过贡献的同行们致以深切的感谢。

本书新版编写过程中，我们参考了下述国内学术专著，获益匪浅，谨向它们的作者致谢。他们是：

王永久. 广义相对论和宇宙学. 长沙：湖南科技出版社，2000

黑洞物理学. 长沙：湖南师范大学出版社，2000

梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论(上册). 北京：北京师范大学出版社，2000

微分几何入门与广义相对论(下册). 北京：北京师范大学出版社，2001

俞允强. 广义相对论引论. 北京：北京大学出版社，1997

热大爆炸宇宙学. 北京：北京大学出版社，2001

物理宇宙学讲义. 北京：北京大学出版社，2002

须重明、吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学. 南京：南京师范大学出版社，1999

何香涛. 观测宇宙学. 北京：科学出版社，2002

李宗伟. 天体物理学. 北京：高等教育出版社，2000

愿本书新版的出现能与其他优秀教材一起，给有志于学习、研究广义相对论和相对论天体物理的读者们带来方便。

编著者

2003.12

目　录

牛顿的侄子告诉我，1666 年的某天，牛顿到乡下去，看到苹果的下落，这使他陷入了深思……

伏尔泰(1738)

第一章 广义相对论的物理基础

§1.1 牛顿引力理论的成就和困难

对电动力学的研究产生了狭义相对论，而对万有引力理论的研究则产生了广义相对论.

1687 年，牛顿(I. Newton，1642—1727)在哥白尼(N. Copernicus，1473—1543)、第谷(B. Tycho，1546—1601)、开普勒(J. Kepler，1571—1630)和伽利略(G. Galilio，1564—1642)等人研究成果的基础上，提出了第一个完整的引力理论——万有引力定律.

1.1.1 牛顿理论的基本内容

万有引力定律的表述如下：

任何两个物质质点之间存在一种普适的引力，力的方向在两个质点的联线上，力的大小与两质点的质量的乘积成正比，而与它们距离的平方成反比.

$$\boldsymbol{F}_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}{}^3}\boldsymbol{r}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21} \tag{1.1.1}$$

其中 m_1、m_2 为两质点的质量，r_{12} 为两者距离，G 为引力常数，$G=6.673\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}=6.673\times10^{-8}\ \mathrm{cm^3\cdot g^{-1}\cdot s^{-2}}$.

当一个质量为 m，坐标为 $\boldsymbol{x}$ 的质点受到 N 个质量为 m_1，m_2，…，m_N，坐标为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_N$ 的质点的作用时，引力为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-Gm\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i),$$

相应的引力势为

$$\phi(\boldsymbol{x})=-G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}.$$

同样，对于连续分布的物质

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}^3x',$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x}')$ 为 $\boldsymbol{x}'$ 处的物质密度. 利用高斯定理，不难证明上式的微分形式是泊松方程

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \tag{1.1.2}$$

Δ 为拉普拉斯算符.

牛顿理论是第一个成功的引力理论. 他在地面上的苹果落地和天上的星辰运行等这样一些似乎迥然不同的现象中，找到了一个普遍的、统一的因果解释，从而揭开了天体运行之谜，给予了哥白尼体系以严格的科学论证. 运用万有引力定律，不仅解释了潮汐现象、地球的形状、行星和卫星的运动轨道等一系列自然现象，而且成功地预言了海王星的存在，精确地预告了彗星出现的时间，从而得到了举世的公认.

牛顿理论是相当精确的理论，今天人们对人造卫星和宇宙火箭运行轨道的计算，仍然完全以这个理论为基础.

1.1.2　牛顿引力理论的困难

牛顿引力理论虽然取得了辉煌的成就，但从它一诞生起就遇到一些无法克服的困难.

首先，在天文观测上，1859 年法国天文学家 Leverrier 发现水星近日点有 5 600″/(100 年)的角位移，在扣除总岁差和行星摄动后还有 42.6″±0.9″/(100 年)的进动无法用牛顿理论解释.

其次，在理论上存在两个困难.

第一个困难是所谓 Neumann-Zeeliger 疑难. 这个疑难是说，若承认宇宙是无限的，并假定宇宙物质作均匀分布，那么，牛顿引力论将导致引力场中任一点的场强为无穷大. 下面我们就来证明这一点.

类似静电学，引进引力场强度的概念

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi. \tag{1.1.3}$$

由(1.1.2)式有 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\Delta\phi = -4\pi G\rho.$ (1.1.4)

利用高斯定理

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \oiint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.1.5}$$

假定 ρ 是均匀的，以(1.1.4)式代入，可知(1.1.5)式左边部分 $\propto\rho R^3$，而右边部分 $\propto ER^2$，所以我们有

$$E\propto\rho R. \tag{1.1.6}$$

显然，当 $R\to\infty$ 时，$E\to\infty$. 这意味着空间每一点的引力场强都是无穷大，显然与实际不符.

第二个困难是，牛顿引力理论不符合狭义相对论. 狭义相对论要求所有物理学规律应具有洛伦兹协变性，并且一切相互作用不能是超距作用. 容易看出(1.1.1)或(1.1.2)式是非洛伦兹协变的，引力的作用是一种超距作用($\boldsymbol{r}$ 系同时距离). 牛顿本人就说过："……这据我看来是一种莫大的荒谬. 我相信，没有一个对哲学事物有足够的思考力的人，曾经这样设想过"[1].

所以，要使引力理论避免上述困难，就必须对它做一番改造.

1.1.3 对牛顿引力理论的修改

1905 年以前，主要的引力理论有 Zeeliger 引力论. 为了克服 Neumann-Zeeliger 疑难，Zeeliger 将引力场方程修改为[2]

$$\Delta\phi-K_0^2\phi=4\pi G\rho. \tag{1.1.7}$$

式中引进了所谓宇宙因子项 $K_0^2\phi$，其中 K_0 应是一个小量.

当 $\rho=$ 常数时，解(1.1.7)式得

$$\phi=-G\frac{4\pi\rho}{K_0^2}=\text{常数},$$

即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi=0. \tag{1.1.8}$$

这就避免了上述疑难. 当 $\rho=m\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$，即为点源时，解(1.1.7)式得

$$\phi(r)=\frac{-Gm}{r}\mathrm{e}^{-K_0r}$$

或

$$\boldsymbol{E}\approx-G\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{-K_0r}.$$

这种修改虽然避免了 Zeeliger 疑难，却将引力改为了短程力：

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}\mathrm{e}^{-K_0r}. \tag{1.1.9}$$

而事实上，万有引力是一种长程力. 如爱因斯坦指出的，这种修改既没有理论根据，又不能说明水星近日点的进动问题. 总之，Zeeliger 引力论是不成功的.

1905 年以后，人们企图寻求一个以牛顿引力论为良好近似的洛伦兹协变的引力理论.

我们知道达朗贝尔算符具有洛伦兹协变性，因而可用来取代泊松方程，场方程就可能具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\Box^2\phi=KT\sim\text{标量理论},\\&\Box^2\phi_\mu=KT_\mu\sim\text{矢量理论},\\&\Box^2\phi_{\mu\nu}=KT_{\mu\nu}\sim\text{对称张量理论}.\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

Nordström，Bergman，Birkhoff 和 Moshinsky 等人曾做过许多这方面的尝试，但均未成功[3]. 1915 年，爱因斯坦从完全新的观点出发建立了新的引力理论(即广义相对论)[4]. 这一理论无论从它与实验的一致、从逻辑上的简单和数学上的严谨来说，所有别的引力理论都无法与之匹敌. 自从爱因斯坦引力论问世以来，又有许多人提出过新的理论，但到目前为止，经得起实验和观测检验的，仍然只有爱因斯坦引力理论. Thirring，Feynman，Weinberg 和 Deser 等曾企图修改如(1.1.10)式中的洛伦兹协变张量理论，虽然克服了各种困难，但最后的形式仍然与爱因斯坦引力论完全等效[5].

§1.2 等效原理和广义相对性原理

爱因斯坦把他的引力理论建立在等效原理和广义相对性原理的基础之上，并把这一理论看作是狭义相对论的推广，因而称它为广义相对论(应该说,广义相对论并不等价于引力理论,这一点下面还要谈到).

我们在讨论广义相对论之前，先介绍一下作为它的理论基础的等效原理和广义相对性原理.

1.2.1 等效原理

在介绍等效原理之前，我们先谈谈牛顿力学和狭义相对论所无法说明的两个问题，即引力质量恒等于惯性质量的问题和惯性力的本质问题.

1. 引力质量恒等于惯性质量

一切物体都有两种最根本的力学属性，即惯性和引力.

由牛顿第二定律

$$F=m_I a \tag{1.2.1}$$

通过对力和加速度的测量，可以定义一个叫做惯性质量的物理量 m_I，它是物体惯性的量度，反映该物体对加速度的阻抗.

同时，由万有引力定律

$$F=\frac{m_g^{(1)}m_g^{(2)}}{r^2}, \tag{1.2.2}$$

通过对力和距离的测量，可以定义一个叫做引力质量的物理量 m_g，它是物体引力属性的量度，反映该物体产生与承受引力场的本领.

显然，物质的这两种属性，从它们的物理本质来说是完全不同的，我们无法预先期望它们之间存在任何联系. 爱因斯坦曾以地球和石子之间的吸引力为例来说明这一点："地球以引力吸引石头而对其惯性质量毫无所知，地球的

‘召唤’力与引力质量有关，而石头所‘回答’的运动则与惯性质量有关.”[6]

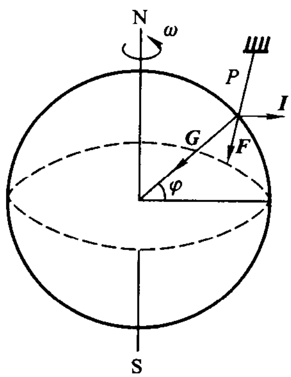
为了把这一点说清楚，我们来看一下电磁作用. 惯性质量为 m_I 的荷电质点，在电磁场作用下所受的力为

$$\boldsymbol{F}=m_I\boldsymbol{a}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{1.2.3}$$

显然，“召唤”力由物体的电荷 q 决定，而所“回答”的运动则与物体的惯性质量 m_I 有关，二者毫无关系.

人们自然会想到，引力质量也应与惯性质量毫无关系. 然而，多次的精确实验表明，$\frac{m_g}{m_I}$是一个与物质特性无关的普适常数. 也就是说，对于任何物质，它的引力质量和惯性质量总是成正比的. 伽利略、牛顿、Bessel 等都曾对此问题进行过实验研究，其中最著名的是匈牙利物理学家 Eötvös 的扭摆实验. 下面我们就来介绍一下这个实验. 实验装置见图 1－1. 在地面 P 点放置扭摆，在扭摆两端悬挂引力质量相同而材料不同的物体(图 1－1(b))，调整悬臂水平，并东西取向.

这时作用在任一球上的力 F，显然为重力 G 与惯性力 I 的合力(见图 1－1(a))，



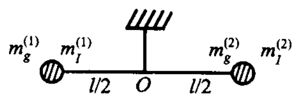


图 1－1 Eötvös 实验装置

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{G}=m_g g\boldsymbol{n}_g,\\ \boldsymbol{I}=(m_I R\omega^2\cos\phi)\boldsymbol{n}_I,\end{cases} \tag{1.2.4}$$

式中 $\boldsymbol{n}_g$，$\boldsymbol{n}_I$ 分别为沿重力方向和沿惯性离心力方向的单位矢量，g 是地球表面的重力加速度. $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 的比值为

$$\frac{G}{I}=\frac{m_g}{m_I}\frac{g}{R\omega^2\cos\phi}=\alpha\frac{g}{R\omega^2\cos\phi},$$

式中，质量比
$$\alpha-\frac{m_g}{m_I}. \tag{1.2.5}$$
对于地面同一点处，$\frac{g}{R\omega^2\cos\phi}$=常数. 合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向决定于质量比 α.

当两小球离支点 O 等距，且臂水平时(图 1－2)，$\boldsymbol{F}$ 的垂直分量必相等：

$$\boldsymbol{F}_{\perp}^{(1)}=\boldsymbol{F}_{\perp}^{(2)}.$$

若 $\quad \alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}$，

则 $\quad \boldsymbol{F}^{(1)}\parallel\boldsymbol{F}^{(2)}$.

结合 $\quad \boldsymbol{F}_{\perp}^{(1)}=\boldsymbol{F}_{\perp}^{(2)}$，

得 $\quad \boldsymbol{F}_{/\!/}^{(1)}=\boldsymbol{F}_{/\!/}^{(2)}$.

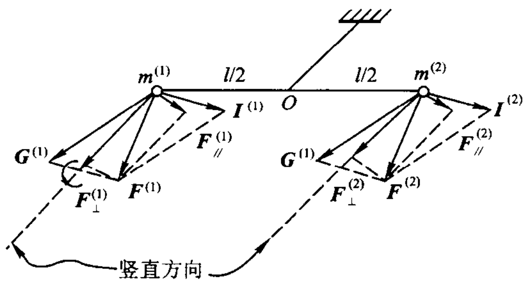


图 1－2 小球受力的分解

又因为悬线是竖直的，即没有受到水平方向的外力作用，所以 $\boldsymbol{F}_{/\!/}^{(1)}=\boldsymbol{F}_{/\!/}^{(2)}=0$. 可见 $\boldsymbol{F}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{F}^{(2)}$ 即竖直方向. 因之

$$\text{悬臂扭矩}=0,$$
$$\text{悬线扭矩}=0.$$

若 $\quad \alpha^{(1)}\neq\alpha^{(2)}$，

则 $\quad \boldsymbol{F}^{(1)}\not\parallel\boldsymbol{F}^{(2)}$.

但 $\quad \boldsymbol{F}_{\perp}^{(1)}=\boldsymbol{F}_{\perp}^{(2)}$，

所以 $\quad \boldsymbol{F}_{/\!/}^{(1)}\neq\boldsymbol{F}_{/\!/}^{(2)}$.

将产生扭矩(悬臂扭矩)，在这种情况下仍然调整悬臂为东西向，则必定在悬线上有反向扭矩(悬线扭矩)出现. 把仪器转 180°后，悬臂扭矩反向与悬线扭矩同向，应使悬臂有角偏转，可看出

扭力矩
$$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{l}}{2}\times\boldsymbol{F}^{(1)}-\frac{\boldsymbol{l}}{2}\times\boldsymbol{F}^{(2)}=\frac{\boldsymbol{l}}{2}\times\left[(\boldsymbol{G}^{(1)}-\boldsymbol{G}^{(2)})+(\boldsymbol{I}^{(1)}-\boldsymbol{I}^{(2)})\right],$$

合力
$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}^{(1)}+\boldsymbol{G}^{(2)}+\boldsymbol{I}^{(1)}+\boldsymbol{I}^{(2)},\text{(沿悬线方向)}$$

使悬臂转动的力矩为 $\boldsymbol{M}$ 在平行悬线方向的分量 $\boldsymbol{M}_{/\!/}$，

$$\boldsymbol{M}_{/\!/}=\boldsymbol{M}\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{F}|},$$

式中
$$|\boldsymbol{F}|\approx g(m_g^{(1)}+m_g^{(2)}),$$

而
$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{l}}{2}\times\left[(\boldsymbol{G}^{(1)}-\boldsymbol{G}^{(2)})+(\boldsymbol{I}^{(1)}-\boldsymbol{I}^{(2)})\right]\cdot(\boldsymbol{G}^{(1)}+\boldsymbol{G}^{(2)}+\boldsymbol{I}^{(1)}+\boldsymbol{I}^{(2)})=(G_1I_2-G_2I_1)\boldsymbol{l}\cdot(\boldsymbol{n}_g\times\boldsymbol{n}_I).$$

以(1.2.4)与(1.2.5)式代入得

$$\boldsymbol{M}_{/\!/} \approx \frac{R\omega^2 \cos\phi m_I^{(1)} m_I^{(2)} (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) [\boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{n}_g \times \boldsymbol{n}_I)]}{\alpha^{(1)} m_I^{(1)} + \alpha^{(2)} m_I^{(2)}} \tag{1.2.6}$$

Eötvös[7]先后在 1890 年、1896 年、1922 年以 10^{-8} 精度对不同物质证明

$$\boldsymbol{M}_{/\!/} = 0.$$

Southerm，Zeeman 利用放射性物质铀．在 1910 年和 1917 年重做了 Eötvös 实验[8]．由狭义相对论知辐射能具有惯性质量，放射性物质中，辐射能对总质量应有贡献．实验指出这部分惯性质量也同样地具有引力质量，且 α 相同．

1961 年 R. H. Dicke 以 10^{-10} 的精度[9]，1971 年 B. Брагинс КИЙ 以 10^{-12} 的精度[10]，1999 年 S. Basseler 等以 4×10^{-12} 的精度[11]，都得到 $\boldsymbol{M}_{/\!/}=0$.

Eötvös 实验证明了两个运动状态相同、材料不同的物体的 $\alpha=$ 常数，但并未回答同一物体处于不同运动状态时 α 是否恒定，若 $\alpha=\alpha(v)$，但仍与物质特性无关，由

$$m_g \nabla U = m_I \boldsymbol{g},$$

得
$$\boldsymbol{g} = \frac{m_g}{m_I} \nabla U = \frac{m_g \sqrt{1-\beta^2}}{m_{I0}} \nabla U$$

如果 $\boldsymbol{g}$ 与 v 无关，$m_g \sqrt{1-\beta^2}$ 必为与 v 无关的量，令其为 m_{g0}，则

$$\left(\frac{m_g}{m_I}\right)_{v\neq0} = \left(\frac{m_{g0}}{m_{I0}}\right)_{v=0}$$

这说明只要承认 $\boldsymbol{g}$ 与 v 无关，在不同运动状态下 $\frac{m_g}{m_I}$ 也是常数．

1976 年，Williams 和 Dicke 等分析了 6 年的月地测距数据得出：地球的引力自能对地球的惯性质量与引力质量贡献相同[12]．

总之，目前认为，对一切物质而言，均有

$$\alpha = \frac{m_g}{m_I} = \text{常数}.$$

令(1.2.2)式中比例常数为通常的 G 值，即取 $\alpha=1$，则得出：引力质量恒等于惯性质量．

因而
$$F = G\frac{m_g^{(1)} m_g^{(2)}}{r^2} = G\frac{m_I^{(1)} m_I^{(2)}}{r^2}.$$

其实这一命题与伽利略早在 1591 年于比萨(Pisa)斜塔上做的有名的自由落体实验是完全等效的．

伽利略实验得出：瞬时静止地置于重力场中同一点的一切物体，在重力作用下，具有完全相同的重力加速度，与其性质无关．

这是因为
$$F = m_g g = m_I a,$$