查理斯密

大代數學

連江陳　文
南海何崇禮　編譯

商務印書館發行

查理斯密

大代數學

中卷

目錄

查理斯密
大代數學
中卷

第拾叁編

方乘　方根　分指數　負指數

(158). 累乘法 (Involution) 求諸數量之方乘。其法謂之累乘法

〔增補〕 如求 $4a^2b$ 之立方。則得 $(4a^2b)^3=64a^6b^3$。此法謂之累乘法。

開方法 (Evolution) 反其法以求諸數量之方根。其法謂之開方法。

〔增補〕 如求 $64a^6b^3$ 之立方根，則得 $4a^2b$。此法謂之開方法。

本編專論累乘法及開方法。

(159). 指數之法則 (Index Laws) 在第貳編 31 款。設 m 及 n 皆爲正整數。則可證

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\qquad\qquad(1)$$

此法則稱爲指數之法則，依此法則。可得

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$$

由是類推。無論因子若干。恆得

$$a^m\times a^n\times a^p\times a^q\times\ldots\ldots=a^{m+n+p+q+\cdots\cdots}\cdots(2)$$

由是得次之法則。

〔法則〕 諸同數量之方乘之積(卽同數量之方乘)。其指數等於諸因子指數之和。

又於(2)式設 $m=n=p=q$……………………則

$$a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{至 }n\text{ 因子}$$

$$=a^{m+m+m+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 項}}$$

$$=a^{mn}$$

$$\therefore\quad (a^m)^n=a^{mn}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

〔法則〕 壹數量之某方乘。以他方乘乘之。其指數等於原指數與他方乘指數之積。

〔增補〕 於(3)式設 $m=n$。則

$$(a^m)^m=a^{mm}=a^{m^2}$$

卽 m 爲 a 之指數。而 2 又爲 m 之指數也。

如求 $2^{2^{2^2}}$ 之值。此題指數之上又有指數其上復有指數。初學者易於迷惑。卽由(3)之法則。而以爲

$2^{2^{2^2}}=\left\{2^{2^2}\right\}^2=\left\{(2)^{2^2}\right\}^2$。則成謬誤。若由(3)之法則作 $\{(2^2)^2\}^2=\{2^{2\times2}\}^2=2^{2\times2\times2}=2^{2^3}=2^8$。則大謬誤。故必如次。

$2^{2^{2^2}}=2^{2^4}=2^{16}$。始能合理決非$2^8$。

何則。a^{m^2}卽$(a^m)^m$。決非爲$(a^m)^2$。

又求$(ab)^m$

$(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\ldots\ldots$至$m$因子(由定義)

$=(a\times a\times a\times\ldots$至$m$因子$)\times(b\times b\times b\times\ldots$至$m$因子$)$

$=a^m\times b^m$(由定義)

由是　$(ab)^m=a^m\times b^m$

同理　$(abc)^m=(ab)^m\times c^m=a^m\times b^m\times c^m$

由是類推則得公式如次。

$(abc\ldots\ldots)^m=a^m\times b^m\times c^m\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

〔法則〕積之m方乘。等於其因子之m方乘之積。

〔增補〕由(4)式。可用眞數代入以證明之。如256×625

$256\times 625=4^4\times 5^4=(4\times 5)^4=20^4=160000$

又如　$(a+b)^5\times(a^2+b^2)^6\times(a-b)^5$　卽

$(a+b)^5\times(a-b)^5\times(a^2+b^2)^6=\{(a+b)(a-b)\}^5\times(a^2+b^2)^6$

$=(a^2-b^2)^5(a^2+b^2)^6=(a^2-b^2)^5(a^2+b^2)^5(a^2+b^2)$

$=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^5(a^2+b^2)=(a^4-b^4)^5(\ ^2+b^2)$

單項式最普通之例爲$a^xb^yc^z\ldots\ldots\ldots$而令作$m$方乘則

$$(a^x b^y c^z \ldots\ldots)^m = (a^x)^m (b^y)^m (c^z)^m \ldots\ldots\ldots \{由(4)\}$$

$$= a^{xm} b^{ym} c^{zm} \ldots\ldots\ldots \{由(3)\}$$

是故 $(a^x b^y c^z \ldots\ldots)^m = a^{xm} b^{ym} c^{zm}$ ……………………(5)

〔法則〕 作某代數式之某方乘。則取其式內諸因子之指數。以乘方乘之指數。而以其積爲其因子之指數。

更有特別之例如次。

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^m = a^m \times \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

又 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots$ 至 m 因子

$$= \frac{aaa\ldots\ldots 至\ m\ 因子}{bbb\ldots\ldots 至\ m\ 因子} = \frac{a^m}{b^m}$$

(160). 符號之法則(Law of Signs) 據符號之法則，正數量之方乘。恆爲正。負數量之方乘。依次第互爲正負。

即 $(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$

$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = (+a^2)(-a) = -a^3$$

$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)(-\ ) = +a^4$$

$$(-a)^5 = (-a)^4(-a) = (+a^4)(-a) = -a^5$$

以下準此。

故 $(-a)^{2n} = +a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

何則。$2n$ 必爲偶數。而 $2n+1$ 必爲奇數故也。

由是推之。無論數量爲正爲負。其方乘爲偶數者。必爲正量。其方乘爲奇數者。其符號必與原數量同。(若原數量爲正。則所得之量亦正。若原數量爲負。則所得之量亦負)。

〔增補〕 如 $n, n+1, n+2, 3n, 3n+1, 3n+2, n-3, 3n-2$ 等數。其爲奇數抑爲偶數。未能斷定。故如

$(-a)^{n+1}$。若 n 爲偶數。則得 $-a^{n+1}$。若 n 爲奇數。則得 $+a^{n+1}$。故 $(-a)^{n+1}=(-1\times a)^{n+1}=(-1)^{n+1}a^{n+1}$。

然 $(-a)^n$ 與 $(-a)^{n+1}$ 異號。何則。因 n 爲偶。則 $n+1$ 爲奇。n 爲奇。則 $n+1$ 爲偶故也。

(161). 算術上之數根 (Roots of Arithmetical Numbers) 算術上諸數之某平方根或其他方根。恆能求其略近數。今試證明如次。惟求略近數之法。演算甚繁。故不盡根之實算法。本編不具論。

如求 $\sqrt{62}$。先臚列 1, 2, 3……諸數之平方。至其中一數之平方較 62 大而後止。

卽 7^2 較 62 小。而 8^2 較 62 大。故必臚列至 8 之平方止。

次臚列 7 與 8 間之諸數。如 7.1, 7.2, 7.3,……7.9 之平方。亦至較 62 大而後止。

卽 $(7.8)^2$ 較 62 小，而 $(7.9)^2$ 較 62 大，故必臚列至 (7.8) 之平方止。

復於 7.8, 與 7.9 之間臚列 7.81, 7.82……以至 7.89 之平方。至較 62 大而後止。卽 $(7.83)^2$ 較 62 小，而 $(7.84)^2$ 較 62 大。故必臚列至 7.84 之平方止。

依此方法。次第求之，則在各兩平方數間。皆有 62 可知。而兩平方數次第相差甚微，則其間所有 62 之數，次第與此兩平方數略相似。

兩平方數，依上法次第求之。終不能全與 62 之值同。然次第所差甚微，終必至於極近可知。故 62 之平方根。雖不得其全同之值，然細求之，必能得其精密之根。斷斷然矣，故依上之方法累求之。必得其精密之值卽可稱爲 62 之平方根。

同理亦可求得他方根。

由此類推。某整數或分數之 n 方根，恆能求得。

(162). 本則之不盡根　不盡根之法則，亦爲代數學之本則。

在第二編中。代數學之本則。已論文字之整數，分數。且已證其合理。而此編，卽不盡根。亦可證其合理，

例　由根原之法則 $-(-a)=+a$。

$a=2, \frac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$。亦能證其合理。

$$-(-2)=+2$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{1}{2}$$

$$-(-\sqrt{2})=+\sqrt{2}$$

今試用交換法則以研究之。卽證

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$$

今命 x, y, p, q 四數爲整數或爲分數。而 x 與 y 之間有 $\sqrt[n]{a}$。p 與 q 之間有 $\sqrt[m]{b}$。

卽
$$x>\sqrt[n]{a}>y$$
$$p>\sqrt[m]{b}>q$$

而 x 及 y 之差與 p 及 q 之差。可任意小至無限。

又因 x, y, p, q 爲整數或爲分數。則

$$\left.\begin{array}{l} x\times p=p\times x \\ y\times q=q\times y \end{array}\right\}\text{............根原之法則}$$

故以前兩不等式相乘。則

$$x\times p>\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}>y\times q$$

或
$$p\times x>\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}>q\times y$$

又如前述。x 及 y 與 p 及 q 之差。可任意小至無限。故 $x\times p$ 與 $y\times q$ 之差殆等於零。卽求 $\sqrt[n]{a}$ 及 $\sqrt[m]{b}$ 之根至無限時殆如 $x\times p=y\times q$。

又如上述。因 $p\times x=x\times p$ 及 $q\times y=y\times q$。乃

$$x\times p=y\times q=p\times x=q\times y$$

故 $$x\times p=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=y\times q$$

$$p\times x=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}=q\times y$$

由是 $$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$$

據上之方法亦能證明次例。

$$a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}$$

命 x, y, p, q 爲整數或爲分數。而定之如次。

$$\left.\begin{array}{l} x>\sqrt[m]{b}>y \\ p>\sqrt[n]{c}>q \end{array}\right\} \quad \therefore \quad x-q>y-p$$

由是 $$a-(x-q)<a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})<a-(y-p)$$

$$a-x+q<a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}<a-y+p$$

但 x 及 y 之差與 p 及 q 之差。可任意小至無限故 $x\times p$ 及 $y\times q$ 之差與 $p\times x$ 及 $q\times y$ 之差。亦可任意小至無限。

故殆如 $$a-(x-q)=a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-(y-p)$$

$$a-x+q=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}=a-y+p$$

但 x, y, p, q 爲整數或爲分數。故

$a-(x-q)=a-x+q$ 及 $a-(y-p)=a-y+p$

$\therefore\quad a-(\sqrt[m]{b}-\sqrt[n]{c})=a-\sqrt[m]{b}+\sqrt[n]{c}$

(163) 方乘及方根之區別 凡各數量。其平方根

有二。其立方根有三。前既證之矣。然各數量之n方根。則必各有n個。此卽方根與方乘最著之異點也。

何則。因各數量之某方乘僅有一故也。

〔增補〕 如64之平方根。爲$\sqrt{64}$，有8及-8二根。立方根爲$\sqrt[3]{64}$，有$4, 4\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right), 4\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$三根。

然2之平方爲$2^2=4$

2之立方爲$2^3=8$

2之n方爲2^n。

故求一數之方乘則甚易而求其方根則甚難。

(**164**). 不盡根之法則　積之m方乘。等於其因子m方乘之積。已示於159款。

卽　$$(abc\ldots\ldots\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots\ldots$$

然亦可據不盡根及代數學根原之法則以證明之。

如　$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\ldots\ldots)^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\times(\sqrt{c})^2\ldots\ldots$$
$$=a\times b\times c\times\ldots\ldots\ldots$$

故　$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots\ldots\ldots=\sqrt{(a\times b\times c\ldots\ldots\ldots)}$$

是故　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\ldots\ldots$等於$abc\ldots\ldots$平方根之一。卽謂$a, b, c\ldots\ldots\ldots$之各一平方根之積等於$a, b, c$之積之一平方根。

由此推之。可得他之方根。

即　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots\ldots\ldots=\sqrt[n]{abc\ldots\ldots\ldots}$又得二證如次

〔第一〕　證　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\times\ldots\ldots=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

〔第二〕　證　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

$$(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m,\ (\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}=(a^m)^p$$

由是　$$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}$$

$$\therefore\quad\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

故方根及方乘各以同數乘之。其值不變。又方根及方乘各以同數除之。其值亦不變。

即　$\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$。但 $6\div2=3,\ 4\div2=2$。故又 $\sqrt{a^6}$ 之一根爲 a^3。又 $\sqrt[n]{a^{nx}b^{ny}c^{nz}}$ 之一根爲 $a^xb^yc^z$。

分指數及負指數

(165). 指數 (Index)　指數之恆爲正整數者。已述於前。即第壹編9款所示指數之定義是也。然其指數恆爲正整數。若永據此定義。則指數之爲分數或負數如 $a^{\frac{3}{2}}$ 或 a^{-2} 者。遂不合理。

今有a^n。試命n爲分數或負數。則乞據根原之指數法則。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

而從此法則。卽可定a^n爲分數或負指數之意義。示之如次。

〔例〕 試推定$a^{\frac{1}{2}}$之意義。

此意義原由前述指數之法則而生。故據$a^m\times a^n=a^{m+n}$。其義自顯。

卽　$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$$

卽　$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a \qquad \therefore\quad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

由是知$a^{\frac{1}{2}}$之意義。爲所以示a之平方根者。又試推定a^{-2}之意義。

此意義亦由指數法則而生。

卽　$$a^3\times a^{-1}=a^{3-1}=a^2$$

$$\therefore\quad a^{-1}=\frac{a^2}{a^3}=\frac{1}{a}$$

卽　a^{-1},其義爲以a除1。

(166). 分指數及負指數之法則　今取分指數及負指數之通例論之。

〔第一〕 設n爲正整數,求$a^{\frac{1}{n}}$之意義。

由指數之法則

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 因子}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 項}}$$

$$=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

由是 $(a^{\frac{1}{n}})^n=a$ $\therefore$ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

故 $a^{\frac{1}{n}}$ 之意義爲 $\sqrt[n]{a}$

〔第二〕 設 m 及 n 皆爲正整數。求 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。

亦由指數之法則

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 因子}=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots\text{至 }n\text{ 項}}$$

$$=a^{\frac{nm}{n}}=a^m$$

由是 $(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}$。但由第一 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

$$\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$$

故又 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。爲 a 之 n 方根之 m 方乘。今可書出如下。

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$$

又可得 $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$

因 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ 已證明於164款。