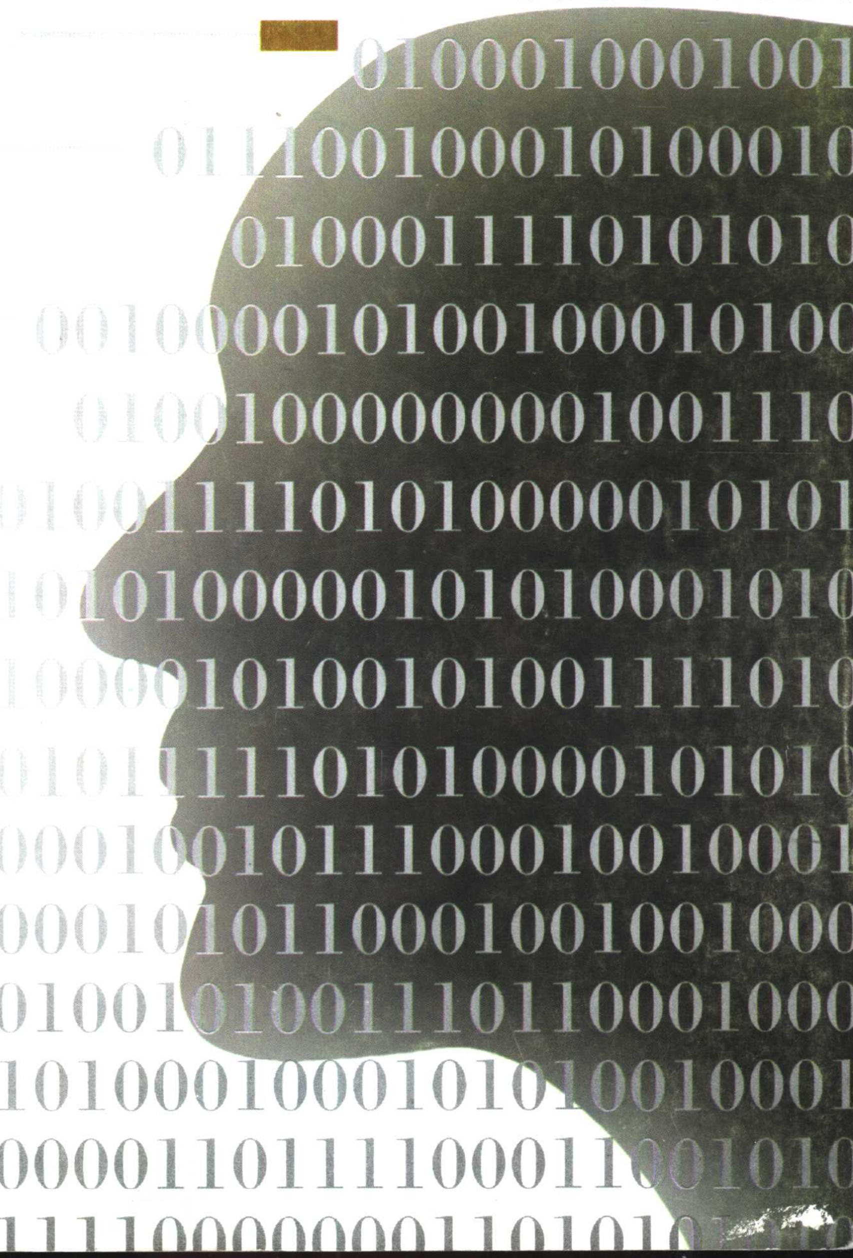
主编 赵仲罴

副主编 陈曙光 郑采星 王 鑫

# 大学物理

## COLLEGE PHYSICS

高等成人教育系列教材



湖南大学出版社

## 内容简介

本书是原机械工业部普通高校成教研究会组织编写的系列教材之一，包括力学、热学基础、电磁学、波动光学、近代物理简论等5篇共18章。

该书紧扣原机械部部属院校统编的高等成人教育课程教学大纲，力图切合当前成人教育实际。每章前有“提要与自学指导”，章末有“小结”和习题，每篇有1份自测题，宜于自学。可作为函授、夜大工学各专业本、专科“大学物理”课程教材，亦可供高等自学考试教育、高等职业教育、网上远程教育有关专业使用。


**大学物理**
Daxue Wuli
赵仲熙　陈曙光　郑采星　王　鑫　编著

□责任编辑　陈灿华
□封面设计　吴颖辉
□出版发行　湖南大学出版社
　　　　　　社址　长沙市岳麓山　邮码　410082
　　　　　　电话　0731—8821691　0731—8821315
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　湖南大学印刷厂

□开本　787×1092　16开　□印张　19.5　□字数　500千
□版次　1999年9月第1版　□1999年9月第1次印刷
□印数　1—2 000册
□书号　ISBN 7—81053—226—X/O·6
□定价　25.00元

# 前 言

物理学是现代科学技术的基础，它研究物质最基本、最普遍的运动形式(机械运动、热运动、电磁运动、微观粒子运动等)及其相互转化的规律。它的基本理论和方法渗透于自然科学的各个领域，应用于工程技术的各个部门。

工科《大学物理》课程主要包括经典力学、热学、电磁学、波动光学及近代物理概论，是一门理工科各专业必修的课程，是许多专业基础课、专业课的先修课。更重要的是，它对于培养学生形成正确的物理概念体系、科学的思维方法，开阔思路，激发探索和创新精神，增强适应能力，提高人才素质等具有重要作用。学好大学物理课程，不仅对学生在校时的学习十分重要，而且对毕业后的工作和进一步学习新理论、新技术，不断更新知识，都将产生深远的影响。

大学物理课程在培养学生辩证唯物主义世界观方面也起着一定的作用。

通过大学物理课程的学习，应使学生对物理学的基本概念、基本理论、基本规律和各种运动形式之间的联系，有较全面、较系统的认识和正确的理解。在各个教学环节中，都要注意在传授知识的同时，着重能力的培养，特别要培养学生运用物理基本定律、基本概念分析、解决问题的能力。

本书是高等成人教育系列教材之一。其内容紧扣原机械部部属普通高校成人教育示范性教学大纲，力图适应函授、夜大教学要求。关于编写原则、体例和教材使用等方面有如下考虑和建议：

(1) 考虑到函授、夜大学员多数理论基础相对较弱，工作任务重，自学时间不充分，在教材内容的深度和广度方面，遵循保证基本、够用为度的原则，避免了过深的和枝节的内容，许多相对“新”的理论也未列人。

(2) 在体例上，按照便于自学、自查的原则安排。每章前设“提要与自学指导”，对该章的主要内容、层次作了简要概括，指出难点，提出主要要求；每章末有“小结”，对该章内容要点、基本概念和方法加以重新梳理和强调。每篇末有一份自测题，用于学生自我检测学习情况。

(3) 习题的选配原则是：不求多而求精，不求技巧而求基本，尽可能不选用与中学物理教材中重复的习题。

(4) 函授、夜大非物理类理工科各专业本、专科均可使用本教材。其中，对专科不作要求的内容用“*”号标出。由于函授面授学时一般仅为相应脱产班(夜大)学时的40%，教师不可能按章节详细讲授，根据近年来函授生普遍无法充分自学的情况，面授内容过分浓缩效果也不好，因此，建议教师根据学员专业特点，重点讲授基本内容和难点内容，一般内容的教学则用指导自学的方式完成。

本书由湖南大学赵仲黑、陈曙光、郑采星、王鑫合作编写。其中，赵仲黑负责整体策划、审稿、改稿、统稿，王鑫编写第1篇第1～5章，郑采星编写第2篇第6～7章和第3篇第8～12章，陈曙光编写第4篇第13～15章和第5篇第16～18章。

本书旨在切合函授、夜大教育的当前实际，不当之处，恳请同行和读者批评指正。

编 者

1999年4月

# 目 次

## 第1篇 力 学


第1章 质点运动学
提要与自学指导 …… (2)
1.1 位移和速度 …… (2)
1.2 加速度 …… (4)
1.3 圆周运动的角量描述 …… (6)
1.4 质点运动学的典型问题 …… (7)
*1.5 相对运动 …… (10)
小结 …… (12)
思考题 …… (13)
习题 …… (13)
第2章 牛顿运动定律
提要与自学指导 …… (15)
2.1 牛顿三大运动定律 …… (15)
2.2 工程技术中几种常见的力 …… (16)
2.3 质点动力学问题 …… (17)
小结 …… (19)
思考题 …… (21)
习题 …… (21)
第3章 动量与能量
提要与自学指导 …… (23)
3.1 动量定理和动量守恒定律 …… (23)
3.2 功、动能、动能定理 …… (28)
3.3 势能、机械能守恒定律 …… (33)
小结 …… (37)
思考题 …… (39)
习题 …… (39)
第4章 刚体的定轴转动
提要与自学指导 …… (41)
4.1 刚体的运动 …… (41)
4.2 转动定律 …… (43)
4.3 刚体的动能和势能 …… (48)
*4.4 刚体的角动量及其守恒定律 …… (50)
小结 …… (51)

思考题 …………………………………………………………………………………… (54)
习题 ……………………………………………………………………………………… (54)
**第 5 章　机械振动与机械波**
提要与自学指导 …………………………………………………………………………… (57)
5.1　简谐振动的描述……………………………………………………………………… (57)
5.2　简谐振动的动力学方程……………………………………………………………… (60)
5.3　简谐振动的能量……………………………………………………………………… (63)
5.4　同方向简谐振动的合成……………………………………………………………… (64)
*5.5　相互垂直的两个简谐振动的合成 ………………………………………………… (65)
5.6　机械波的产生与波动方程…………………………………………………………… (67)
5.7　波的能量与能流……………………………………………………………………… (72)
*5.8　驻波 ………………………………………………………………………………… (73)
小结 ……………………………………………………………………………………… (75)
思考题 …………………………………………………………………………………… (77)
习题 ……………………………………………………………………………………… (77)
第 1 篇自测题 …………………………………………………………………………… (80)

## 第 2 篇　热学基础

**第 6 章　气体分子运动论**
提要与自学指导 …………………………………………………………………………… (84)
6.1　平衡态与理想气体状态方程………………………………………………………… (84)
6.2　理想气体压强和温度的统计意义…………………………………………………… (86)
6.3　能量按自由度均分原理、理想气体的内能 ………………………………………… (88)
6.4　麦克斯韦速率分布律………………………………………………………………… (90)
小结 ……………………………………………………………………………………… (93)
思考题 …………………………………………………………………………………… (94)
习题 ……………………………………………………………………………………… (94)
**第 7 章　热力学基本原理**
提要与自学指导 …………………………………………………………………………… (96)
7.1　热力学第一定律……………………………………………………………………… (96)
7.2　热力学第一定律对理想气体等值过程和绝热过程的应用………………………… (98)
7.3　循环和循环效率 …………………………………………………………………… (105)
*7.4　热力学第二定律 …………………………………………………………………… (108)
*7.5　熵 …………………………………………………………………………………… (110)
小结……………………………………………………………………………………… (112)
思考题…………………………………………………………………………………… (114)
习题……………………………………………………………………………………… (115)
第 2 篇自测题…………………………………………………………………………… (118)

# 第 3 篇　电磁学


**第 8 章　真空中的静电场**

提要与自学指导……（121）

8.1　电荷、库仑定律……（121）

8.2　电场与电场强度……（123）

8.3　高斯定理……（126）

8.4　电势……（130）

小结……（136）

思考题……（138）

习题……（138）

**第 9 章　静电场中的导体与电介质**

提要与自学指导……（140）

9.1　静电场中的导体……（140）

9.2　静电场中电介质的极化……（143）

9.3　电位移矢量与介质中的高斯定理……（145）

9.4　电容、电场的能量……（147）

9.5　静电学的应用……（151）

小结……（152）

思考题……（153）

习题……（153）

**第 10 章　稳恒磁场**

提要与自学指导……（156）

10.1　磁场、磁场的高斯定理……（157）

10.2　毕奥-萨伐尔定律及其应用……（159）

10.3　安培环路定律……（161）

10.4　磁场对载流导线的作用……（163）

10.5　磁场对运动电荷的作用……（167）

*10.6　介质中的磁场……（170）

小结……（174）

思考题……（176）

习题……（176）

**第 11 章　电磁感应**

提要与自学指导……（179）

11.1　电磁感应的基本定律……（179）

11.2　动生电动势和感生电动势……（183）

11.3　自感与互感……（187）

*11.4　磁场的能量……（189）

11.5　位移电流……（191）

小结…………………………………………………………………………………………（193）
思考题……………………………………………………………………………………（195）
习题…………………………………………………………………………………………（196）
**第 12 章　电磁场与电磁波**
提要与自学指导…………………………………………………………………………（199）
12.1　麦克斯韦方程组（积分形式）……………………………………………………（199）
12.2　电磁振荡与电磁波………………………………………………………………（200）
小结…………………………………………………………………………………………（205）
思考题……………………………………………………………………………………（206）
习题…………………………………………………………………………………………（206）
第 3 篇自测题……………………………………………………………………………（208）

## 第 4 篇　波动光学

**第 13 篇　光的干涉**
提要与自学指导…………………………………………………………………………（213）
13.1　光的相干性、杨氏双缝干涉 ……………………………………………………（213）
13.2　光程与光程差、薄膜干涉 ………………………………………………………（217）
*13.3　迈克尔逊干涉仪 …………………………………………………………………（223）
小结…………………………………………………………………………………………（224）
思考题……………………………………………………………………………………（225）
习题…………………………………………………………………………………………（226）
**第 14 章　光的衍射**
提要与自学指导…………………………………………………………………………（227）
14.1　光的衍射现象及惠更斯—菲涅耳原理…………………………………………（227）
14.2　夫琅和费单缝衍射………………………………………………………………（228）
*14.3　光栅衍射 …………………………………………………………………………（231）
*14.4　夫琅和费圆孔衍射和光学仪器的分辨率 ………………………………………（233）
*14.5　X 射线衍射 ………………………………………………………………………（234）
小结…………………………………………………………………………………………（235）
思考题……………………………………………………………………………………（237）
习题…………………………………………………………………………………………（237）
**第 15 章　光的偏振**
提要与自学指导…………………………………………………………………………（239）
15.1　光的偏振…………………………………………………………………………（239）
15.2　用偏振片起偏和检偏、马吕斯定律 ……………………………………………（241）
15.3　反射和折射光的偏振、布儒斯特定律 …………………………………………（242）
15.4　光的双折射………………………………………………………………………（243）
*15.5　偏振光的干涉 ……………………………………………………………………（246）

小结…………………………………………………………………………………………（247）
思考题……………………………………………………………………………………（248）
习题………………………………………………………………………………………（249）
第 4 篇自测题……………………………………………………………………………（250）

## 第 5 篇　近代物理简论

**第 16 章　狭义相对论**
提要与自学指导……………………………………………………………………（253）
16.1　经典力学的相对性原理与绝对时空观………………………………（253）
16.2　狭义相对论的基本原理与相对论时空观……………………………（255）
*16.3　洛仑兹变换、相对论动力学 ……………………………………………（259）
小结…………………………………………………………………………………………（265）
思考题……………………………………………………………………………………（267）
习题………………………………………………………………………………………（268）
**第 17 章　量子论与激光**
提要与自学指导……………………………………………………………………（269）
17.1　量子论的诞生……………………………………………………………（269）
17.2　光电效应、康普顿散射 …………………………………………………（271）
17.3　氢原子的玻尔理论………………………………………………………（275）
17.4　德布罗意波、不确定关系 ………………………………………………（278）
*17.5　4 个量子数、原子的电子壳层结构 ……………………………………（281）
*17.6　激光及其应用 ……………………………………………………………（283）
小结…………………………………………………………………………………………（287）
思考题……………………………………………………………………………………（289）
习题………………………………………………………………………………………（290）
**第 18 章　固体电子学简介**
提要与自学指导……………………………………………………………………（291）
18.1　固体电子能带论基础……………………………………………………（291）
18.2　半导体与微电子学简介…………………………………………………（294）
小结…………………………………………………………………………………………（296）
思考题……………………………………………………………………………………（297）
习题………………………………………………………………………………………（297）
第 5 篇自测题……………………………………………………………………………（298）
**附录 1　各篇自测题答案 ……………………………………………………………（300）**
**附录 2　物理常数表 …………………………………………………………………（304）**

# 第1篇　力　学

力学研究物体机械运动的规律。机械运动最具直观性，常见于人们的生活、生产实践中。在整个物理学中，力学是发展最早也是研究最透彻的学科。它所讨论的基本概念、基本规律及所形成的研究方法，不仅是物理学其它部分的前导，而且深刻影响着其它学科。

在大学物理课程力学篇中，其内容包括质点运动学、牛顿运动定律、动量与能量、刚体转动、振动与波动等内容。表面看来，除了刚体转动外，其它内容都与中学物理内容重复，这其实是一种误解。实际情况是：大学物理中的力学在中学物理的基础上有一个螺旋式的上升。在应用数学工具方面，在研究问题的深度、广度方面，在概念的准确性和分析问题的规范性方面，都比中学物理有很大提高，学生在学习时应特别注意这一点。

# 第1章　质点运动学

**提要与自学指导**

本章的主要任务是讨论怎样描述质点的运动状态。其主要内容是质点运动学物理量的定义以及从定义出发解决质点运动学问题。

具体而言，本章内容大致可划分为三部分。

(1) 阐明参照系、质点概念，阐明位置矢量、运动方程、速度、加速度的定义。

(2) 从定义出发解决质点运动学的两类互为正逆的典型问题。

(3) 简单介绍一个很有用的运动合成法则。

在学习本章时，要特别注意深入理解速度、加速度的矢量性、瞬时性和相对性。要刻意学会从定义出发解决问题，克服"想当然"、乱套公式的毛病，逐步养成"规范"讨论问题的习惯。

本章的难点是加速度概念，特别是曲线运动中的加速度、变加速度的概念。

## 1.1　位移和速度

### 1.1.1　参照系

一个物体运动的描述，必须选定另一物体作为参考(或参照物)，这个被选作参考的物体称为参照系。

一般说来，参照系不同，对同一运动物体的描述也不同。比如匀速前进的车厢中的自由落体，相对于车厢作直线运动，相对于地面作抛体运动。

运动学中参照系的选择可以是任意的，主要视问题的性质和研究方便来选定。

### 1.1.2　质点

任何物体都有一定的大小和形状。如果物体的大小和形状在所研究的现象中可以不予考虑，我们就可以把物体抽象为一个具有一定质量的几何点，称为质点。质点强调了物体的质量和位置，是一种理想的力学模型。

一个物体能否被看作质点，应由问题的性质而定。例如，当物体作平动时(如抽屉、汽缸的运动)，物体中各点有相同的运动，任取其一点即可代表整个物体，这时物体就可看作是质点；再比如，研究地球绕太阳公转时，地球可视为一个质点，而研究地球的自转时，则不能将其再视为质点。

### 1.1.3　位置矢量

位置矢量是描述质点位置的物理量。

为了表示运动质点相对于参照系的位置，取固定在参照系上的坐标系(参看图1.1)，质点$P$在坐标系中的位置可用从原点$o$到$P$所在点的有向线段$\overrightarrow{oP}=r$来表示，矢量$\boldsymbol{r}$叫作位置矢量或矢径。

矢径 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系下可表示为：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

其中：$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y}{r},$$

$$\cos\nu = \frac{z}{r}$$

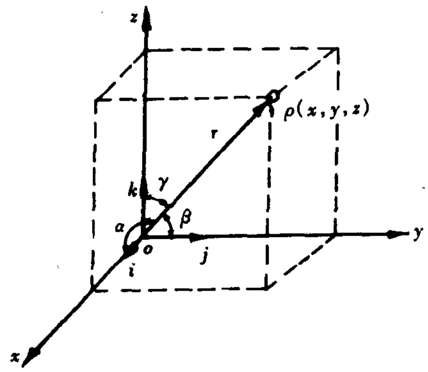



图 1.1　位置矢量

质点的机械运动是质点的空间位置随时间变化的过程，所以，质点坐标和矢径都是时间 $t$ 的函数，可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1a}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.1b}$$

上面两式都表示了运动过程，称为运动方程。其中，(1.1a) 式称为运动方程的矢量式，(1.1b) 称为运动方程的标量式或分量式。

### 1.1.4　位移

位移是描述质点位置变动的物理量。

如图 1.2 所示，$\overset{\frown}{AB}$ 是质点运动轨道的一部分。在 $t$ 时刻，质点处于 $A$ 点，位置矢量为 $\boldsymbol{r}_A$；在 $t + \Delta t$ 时刻，质点运动到 $B$ 点，位置矢量为 $\boldsymbol{r}_B$。质点在 $\Delta t$ 时间内位置矢量的改变应为有向线段 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}$ 称为质点在 $t$ 到 $t + \Delta t$ 时间内的位移。从矢量关系来看，位移 $\overrightarrow{AB}$ 可以表示为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A \tag{1.2}$$

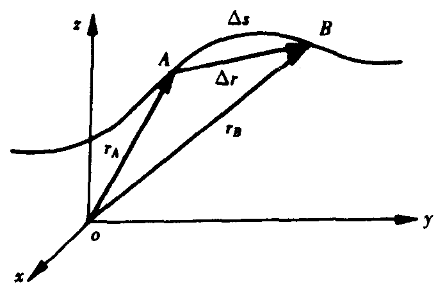



图 1.2　位移

上式表明位移正是在 $\Delta t$ 时间内的矢量差 $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$，即位置矢量在 $\Delta t$ 时间内的增量。

位移和位置矢量的单位(SI) 均为：米(m)。

需要指出的是：一般地，在有限大小的时间内，位移和路程是不相等的。如图 1.2 所示，路程是 $\overset{\frown}{AB}$ 而位移大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 为弦长。

### 1.1.5　速度

速度是描述质点位置变动快慢的物理量。

如图 1.2 所示，在 $t$ 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻这段时间内，质点的平均速度定义为

$$\boldsymbol{v}_{均} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

显然，平均速度的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 方向一致，在量值上等于单位时间内位移的大小。因而，它平均地描述了质点在 $\Delta t$ 时间内运动的快慢和方向。

但是，平均速度对于运动的描写是粗糙的，它仅仅反映了位移在一段时间内的平均变化。要想精确了解质点在某一特定时刻 $t$(或某一位置) 的运动情况，应使 $\Delta t$ 尽量小。定义瞬时速度

为 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限值。其数学表达式为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

瞬时速度（简称速度）等于位置矢量对时间的一阶导数。

速度方向是 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度 $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 或位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向。当 $\Delta t \to 0$ 时，$B$ 点无限靠近 $A$ 点，位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 方向就与 $A$ 点切线方向一致。所以，质点速度的方向是沿质点在轨道上所在点的切线，并指向质点的前进方向。

速度是矢量，具有大小和方向。速度的大小称为速率，即

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 就等于路程 $\Delta S$（即 $\overset{\frown}{AB}$）。所以

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

速率和速度的单位(SI) 均为：米 / 秒(m/s)。

在直角坐标系中，速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

其中：
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

速度的大小为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

## 1.2 加速度

### 1.2.1 加速度的一般定义

加速度是描述质点速度变化快慢的物理量。

参看图 1.2。若质点在 $t$ 时刻速度为 $\boldsymbol{v}$，在 $t + \Delta t$ 时刻速度增加到 $\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}$，则在 $\Delta t$ 时间内速度的增量为 $\Delta \boldsymbol{v}$，定义平均加速度为

$$\boldsymbol{a}_{均} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

它反映了在 $\Delta t$ 时间内速度的平均变化率。为更细致地描述质点在任一时刻（或任一位置处）的速度变化，引入瞬时加速度的概念。

定义瞬时加速度（简称加速度）为当 $\Delta t \to 0$ 时平均加速度的极限值。

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.6}$$

其方向为 $\Delta t \to 0$ 时 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向。

加速度的单位(SI) 为：米 / 秒$^2$(m/s$^2$)。

在直角坐标系中，加速度可表示为

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

其中：
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

其大小为
$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

### 1.2.2 切向加速度和法向加速度

速度的变化包含了速度大小和方向的变化。下面设法将加速度分解成两个分量，其一专门反映速度大小变化的快慢；其二专门反映速度方向变化的快慢。

把质点速度表示成速度大小与方向两部分的乘积：

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} \tag{1.7}$$

其中：$\boldsymbol{\tau}$ 为沿速度方向（切向）的单位矢量。根据加速度的定义可知，

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \tag{1.8}$$

式中第二项即体现了速度大小保持不变，方向随时间变化的快慢程度。

下面计算$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$（如图 1.3 所示）。质点作曲线运动。图中，$\Delta\alpha$ 是不同时刻两单位矢量 $\boldsymbol{\tau}(t)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)$ 之间的夹角，也就是 $t$ 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻速度矢量之间的夹角。当 $\Delta t$ 很小时，由于 $|\boldsymbol{\tau}(t)| = |\boldsymbol{\tau}(t+\Delta t)| = 1$，所以，

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| \approx \Delta\alpha$$

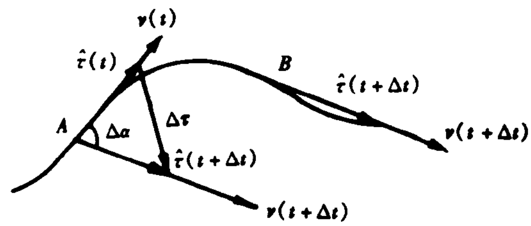



图 1.3　切向加速度和法向加速度

当 $\Delta t \to 0$ 时，$d\boldsymbol{\tau}\left(\text{或}\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right)$ 方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 方向相垂直，指向曲线凹面。这个方向称为法向。因此，

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\boldsymbol{n} = \frac{dS}{dt}\frac{d\alpha}{dS}\boldsymbol{n}$$

其中：$\boldsymbol{n}$ 为法向单位矢量；$dS$ 表示 $\Delta t \to 0$ 时的微分弧长。根据曲率的定义$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\alpha}{dS}$，$\rho$ 为曲率半径，上式又可表示为

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.9}$$

代入到(1.8)式中，得

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{1.10}$$

这样，就把加速度分解成两项。其中，第一项$\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$ 表示方向保持不变，速度大小随时间的变化而变化，方向始终沿切向，称为**切向加速度**，用 $a_t\boldsymbol{\tau}$ 表示；第二项$\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$ 表示速度大小不变时，方向随时间的变化而变化，方向沿法向，称为**法向加速度**，用 $a_n\boldsymbol{n}$ 表示。

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \\ \boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n} \end{cases} \tag{1.11}$$

综上所述，质点作平面曲线运动时，加速度可以分解为法向加速度和切向加速度。作为特例，质点作匀速圆周运动时，$a_t = 0$，而法向加速度（向心加速度）$a_n = \dfrac{v^2}{R}$，其大小恒定不变，方向（$\boldsymbol{n}$）则随时间的改变而改变。因此，匀速圆周运动既不是匀速运动也不是匀加速运动。

## 1.3 圆周运动的角量描述

质点作圆周运动时，也可以用角量（角位移、角速度、角加速度）来描述。本节将给出角量的定义及描述圆周运动角量与线量之间的关系。

如图 1.4 所示，质点作平面圆周运动。在 $t$ 时刻，质点位于 $A$ 点，与 $x$ 轴夹角为 $\theta$，$\theta$ 称为质点在 $A$ 处的角位置，在 $t+\Delta t$ 时刻质点运动到 $B$ 点，角位置为 $\theta+\Delta\theta$，经过 $\Delta t$ 时间质点经历的路程为 $\overset{\frown}{AB} = \Delta S$，相应地，角位移为 $\Delta\theta$。一般规定沿逆时针方向转过的角位移 $\Delta\theta > 0$。

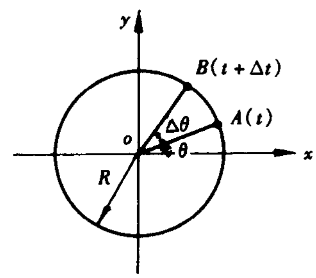



图 1.4 圆周运动的角量描述

根据速率定义，质点在圆周上的线速率为

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

定义角速度大小为

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

其单位（SI）为：弧度 / 秒（rad · s$^{-1}$）。这样，速度就可表示为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{\tau} = R\omega\boldsymbol{\tau}$$

加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + R\omega\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

如果定义角加速度

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.13}$$

将（1.13）及（1.9）式代入加速度表达式中，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= R\beta\boldsymbol{\tau} + R\omega\cdot\frac{v}{R}\boldsymbol{n} \\ &= R\beta\boldsymbol{\tau} + R\omega^2\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

与（1.11）式相比较，切向加速度 $a_t = R\beta$，法向加速度 $a_n = R\omega^2$。这样，就可以给出描写圆周运动的线量（速度、加速度）与角量（角速度、角加速度）之间的关系：

$$\begin{cases} v = R\omega \\ a_t = R\beta \\ a_n = R\omega^2 \end{cases} \tag{1.14}$$

质点作匀变速圆周运动时，其角加速度$\beta$为一常量，设$t=0$时，$\omega=\omega_0$，$\theta=\theta_0$。利用(1.13)式，两边同时积分得，

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \beta \mathrm{d}t$$

$$\omega = \omega_0 + \beta t \tag{1.15}$$

由于 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，代入上式得：

$$\mathrm{d}\theta = (\omega_0 + \beta t)\mathrm{d}t$$

两边同时积分，得：

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^t (\omega_0 + \beta t)\mathrm{d}t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t \tag{1.16}$$

由(1.15)、(1.16)式消去时间参量$t$得

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \tag{1.17}$$

特别地，当质点作匀速圆周运动时，$\omega=$ 常量，$\beta=0$，其运动方程为

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

直线运动和圆周运动的一些公式如表 1.1 所示。

**表 1.1**

| 直线运动 | 圆周运动 |
|---|---|
| 位置 $x$，位移 $\Delta x$ | 角位置 $\theta$，角位移 $\Delta\theta$ |
| 速度 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ | 角速度 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ |
| 加速度 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2}$ | 角加速度 $\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ |
| 匀速直线运动 | 匀速圆周运动 |
| $x = x_0 + vt$ | $\theta = \theta_0 + \omega t$ |
| 匀变速直线运动 | 匀变速圆周运动 |
| $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_t t^2$ | $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$ |
| $v = v_0 + a_t t$ | $\omega = \omega_0 + \beta t$ |
| $v^2 = v_0^2 + 2a_t(x - x_0)$ | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$ |
| $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ | $\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$ |

## 1.4 质点运动学的典型问题

质点运动学是研究物体位置随时间变化的规律及位移、速度、加速度等运动学量随时间变

化的关系。因而，质点运动学的基本问题可以划分为两大类：

（1）已知质点运动方程，求质点的速度和加速度；

（2）已知质点的加速度，求质点速度和运动方程。

### 1.4.1 第一类问题

如果问题中直接或间接地给出了质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，根据定义式 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$，利用求导的方法，可以求出任意时刻质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$。

**例 1.1** 已知质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=a\cos(\omega t)\boldsymbol{i}+b\sin(\omega t)\boldsymbol{j}$. 试求：

（1）质点运动的轨道方程；

（2）任一时刻质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$。

**解**（1）由已知条件，可以将质点的运动方程表示为

$$\begin{cases} x=a\cos(\omega t) \\ y=b\sin(\omega t) \end{cases}$$

消去时间参量 $t$，得到轨道方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

表明质点运动的轨道是长轴为 $a$、短轴为 $b$ 的椭圆。

（2）根据速度的定义：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= -\omega a\sin(\omega t)\boldsymbol{i}+\omega b\cos(\omega t)\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

该式给出了任一时刻质点速度的大小和方向。对于这一结果，也可利用在直角坐标系中的分量表达式得出。质点速度的分量

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega a\sin(\omega t)$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\omega b\cos(\omega t)$$

任一时刻质点速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\omega\sqrt{a^2\sin^2(\omega t)+b^2\cos^2(\omega t)}$$

其方向与 $x$ 轴的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\left[-\frac{b}{a}\cot(\omega t)\right]$$

再根据加速度的定义，任一时刻加速度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= -\omega^2 a\cos(\omega t)\boldsymbol{i}-\omega^2 b\sin(\omega t)\boldsymbol{j} \\ &= -\omega^2\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

显然，加速度 $\boldsymbol{a}$ 方向沿矢径负向，指向中心。

**例 1.2** 河中有一小船，在离水面高为 $h$ 的岸边。船在离岸边 $x$ 米处。现用绳拉船靠岸。已知收绳速率为 $v_0$ 米/秒，求船靠岸的速度和加速度。

**解** 要求速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$，首先必须写出船在任一时刻的位置矢量。

建立如图 1.5 所示的坐标系，船的位置矢量可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \\ &= x\boldsymbol{i}+h\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

根据定义

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}$$

利用图中几何关系

$$x=\sqrt{r^2-h^2}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

所以，速度 $\boldsymbol{v}$ 又可表示

$$\boldsymbol{v}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$$

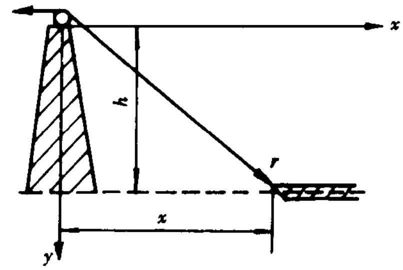



图 1.5

已知收绳速率 $v_0$，实指绳上各点沿绳方向运动的速率，即 $v_0=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，负号表示绳在缩短。将 $v_0$ 代入速度表式中，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=-\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}v_0\boldsymbol{i}\\&=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

类似地，可以求得加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right)\boldsymbol{i}\\&=v_0\frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}\\&=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

以上结果表明，速度、加速度方向均沿 $x$ 轴负向。

### 1.4.2 第二类问题

如果问题中已知质点运动的加速度 $\boldsymbol{a}$（或速度 $\boldsymbol{v}$）和初始条件，根据定义式 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，利用积分的方法可以求出质点运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 和运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。

**例 1.3** 1 个电子由静止出发沿 $x$ 轴运动，加速度 $a=kt(k>0)$，且 $t=0$ 时，电子位于原点，速度为 0。试求电子运动的速度及运动方程。

**解** 由题意可知：当 $t=0$ 时，$v_0=0$，$x_0=0$，由加速度的定义 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 可以得到：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

考虑到是一维运动，矢量方程转化为标量方程，即

$$\begin{aligned}v&=v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t\\&=\int_0^t kt\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}kt^2\end{aligned}$$

显然，$v>0$，其方向沿 $x$ 轴正向。

类似地，有关系式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_0^t\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$