力学譯叢

第一輯

上海市力学学会編譯委員会編譯

上海市科学技术編譯館

孙[illegible]

力 学 譯 丛

第 一 輯

上海市力学学会編譯委員会編譯

*

上海市科学技术編譯館出版

(上 海 南 昌 路 59 号)

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

上海大众文化印刷厂印刷

*

开本 787×1092 耗 1/16　印张 8 1/4　字数 200,000

1962 年 5 月第 1 版　1962 年 5 月第一次印刷

印数 1—2,200

书号: 5001·6

定价: 1.80 元

(内 部 发 行)

前　言

科学技术的发展与基础科学的发展有着密切的关系。在这方面，力学所处的地位极为明显。力学的发展，对于工程技术和一些尖端科学都起着重大的作用。为了满足广大力学工作者的需要，我们决定编译这本"力学译丛"，由上海市科学技术编译馆出版。

这一辑可以说是我们的试刊，共计十一篇译文；其中一般力学三篇，固体力学四篇，流体力学三篇，以及最后一篇介绍苏联科学家尼·古·切塔耶夫在力学上的卓越成就。这几篇译文中，有力学领域中的各种问题。如所周知，变分原理是研究力学和物理学的有力工具，这里所选择的主要是说明它在经典物理学和近代物理学上的应用。随机振动问题可以说是结构动力学上一个很重要的课题，作用于结构上的外力是时间的随机函数，这种载荷有平稳随机过程(如风载、飞行器上作用的荷载等)和不平稳随机过程(如地震的作用)两种情况。前者目前主要应用于自动调节理论以及处理噪声的问题。后者则多用统计的和经验的方法来解决。薄壳结构在土建、机械、造船以及航空工程上均有着广泛的应用，由于它的自重很轻，可大大节约原材料，已出现了很多新型的结构型式，国内也已有不少工程建筑物采用薄壳结构。因此我们特选择了两篇有关壳体发展近况的论文。在流体力学方面几乎都是属于空气动力学的范畴，超音速钝头体问题以及稀薄气体的研究与现代航空技术有着密切的关系。电磁流体力学是一门正在迅速发展的科学，它是研究导电流体在磁場中的运动，作者对其在航空上的应用可能性提出了自己的看法。

为了通过"力学译丛"向广大读者介绍国外力学的发展和动向，并为今后继续编译出版时对各种文献的取舍有所遵循，我们初步确定选题的范围如下：

一、着重介绍国外期刊上新发表的专题论文，但亦不排斥有价值的早期论著。

二、多译载些国外力学研究的总结性文献。

三、介绍国外力学实验技术方面的佳作。

此外，在编译工作方面，除了忠实于原著外，我们采取去芜存菁的方针，也就是说，删节一部分沒有参考价值或与其他著作颇有重复的內容，同时对原文阐述不够明确或显然错误之处以译注的方式加以纠正或补充说明。

对于编译工作，我们还十分缺乏经验，目前我们采取的方针是否妥当，还有待于在实践过程中通过读者的批评来逐步改进和确定下来。同时，限于我们的水平，编译工作的质量上难免有些缺点。例如，由于国內外力学工作的飞跃发展，出现了许多新的专门术语，我们目前只能做到一篇译文中的统一，至于这类专门术语的译名统一，则需在全国范围的讨论下求得确定。总之，我们这一出版物亟盼广大读者关怀支持和批评指教，在我们的共同努力下，不断提高质量，更好地为读者服务。

上海市力学学会编译委员会

1962 年 3 月

目　录

力学变分原理
在經典物理学和近代物理学中的作用

Л. С. Полак 著　　　于尔申譯　郭乾荣校

力学变分原理在經典物理学的发展中的作用

随着19世纪中叶热力学和热现象的分子运动论的发展，在机械世界观的拥护者面前，提出了把这类新问题归结为力学这一任务。首先是关于热力学第二定律；这一定律，由于它特有的、与经典力学非常不同的、不可逆性的观念，给世界的物理图景带来了新的因素。在19世纪60～70年代，布耳兹曼(L. Boltzmann)[1]、克劳修士(R. Clausius)[2]、契利(C. Szily)[3]等首先想从力学原理导出热力学第二定律。契利错误地认为，他已经直接从哈密顿原理导出了第二定律；可是，布耳兹曼和克劳修士却看到，要解决这问题，哈密顿原理应该作本质上的改变；这种改变其实是在力学范围以内和以外给原理以不同的意义，从而推广了原理本身。

引入质点通过封闭循环的时间 i 和运动的相这些概念，以及坐标和速度的平均值的概念，克劳修士借能量守恒定律找到了与最小作用原理形式相似的表达式；它的区别仅在于积分是从零到 i 进行的。因而，这里假定了实际运动和变更运动的封闭性质，这些运动没有一点重合，可是在通常的最小作用原理中，起点和终点是共同的。

然后，克劳修士求得，对于系统得到的动能：

$$E_{\text{кин}}=T\delta\Sigma mc\ln T_i; \tag{77}$$

式中，T——按假设 $\frac{m}{2}\bar{v}^2=mcT$ 而引入的绝对温度；c——对每一点都确定的某一常量。令 $A\delta E_{\text{кин}}=\delta Q$，式中，$A$——热功当量，并以 S 表示 $A\Sigma 2mc\ln T_i$，并写为 $\delta Q=T\delta S$，式中，S——克劳修士所谓的熵。用 d 代替 δ，并将这方程式对循环过程积分，就得到 $\oint\frac{dQ}{T}=0$。因而，在所引入的有关运动和变更特性的假定下，热的机械论的第二定律可以归结到普遍的力学原理[4]。

分析了契利(1872～1873年)的工作——他认为可以不必附加任何假定而从哈密顿原理导出第二定律；而且甚至可以从第一定律导出第二定律，可以证明契利的结论是错了。契利没有注意到变更的特性；也没有注意到，当 U 发生与坐标改变无关的变化时，哈密顿原理是不能应用的；又没有注意到，当各质点作不规则运动时，不可能对所有的点引入一个共同的时间 i。

其次，在1873年，克劳修士[5]在引入了正则变换并利用最小作用原理(对于把力学推广到热现象来说，它是比较不方便的)来代替哈密顿原理后，得到与第二定律相似的一个表达

式。可是，就是在这情况下，也不能说由力学原理可以直接导出第二定律。所得到的表达式没有什么启发性，而且，在物理学上也没有絲毫简单而明显的解释。其实，从一个(而且仅从一个)划一地理解的原理所导出的物理学观念不是现实的，而是借助于由不同的、内部不一贯的观点来看的一个对比关系，用物理学各部门(在这里是力学和热学)的联合观念来暗中偷换物理概念而已。这就是说，热学和力学的现象上的协调，并不能丰富世界的物理图景。

在1866年，布耳兹曼提出了关于"热力学第二定律的力学价值"的问题。为了回答这一问题，他研究了周期运动系统的力函数和活力的平均值，以及当这系统所受的外作用改变时这些平均值的变分。在这样的提法下，问题自然引导到哈密顿原理。将哈密顿原理推广，则得到

$$2\delta\int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} T\,dt=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}(\delta h-\delta V)\,dt+\Sigma\left|\,p_i\,\delta q_i\,\right|_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1};\tag{78}$$

式中，V——势能，与作用在这系统上而使约束保持不变的力有关；而 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$。在1871～1872年，契利和克劳修士曾用过这一方程式；1897年，布耳兹曼把它化成最普遍的形式：系统在某一交换中传递的热，等于无规则的内能的增量和系统所作有规则的功的和。如果这一交换是在瞬时 t_0 到瞬时 t_1 连续而逐渐完成的，那末，可以为它导出布耳兹曼公式的一般形式：

$$\varDelta Q=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\delta Q\,dt=\frac{1}{t_1-t_0}\left[2\delta\int_{t_0}^{t_1}T\,dt-\Sigma\left|\,p_i\,\delta q_i\,\right|_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}\right].\tag{79}$$

在周期运动的情况下，最低一项消失了。$\int_\tau T\,dt=\bar{T}\tau$； 式中，$\bar{T}$——动能的平均值；$\tau$——周期。因而得到 $\varDelta Q=\dfrac{1}{\tau}\,\delta\int_\tau T\,dt=\dfrac{1}{\tau}2\delta(T\tau)$。如果是绝热过程，那末 $\varDelta Q=0$，且 $\bar{T}\tau=$ 常量；这就是说，$T\tau$ 是绝热不变量。这一方法可以用来研究条件-周期系统；这种系统可以看作具有各种不同的不可通约的周期系统总体的迭加。

根据广义的哈密顿原理，这种过程接近于热的运动。所找到的相似性，对热现象并没有带来多少新的有远景的理解；可是，统计力学却在有关系统状态的机率学说和有关起伏（这一概念不同于经典力学)学说中揭露了不可逆性的深刻意义。但是，上述的发展方向给出了许多结果，这些结果丰富了物理科学：推广哈密顿原理、循环系统的理论、有关广义变分和有关条件周期运动的概念。这些概念在物理学的各个部门中都有相当重要的应用。

物理学由于极力要把所有的各种各样的物理现象都归结为机械运动而引起的困难，是19世纪末形成的物理学危机的原因之一；这一危机特别表现在这样一种趋向上：鼓吹放弃对现象的说明，而转到纯粹地描述。在19世纪末的物理学中，所谓唯能论，就宣布了这种思想。唯能论者依靠能量守恒定律和哈密顿原理，企图以能量概念（不论实物和它的复杂的原子结构)为基础，来建立整个物理学。布耳兹曼批评了唯能论者所犯的科学性错误；而列宁则批评了他们的哲学观念。"唯能论"的破产证明了，用纯粹表象的方式来建立物理学是不可能的。唯能论者和他的反对者都利用了哈密顿原理这一事实，证明了同一数学工具可以用来形成不

同的物理图景。世界的物理图景，可以用哈密顿原理来建立，但是不能用它来引出（如果事先并不知道需要得到什么）。

在 19 世纪，拉普拉斯(P. Laplace)的理想看来还是可以实现的。按亥姆霍兹(H. Helmholtz)的看法，把全部物理现象归结为机械力的作用是对自然界完全理解的基础。19 世纪80年代，亥姆霍兹作出结论[6]，要解决这个基本问题，需要利用最小作用原理，不过要把它推广到拉格朗日函数是 q 和 $\dot{q}$ 的任意形式函数；这就是说，要放弃力学所特有的动能是速度的齐次二次型、而势能只是坐标和时间的函数的假设。按亥姆霍兹的意见，最小作用原理是用来描述许多新类型现象的规律的有启发性的原理。要这样来扩大原理的应用范围，必须要考虑某些我们观察不到的质量的隐运动。克劳修士也要想解决同一个问题，他假定自然规律按一定规律作变化。但是，规定规律间的这种教阶制度，给科学造成了新的困难。亥姆霍兹建立了一些力学模型，它们的性质可与热过程相似，可以作为这种相似的是一些循环系统，它们的性质与坐标的绝对值无关而仅与它们的变化速度有关。因而，为相似的系统建立拉格朗日函数(按亥姆霍兹的术语——动势)是主要的问题。线性地含有速度的动势，在这问题中起主要作用。在许多论文和主要著作“论最小作用原理的物理意义”中，亥姆霍兹利用动势和有关隐运动的概念，试图用统一的机械图案来概括热力学和电动力学。引出变换动势的值

$$L=\tilde{L}-\sum_b c_b\dot{q}_b; \tag{80}$$

式中，c_b 为一常量，表示循环运动的不变动量；$\tilde{L}$ 与确定整个循环的位置和速度的 q_a 和 $\dot{q}_a$ 有关，且与 L 不同，它不含个别质点的坐标 q_b，而含有 q_a 和 $\dot{q}_a$；q_b 现在是用 q_a 和 $\dot{q}_a$ 来表示的。因而，在 L 中，除了二次函数外还含有 $\Sigma c_b\dot{q}_b$ 项；这种项，在把 $\dot{q}_b$ 的解代入后，将含有速度 $\dot{q}_a$ 的一次方。这就是循环系统的主要特点。显然，当过程的方向倒过来(改变 $\dot{q}_a$ 的正负号)时，$\tilde{L}$ 不变；而对于由动势 L 表征的运动，就将得到新的动势，从而得到别一个微分方程式。过程是不可逆的。但是，要说明不可逆运动，所观察的循环运动是不够的。因而，亥姆霍兹假定，有隐的循环运动存在（由封闭在不可渗透的壳体——也是转动轴的支承——中高速转动的球组成的系统的运动，就是这种运动的例子）。

研究了在各个方向上同时作用在系统上的力与相应于这些力的速度和加速度间的相互关系，亥姆霍兹[7]利用动势的表达式和拉格朗日方程式导出了力与加速度、力与速度、力与坐标间的关系定律。例如，$\dfrac{\partial F_a}{\partial \ddot{q}_c}=\dfrac{\partial F_c}{\partial \ddot{q}_a}$；式中 F_a、F_c——作用在 q_a 和 q_c 上的力；$\ddot{q}_a$ 和 $\ddot{q}_c$——相应的加速度。如果 $\ddot{q}_c$ 的一定增长使 F_a 增大，那末，$\ddot{q}_a$ 的相同增长将使力 F_c 按同一比例增大。由于这些相互关系可以应用于非力学现象，因而是值得注意的。亥姆霍兹由这些关系得到了楞次(Lenz)的电动力学定律、热电效应定律和其他许多定律。

亥姆霍兹也研究过麦克斯韦耳(C. Maxwell)的电动力学需要什么形式的动势的问题。

力图从物理学中除去势能的概念，是 19 世纪后半期物理学中动力学方向的特点。在 1883～1888 年湯姆逊 (J. J. Thomson)[8] 利用拉乌斯 (J. Routh) 在力学中所获得的结论来证明，在自然界中观察到的势能的各种形式，可以看作是隐运动的能观察到的效应。J. 湯姆逊相信，物理学在以前五十年中发展的结果，证明了所有的物理现象都可以用动力学原理来解释，因而，他为自己提出了一个任务：利用哈密顿原理和拉格朗日方程式而不利用热力学第二定律，来研究各种不同的物理现象。这种处理方法的优点是它的基本而概括的特征；而它的困

难是，在每一个别情况下，都需要进一步研究如何将物理量转变成力学概念的语言；这就是说，需要某些准则来确定：某一个物理量到底是坐标呢还是它的导数。利用哈密顿原理的应用不需要知道所研究系统的机构的性质这一事实，J. 湯姆逊发展了势能的动力概念。

假定某一坐标 q_j 只以 $\dot{q}_j$ 的形式而不是以乘积 $\dot{q}_i\,\dot{q}_j$ 的形式出现在 T 中，那末，对于 $s=i$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=0;$$

而对于 $s=j$,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=c_j。$$

现在消去 $\dot{q}_i$。这一重要步驟首先由拉乌斯作出。J. 湯姆逊把坐标 q_j 叫做循环坐标，W. 湯姆逊(W. Thomson，即凯尔文爵士)和台特(P. Tait)把它叫做可遗坐标，而亥姆霍兹把这些现象叫做隐运动。消去 q_j 后量 T 变成 $\tilde{T}$，同时

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\Sigma\, c_j\, q_j; \tag{81}$$

式中，右侧只是 q_i 的函数。如果把右侧看作力函数 U，那末，可以用纯粹动力的方法来解释力函数的出现，因而，把势能归结到“可遗”质量的动能。根据 J. 湯姆逊的观点，所有的能量都是动能，拉格朗日方程式中所有各项都表示动能，而问题只在于，这一动能到底是由通常坐标的变化造成的还是由可遗坐标的变化造成的。关于运动都是机械的，而可观察到的所有其他的变化形式都是归结到这种机械运动这一概念，限制了J. 湯姆逊用运动着的物质的性质去解释所有的现象的深刻思想。

普朗克(M. Planck)断定，可以用哈密顿原理来把物理学的各部门统一成一个整体。根据普朗克[9]在20世纪前廿五年间所发展的观点，作为建立统一的世界物理图景的基础的最小作用原理，是所有的可逆过程的普遍原理，因为它完全对称地包含了四个宇宙坐标(Мировые Координаты)，而且，对于所有的洛伦兹变换都是不变的。最小作用原理在力学中产生，但它的应用范围包括了热力学和电动力学。因此，必须用它来解决理论物理学的共同问题；为此，既应该研究系统的位形用有限个坐标来确定的情况，也应该研究系统状态的坐标是连续流形的情况。在第一种情况下，哈密顿原理给出：

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\,\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i+\Phi_i\,\delta q_i\right)=0 \tag{82}$$

式中 Φ_i——与坐标相应的外力分量。在第二种情况下，

$$\int dt\left[\int d\tau\cdot\rho\,\Sigma\,\dot{q}_i\,\delta\dot{q}_i-\int d\tau\left(\frac{\partial f}{\partial x_x}\,\delta x_x+\frac{\partial f}{\partial x_y}\partial x_y+\cdots\right)+\int d\sigma\,\Sigma\,\Phi_i\,\delta q_i\right]=0; \tag{83}$$

式中，$d\tau$, $d\sigma$——分别是体积单元和面积单元；ρ——密度；f——某一齐次二次函数，表示单位体积的势能；$x_x=\dfrac{\partial q_1}{\partial x}$,…——变形值。把哈密顿原理应用到热力过程，是一个最重要的问题。在这情况下，变量是 p、V、T、S，以及能量(或全功) $A=-p\,\delta V+T\,\delta S$ 的变化；这

表达式应该与普遍表达式 $A=\Phi_1\delta q_1+\Phi_2\delta q_2$，相比较。取 V 和 S 做坐标，而 p 和 T 就好象是分力 Φ_1 和 Φ_2。因为这种状态的热力学的可逆变化进行得极为缓慢，因而 $\dot{V}$，$\dot{S}$ 等等可取为零；于是，由哈密顿原理，可得

$$\Phi+\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

或

$$-p+\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_S=0, \quad T+\left(\frac{\partial L}{\partial S}\right)_V=0。$$

因为，在这情况下，由 $E=\Sigma\dot{q}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-L$ 可得 $E=-L$（E是总能），因而，上述方程式是方程式 $dS=dE+p\dfrac{dV}{T}$ 的另一种写法。

上述亥姆霍兹研究热力现象的方法，有完全不同的意义。其中，V 是守恒的，而 S 则由某一循环坐标 ε 来代替，且 ε 在表式 L 中只含 $\dot{\varepsilon}$ 形式，这一导数就是温度，因而，$L=L(V, T)$，而 $A=-p\delta V+E\delta\varepsilon$。因此，根据最小作用原理，可得

$$-p+\left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_T=0, \quad E-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_V=0$$

或

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_V=E\,dt \text{ 和 }\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_V=S$$

（任意常量，等于零）。

因为 $E=\dot{\varepsilon}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varepsilon}}-L=T\dfrac{\partial L}{\partial T}-L$，因而，$L=-(E-TS)$；这就是说，$L$ 与系统的自由能的正负号相反。与普朗克的观点比较，亥姆霍兹的立場的主要优点在于，他把热能看作某些质量的运动；而它的弱点则在于，这些质量是隐的观察不到的。

19世纪电动力学的发展，比热力学的发展给物理学的机械论观念提出了更困难的问题，因为这里除了质点或质点系外首先产生连续場的问题。

拉格朗日函数 $L=L(q, \dot{q}, t)$ 是时间的函数和系统各质点的可能轨线 $q_i(t)$ 的泛函。类似地可以假定，場的拉格朗日函数是波幅 $\psi(r, t)$ 的泛函。通常，它可以表示成拉格朗日密度对整个空间所取的积分：

$$L=\int\widetilde{L}(\psi, \operatorname{grad}\psi, \dot{\psi}, t)dV; \tag{84}$$

式中，$\operatorname{grad}\psi$ 的所以出现在 $\widetilde{L}$ 的自变量中，是由于場的自由度是数不清的，而 ψ 是 r 的连续函数。因为，通常假定拉格朗日函数与場函数和它不超过一阶的导数有关，因而，相应诸方程是不超过二阶的微分方程。对于自由場来说，要求由拉格朗日函数导出的、这种場的方程是线性而齐次的。这种方程只能由对場函数和它的导数是二次的拉格朗日函数来导出。这些条件与場函数的相对论不变性以及变换性质综合起来，可以确定拉格朗日函数，精确到系数为止。如果根据变分问题，那末，欧拉-拉格朗日方程应该就是場方程。

原书缺页

来由此作出唯心主义的结论，它终于受到列宁深刻而正确的批判。

因此，可以说，在经典热学和经典場论中，变分原理或者用来实现用力学或电磁学来解释所有物理现象的企图，或者用来把这些物理现象的规律现象地统一成一个数学形式。

力学变分原理在近代物理学发展中的作用

要说明变分原理在世界的物理图景中的地位以及它的启发性的价值，必须发展微粒-場的综合理论，并将变换群不变量的基本意义的思想深刻贯彻到理论物理学中。在历史上，这一发展实现于相对论、量子力学(非相对论的和相对论的)和量子場论中。

根据相对论的观点，扩大到空-时四维体积上的密度，是哈密顿意义下的作用量。在相对论(与 T 有关的部分)中，表达式 L 的形式是

$$L=-m_0c^2\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt \tag{87}$$

而且，积分符号下的量，是固有时间单元；闵可夫斯基(Минковский)曾认为，这固有时间单元是狭义相对论的最简单的不变量，并由爱因斯坦将它作为宇宙线元而引入广义相对论中。在这形式下的哈密顿原理，自动满足相对论不变量的要求(拉格朗日方程式也一样)。差不多与爱因斯坦发现广义相对论的同时，希耳伯特(D. Hilbert)[12]在 1915 年企图建立一个理论，根据这理论奠定一个公理；按这公理，物理过程的定律可以由下面的要求引出：1)对于十四个爱因斯坦势中的每一个来说，标量世界函数 H 有

$$\delta\iiiint H\sqrt{g}\,dw_i=0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{88}$$

H 对于 w_i 的任意变换是一个不变量。虽然对爱因斯坦来说哈密顿原理只起从属作用，但在希耳伯特的著作中，它提升到第一位。希耳伯特由这些公理得到爱因斯坦的引力場和电磁場方程。稍晚一些，爱因斯坦[13]从事于哈密顿原理的专门工作，他在数目比希耳伯特来得少的、有关实物性质的假定下，也由哈密顿原理导出了引力場方程。爱因斯坦的结论的重要性在于，它完全与经典力学的方程类似，其实，它只是实现了某一积分的变分与变分问题(等周问题)的方程的联系。当然，在爱因斯坦的论证过程中，假定了

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

是不变量。因而，从哈密顿原理导出现象的定律时，或者需要由物理材料证明的、有关場和实物的假设，或者需要实验参数和关系的知识。由这原理导出相对论方程时，用数学方法比用物理的概念更为清楚。但是，将某些物理过程的数学图式归结到哈密顿原理，在方法论方面是很重要的；因为可以断定，对这些过程来说，有统一类型的因果关系：

在 1900 年，“作用量”作为特殊的、新的和极其重要的量，且以普朗克(M. Planck)的绝对黑体辐射理论中所引入的所谓量子作用量的形式而出现于物理学中。注意到作用量的量纲是能量×时间，1911 年索末菲尔德 (A. Sommerfeld)[14]假定分子间在辐射中出现的能量交换的时间进程是按某种一般方式调整的：在每一分子过程中，放出或获得一定的普遍作用量值，即

$$\int_0^{\tau} L\,dt=\frac{h}{2\pi};$$

式中，τ——过程的持续时间。在一定限度内，这一原则可以由相对论的见解来论证。因而，索末菲尔德作第一次胆怯的企图，把经典的哈密顿原理与微观过程的量子特性联系起来。1912年庞卡来根据雅可比的最后乘子理论和布耳兹曼-普朗克的统计力学，研究了哈密顿-雅可比形式的动力学与作用量和能量的量子化的关系。他指出，量子假设是导出绝对黑体辐射谱中能量分布的正确规律的唯一假设，但是，在普朗克的量子定律与经典力学间存在着绝对的矛盾。经典力学中正则方程的最后乘子是一这一事实，意味着经典力学必然与能量按自由度的均匀分布有内在联系。量子系统的最后乘子与经典系统不同，应该有间断的特性。

由于波尔 (N. Bohr) 原子理论的发展，自然地从研究电子在原子中作圆周运动的最简单情况，转到研究它的比较复杂的运动。索末菲尔德[15]、威尔逊 (W. Wilson)[16] 和其他学者就这样推广了波尔的理论。1915 年索末菲尔德注意到普朗克[17]的思想与波尔的圆形轨道的概念有关，普朗克的思想是：只有这种在状态空间中各曲线所围的面积等于 h 的连续状态才是可能的，并由此得出关于这种状态空间(它由面积为 h 的面积单元组成)的有限整除性。索末菲尔德求得：

$$\oint p\,dq=n\hbar; \tag{89}$$

式中，左侧是作用量积分，就是大家都知道的所谓相积分。利用这个积分，索末菲尔德研究了氢原子问题，引进了径量子数和角量子数，并证明能量与量子数的和有关，而不是分别与每个量子数有关。在解决类似氢原子的问题时，他利用了同样的方法，并解释了谱线的精密结构。

在历史上，威尔逊是第一个把相积分量子化的，他假定按周期$\frac{1}{\omega_\kappa}$取积分 $2\oint T_\kappa\,dt=n_\kappa h$。

索末菲尔德和威尔逊的理论是有缺点的，就是不能成功地指出一些法则以选择量子条件所必须应用的坐标。这种坐标的选择只在开普勒(Kepler)椭圆运动这一特殊情况下才是显著的。

1916 年爱普斯坦(P. S. Epstein)[18]在关于斯塔克(J. Stark)效应的著作中，为解决这问题走了第一步。爱普斯坦借用了天文学上多次用来解哈密顿-雅可比方程的所谓“分离变量”法。这方法可以直接确定能级而不必先计算轨道。在同一年，施瓦兹歇耳德 (K. Schwarzshild)[19] 根据施托德-施台凯耳 (Staud-Steckel) 的条件周期运动理论，跟爱普斯坦不同，用另一方法解决了这一问题。对这种运动引进某些作用变量 J_r 和角变量 φ_r，施瓦兹歇耳德得到这些坐标的正则方程和量子化条件：

$$\int J_r\,d\varphi_r=nh. \tag{90}$$

爱普斯坦证明了这两种方法的完全等价性。在这两种方法中所利用的数学手段是应用勒襄德变换。在老的“经典”量子力学中，力求引入这样的坐标，使哈密顿函数只与正则共轭冲量有关，因为，在这情况下，力学问题容易解决。

1916 年爱伦费斯特(P. Ehrenfest)[20]利用绝热式的假定，从理论上论证了索末菲尔德和其他学者的量子化条件。他利用了系统的绝热式不变量的概念，稍后，巴杰尔斯(J. Burgers)

证明了作用量相积分是绝热式不变量，根据爱伦费斯特的思想，绝热式不变量是量子化变量。

在经典理论中，始终研究积分 $\int \Sigma p_i dq_i$；而在量子理论中，研究的则是 $\int p_i dq_i$，因为在量子论中作用函数分成部分 $S_i(q_i)$，而在哈密顿-雅可比理论中，分离变量只是解方程的方法。

索末菲尔德-波尔理论的主要缺点是，它要确定经典轨道的全部集合，而在计算的最后阶段，却抛弃其中的大多数。而且，在解决具体问题时，正象克拉密尔斯 (H. Kramers)[21] 在 1923 年在一篇讨论氦原子理论的著作中指出的，经典量子论的方法与实验有分歧，他也证明了，波尔的模型在动力学上是不稳定的。氦模型的不成功，使波尔的理论失去了有力的研究工具——经典力学的方法，而整个理论变成了对真实关系差不多直觉的猜测。

由于波尔量子理论的发展，平行地发展着光和实物的性质的微粒-波动综合的问题。为了使光和实物的微粒和波动图景相互协调，经典物理学具有光学-力学相似这一已经研究出来的有力工具。1924 年，德布罗意 (L. de Broglie)[22] 遵循了关于最小作用原理与费马 (P. Fermat) 原理极其相同的思想。根据德布罗意的思想，主要的问题是从波动理论导出群速度的表达式，这个表达式可以表示微粒理论中的光速。德布罗意利用相对论来证明费马原理与最小作用原理是等价的。他引进四元波矢，而且，在确定了这矢量与最小作用原理的同一矢量间的关系后，求得了第四个分量的关系 $O_4=\frac{1}{h}J_4$。德布罗意大胆地假定其他分量也有同样的关系：

$$O=\frac{1}{h}J_{\circ}; \tag{91}$$

从这一假设可以得出下面的主要结论：质点动力学的可能轨线与可能的波束是相同的。对于波尔-索末菲尔德的量子化条件可以简单地得到：电子的闭合轨线应该含有整数的波长。

最小作用原理和费马原理是同一规律的两个方面。每一微粒和与它有不可分割关系的波动过程是相互对照的。光学-力学的相似具有新的意义，特别当实验肯定了德布罗意的假设时。

1926 年，薛定谔[23]对光学-力学相似性的发展进行了第二步工作。他从哈密顿原理中看到了波的演变结果，它是质点运动的基础。他利用光学-力学的相似来“拯救在微观世界中清楚地感觉到它生命的力学的本质”。

根据哈密顿-雅可比力学以及根据别耳特拉密 (E. Beltrami)、李普歇兹 (R. Lipschitz)、勃隆斯 (H. Bruns)、克莱因 (F. Klein)、德拜 (P. Debye)、索末菲尔德和隆格 (I. Runge) 的著作中几何光学的发展结果（他们利用相函数方程式给出了几何光学的广义形式并找出了它的关系的矢量表达式），薛定谔由哈密顿原理出发，他采用了 $ds^2=2T(q_\kappa, \dot{q}_\kappa)\,dt^2$，并将所有的以后的论证都引入状态空间。利用了与某一光束正交的作用面的构造和哈密顿-雅可比方程，并证明了这些面以波前的形式在空间传播，然后薛定谔作出结论：哈密顿原理表示了惠更斯原理在弗瑞斯奈尔 (Fresnel) 以前的表述。由此，利用关系式 $\lambda=\frac{h}{p}$，薛定谔得出他的基本的波动方程式；因为哈密顿的光学-力学相似完全在宏观物理学的范围内，而薛定谔实现了从宏观物理学到微观物理学的过渡。如果在哈密顿相似中没有象波长和波幅等概念，那末，在这里，这些概念引进了理论。从宏观力学过渡到微观力学，是通过光束的光学和波动光学来完成

的。为此，在将正弦波写成

$$\sin\left[\frac{2\pi S}{h}+\text{const.}\right] \tag{92}$$

后，必须分裂数学演绎的连续。在广义的光学-力学相似中引进$1/\hbar$，就可以得到方程

$$\Delta\psi+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi=0, \tag{93}$$

这方程包含了量子化条件，并可以写成

$$H\left(q_i,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\psi=H\psi \tag{94}$$

这就是薛定谔波幅方程的通常形式。正象温采尔(G. Wentzel)和布里洛恩(L. Brillouin)指出的，从原子的波动力学到经典力学的极限过渡，形式上与哈密顿的过渡相类似。薛定谔应用光学-力学的相似，这是物理过程的数学定律在形式上相似的例子。

19世纪物理学的情况还没有指出作为一种"几何光学"的经典力学只是波动力学的近似。要这一点清楚起来，必须经过一段极长的道路。只是台维逊(Davisson)和杰密尔 (Germer)的实验才改变了科学的这种局面。

转到关于变分原理在建立量子場论中的作用问题时，首先必须指出，在目前这理论还不是完善的，这就是说，在描述一定范围的物理现象时，还不能沒有內在的矛盾。

建立相对论的量子場的定域理论的普通方法是这样的：

1. 根据海生堡的观念，首先由場的算子建立能滿足各种不变条件的拉格朗日函数，定域条件，不引进高阶导数的条件，以及在大多数情况下不引进非线性项的条件。由上述各条件和場的几何性质的给定来单值地确定拉格朗日函数，它精确到比例系数(拟电荷)。象变分问题中求欧拉-拉格朗日方程一样，用通常的方法来求場算子的方程。由拉格朗日函数直接导出所有物理量的算子：能量-冲量、电流的四元矢等等。在相互作用場中，拉格朗日函数可以表示成和的形式，例如，在电磁場和电子-正电子的相互作用場中，

$$L=L_0(A)+L_0(\psi)+L_{\text{int}}; \tag{95}$$

式中，右侧第一、二两项是自由場的拉格朗日函数，最后一项是电磁場和自旋場相互作用的拉格朗日函数。

2. 薛定谔的观念是经典哈密顿图式的最完全的相似。在历史上，这一观念在非相对论的量子力学中特别有成效。从海生堡的观念可以很簡单地转到薛定谔的观念，这表示拉格朗日-海生堡的形式与哈密顿-薛定谔的形式是等价的。把问题的动力学方面和运动学方面清楚地分开，是薛定谔观念的最重要的功绩。这一点特别能说明，为什么薛定谔的观念在非相对论的場论中是成功的，而在相对论的情况下有困难——在这情况下，很难作类似的分开。从海生堡的观念转到薛定谔的观念，是利用哈密顿函数H(解释为随时间变动的算子)作为母函数而由正则变换来实现的。

3. 相互作用的概念(在电动力学和沒有派生粒子的介子动力学中)可以从海生堡的观念通过正则变换而得到；区别在于，作为变换函数，不必取所有的哈密顿函数，而只要取其中

描绘場的相互作用的一项 H_{int}。

上面研究过的量子場论的所有的表述(其中每一个都有与经典理论的相似)幷不能毫无內在矛盾地解决場论问题(分歧性!)。所有这些表述,根据哈密顿原理都可以应用于物理现象的上述领域中这一明显的前提,而这原理和与它有关的哈密顿形式和拉格朗日形式,到目前为止,是物理学中因果律的最普遍的表达式。

参考文献

1. L. Boltzmann: Uber die mechanischen Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Sitzungsberich. Wien. Acad. t. LIII, 1866, S. 195.
2. R. Clausius: Uber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien, Pogg. Ann. 142, 1871, S. 435.
3. C. Szily, Das Hamiltonsche Princip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, Pogg. Ann., 145, 1872, S. 295.
4. See (2), S. 461.
5. R. Clausius: Uber einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationare Bewegungen, Pogg. Ann., 150, 1873, S. 106.
6. H. Helmholtz: Die physikalischen Bedeutung des Princips der Kleinsten Wirkung, Wiss. Abhandl., t. 3, 1895.
7. H. Helmholtz: Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte, t. 1, 1911.
8. J. J. Thomson: Applications of Dynamics to Physics and Chemistry, London, 1886.
9. Отношение новейшей физики к механическому мировоззрению Изд. Физика, 1911.
10. J. Larmor: Aether and Matter, Cambridge, 1900.
11. G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie, Erste Mitteilung, Ann. d. Phys., t. 37, 1912.
12. D. Hilbert: Die Grundlagen der Physik, " Nächrichten von der Kön. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen " Math.-Phys. Kl. t. 3, 1915, S. 395-407.
13. A. Einstein: Hamiltonsches Princip und allgemeine Relativitätheorie, Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wissenschaften, 1916, S. 1111.
14. A. Sommerfeld: Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik, Physikalische Zeitschrift, 24, Dezember 1911, S. 1062.
15. A. Sommerfeld: Sitzungsber. d. Bay. Akad., 1915, 425; Ann. d. Phys., t. 51, 1916, S. 1.
16. W. Wilson: Phil. Mag., t. 29, 1915, S. 795.
17. M. Planck: Die physikalische Structur der Phasenraums, Ann. d. Phys., t. 50, 1916, S. 385.
18. P. S. Epstein: Ann. d. Phys., t. 51, 1916, S. 168.
19. K. Schwarzshild: Sitzungsber. d. Preuss. Akad., 1916, S. 548.
20. P. Ehrenfest: Ann. d. Phys., t. 51, 1916, S. 327.
21. H. Kramers: Zs. f. Phys. t. 13, 1923, S. 312.
22. L. de Broglie: Tentative Theory of Light Quanta, Phil. Mag. and Journ. of Science, XLVII, No. CCLXXVIII, 446 (1924).
23. E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. d. Phys., 79, No. 4, 1926, S. 631.
24. Сб. Современная квантовая механика, ГТТИ, 1934, статья Э. Шредингера " Основная идея волновой механики ", стр. 47-48.

(譯自 Вариационные Принципы Механики, 850-862 頁)

申 維 南 原 理

Г. Ю. Джанелидзе 著　　王則明譯

引 言

1955 年是申维南发表他提出的载荷施加靜力等效原理的一百周年[18]。事实上他于 1853 年 6 月 13 日已在法国科学院作过有关这一原理的报告。

本文系作者于 1954 年 12 月 26 日在全苏弹性理论、塑性理论、结构力学会议上所宣读的报告，经整理补充后发表的。

在申维南的论文[18]里，他所叙述的已不是关于《棱柱杆的其余长度》了，而是断言了这原理除了非常邻近于力作用点以外都是正确的。至于建立这原理的根据，申维南初期仅仅引证了令人信服的简单实验。他指出，设一长橡皮带，垂直于带长且作用于带长某处的两对边有共线的压力，则橡皮带所经受的仅为局部应力与变形。

在他的晚年，当他和弗来曼共同翻译克莱布希 (Clebsch) 著作[12]的法文译本时，在附注中转载了布西涅斯克(Boussinesq)在 1871～1879 年内所作关于这原理对长杆的证明。

1885 年，布西涅斯克最先为申维南原理作了一般性叙述：《作用于弹性体的平衡外力系，其作用点限于给定的球形范围内，则离球域距离较之球半径为甚大时，在该点处所引起的变形为可略去的微量。》

布西涅斯克对有关申维南原理的问题极为重视，在他的专著中[2]，专门讨论了这类问题。

布西涅斯克首先考虑了在无限体中，由于数值相等而方向相反的两力作用两邻近点所产生的扰动问题。他指出，在此情况下，由于力传递而引起的扰动，将随着 r^{-3} 而衰减。(r 为所观察的点到力作用区域的距离。)后来他又对有关力矩的传递问题得到了类似的估值，指出，在此情况下，对于无限体来说，其衰减率也是 r^{-3}。

布西涅斯克所得到的最重要的结果，是关于半无限空间 $z>0$，在它的表面 $z=0$ 上某一平面域 $\xi^2+\eta^2<\varepsilon^2$ 内的点，作用有法向力的问题。他查明了在这个问题中，当合力为零时，所引起半无限体内各点的应力，有 ε^1 的量级，而当合力矩为零时，量级为 ε^2。

关于有限尺寸的物体，布西涅斯克仅指出，由于靜力等效于零的力系所引起的应力，应随距离的增加而迅速衰减。

如上所述，在布西涅斯克的论文中，不过是将申维南原理加以推广，不能认为已对三向有限物体的一般情况，作出了证明。

此后一段较长时期，所有从事这方面的研究工作者，广泛应用了这一原理，但都没有对这原理所赖以建立的基础，予以应有的注意。甚至在勒夫(Love)的经典著作[13]中，实质上也

仅仅是重复了这一原理。

事实上所有教科书，都把申维南原理看作是一条不证自明的定理。

尽管在较新的教科书中，如邦考维奇（Папкович）所著一书[15]，已经认识到证明这一原理的必要性，不过说：此原理在一般形式上尚未得到证明。但它的正确性却不应有任何怀疑。它首先为申维南所提出，看作一项先验的原理。

在二十年代，申维南原理又开始引起了人们的注意，尝试为这原理寻找能量理论根据。

在三十年代中，提出了申维南原理不适用于极为简化的弹性系统的论点[4]。

从四十年代起，由于开辟了对申维南原理的新途径，而有着显著的进展；这就是将申维南原理的陈述明确化并加以修正[14],[20],[21]。

最近，又出现了将申维南原理应用于动力问题[1]以及应用于塑性理论问题的研究。

目前，申维南原理的研究已相当完备，可对其中主要文献加以评论，总结有关证明此原理的问题，并介绍一系列成果，以供编写教材或课堂讲授时的参考。

一、申維南原理的能量証明

1923 年，苏思维尔（R. Southwell）应用卡思奇梁诺（Castigliano）理论，为申维南原理作出了具有定性意义的最初的能量证明[16,17]。

关于较详细形式的能量证明，则在卓那波尼（Zanaboni）的研究[10,11]中有所发展。

兹将能量证明的主要之点叙述如下：

考虑在平衡的外力系作用下一物体 A_1，以及沿物体 A_1 某自由表面事先联接有另一无初始载荷的物体 A_2。现要证明，物体 A_1+A_2 的势能，将小于物体 A_1 在联接以前的势能。类似地可以组成物体 $A_1+A_2+\cdots+A_n$，在此组成物体的一小部分 A_1 上，受有自相平衡的外力系。利用上述的估值可以推断，附加的物体 A_k，A_{k+1}，…，A_n，当 K 足够大时，只含有物体全部变形势能的微小部分。由此可见，对于应力和变形，仅限于在积分意义上的衰减。

现在我们来进行详细的证明（图 1）。当联接物体 A_1 和 A_2 为一连续的物体 A_1+A_2 时，在原来不受外力的联接表面上引起了自相平衡的力系 $\vec{R}_{12}$。物体 A_{1+2} 的变形势能 Π_{1+2} 和物体 A_1 的势能 Π_1 相差的数量为 $\Pi_1(\vec{R}_{12})+\Pi_2(\vec{R}_{12})+W_1(\vec{R}_{12})$，这里 $\Pi_1(\vec{R}_{12})$ 为无外力 $\vec{F}$ 时由力 $\vec{R}_{12}$ 所引起物体 A_1 的变形能；$\Pi_2(\vec{R}_{12})$ 为由力 $\vec{R}_{12}$ 所引起物体 A_2 的变形能；$W_1(\vec{R}_{12})$ 为力 $\vec{R}_{12}$ 在力 $\vec{F}$ 所引起于物体 A_1 内的位移上所作的功。

于是：

$$\Pi_{1+2}(\vec{F})=\Pi_1(\vec{F})+\Pi_1(\vec{R}_{12})+\Pi_2(\vec{R}_{12})+ \\ +W_1(\vec{R}_{12}) \qquad (1)$$

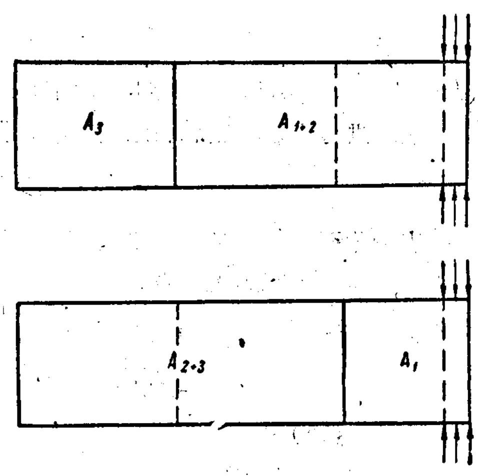

图 1　能量証明示意图