

大 学 数 学 辅 导 系 列 丛 书

概率统计辅导

陈魁 编



清华大学出版社

大 学 数 学 辅 导 系

概率统计辅导

陈魁 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

《概率统计辅导》是高等学校概率论与数理统计课程的辅导教材,按通常的教学顺序编写.共分8章,最后附总练习.前5章为概率论,后3章为数理统计.每章分成若干节,各节基本上都分内容提要、例题分析、习题3部分.每章后对本章的习题做统一解答,内容丰富,学必有益.

本书供在校大学生使用.也可供报考硕士研究生和MBA的考生复习用,同时还可供渴望吸取概率统计知识的科研人员、工程技术人员和教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导/陈魁编. --北京:清华大学出版社,2004

(大学数学辅导系列丛书)

ISBN 7-302-07969-2

I. 概… II. 陈… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第003404号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客 户 服 务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

印 刷 者: 北京市清华园胶印厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 140×203 印 张: 17.75 字 数: 445 千字

版 次: 2004年6月第1版 2004年6月第1次印刷

书 号: ISBN 7-302-07969-2/O·342

印 数: 1~5000

定 价: 25.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换.联系电话:(010)62770175 3103 或(010)62795704

序 言

当前,高等学校的理工科、医科、经济管理甚至有些文科专业都设置了概率统计课程,工科硕士研究生和 MBA 的入学考试数学试题中,也都要求相应的概率统计内容.为了帮助大学生和有关人员学好这门课程,掌握这些知识,迫切需要有一本合适的辅导教材,基于这个目的,本人编写了这本书.

大约在 20 多年前及 10 多年前,我系教师先后分别编写了《高等数学辅导》,《线性代数辅导》,这本《概率统计辅导》与前两本书组成数学辅导系列出版,对读者肯定是一件有益的事情.

本书共分 8 章,包括了概率统计课程的全部基本内容.全书共选择例题分析题 160 多个,这些题中有基本概念的运用题,有基本方法的训练题,有一题多解的开扩思路题,也有较灵活的综合题,还有不少联系实际的应用题.这些题都给读者提供了多方面的解决问题的方法,对巩固概念、掌握方法、提高分析问题和解决问题的能力,都会有所帮助.

全书共给出练习题约 300 个,这些题内容全面,类型多样.为了帮助读者更好地学习这些知识,掌握这些内容,大部分习题都给了解答,有的还给出了不止一种解法.希望读者对每道题都先自己做,做出来或实在做不出来时再看解答.这样经过与习题解答的比较,才能找出并深刻认识自己的问题或不足,真正提高自己的能力.编者相信,独立完成或在习题解答的帮助下完成这些习题,都会使读者有很大的收益.

序言

希望本书的出版能对读者有一定的帮助。由于水平所限,定有不妥或错误,恳请读者批评指正。

编者

2003年5月于清华园

编者的话

——谈如何学习概率统计

不少人特别是初学者总感到概率统计难学,不知怎样才能学好,摸不着头绪,比较着急.有人还问:学概率统计有什么窍门?总之,都渴望得到一种好的学习方法,从而学好概率统计.

概率论是研究随机现象的统计规律性的数学学科.由于问题的随机性,从这个意义上讲,也可以说有点儿难学.这正是不少人害怕概率的原因.但随机现象是有规律可循的,概率论正是研究它的这种规律性的,只要抓住它的规律,概率论也就不难学了.

学习概率统计要抓三个基本:基本概念、基本方法、基本技巧.

基本概念包括基本定义、基本原理和定理.特别要注意如何将实际问题化成概率模型.这就要求对实际问题的性质、特点和概率论的概念都有充分的了解和认识,这样才能将两者互相联系起来,建立起实际问题的数学模型,然后用概率论的方法解决问题.

基本方法包括基本的分析问题的方法、基本公式和基本的计算方法,这是解决问题必不可少的.它建立在对基本概念充分理解和掌握的基础上,什么样的模型用什么样的方法,这是必须搞清的.

基本技巧,实际上就是灵活巧妙地解决问题的某些方法.基本方法运用掌握得好,也能总结出一些基本技巧.基本技巧对提高学习效率是有好处的.

学习概率统计的方法要注意三多:多思、多练、多比.

多思:就是多想,多动脑筋,包括从多方面想.问题多是比较复杂的,只有多思多想,从多方面想,正着想,反着想,反复地想,才

能悟出问题的实质。

多练：多练的直接意思是多做题，做足够数量的题目，特别是不同类型的题目。必须有足够的数量，才能达到对问题的深刻理解，才能牢固地掌握问题的本质，才能熟练地掌握解决问题的方法，熟能生巧，但多练时也要多思多想，光练不想是不行的。这里要特别提出“一题多解”的方法，就是一个题目要尽量多想出一些不同的方法来解决。这是一种效率高、效果好的学习方法，对提高能力、开发智力大有好处。多练时还要多总结、及时总结。

多比：多比就是多比较。同类型问题的比较，不同类型问题的比较，自己的方法和书上比较，和老师比较，和同学比较，等等，总之，可多方面比较，有比较才有鉴别，有比较才能提高。这里要特别提一下“模仿”。模仿是一种方法，也是一种能力，特别对初学者模仿是很必要、很重要的。通过模仿，引你入门，通过模仿掌握方法。当然，光模仿是不行的，要通过模仿学到知识，提高能力，达到能自主解决问题的程度。

“三个基本”和“三多”也是密切相连的，要掌握三个基本必须经过三多。基本概念要多思多想才能深刻的认识，也要多练多比才能得到加深和巩固；基本方法、基本技巧经过多练才能掌握，多练过程中也要多想多比才能掌握得更牢固，进而还可能提出更好的方法。

总之，“三多”是掌握“三个基本”的好方法。紧紧抓住“三个基本”，充分利用“三多”，就一定能把概率统计学好。

希望这简短的说明，能对读者有所帮助。

编者

目 录

第 1 章	随机事件及其概率	1
1.1	随机事件和样本空间	1
1.1.1	内容提要	1
1.1.2	例题分析	4
1.1.3	习题	8
1.2	随机事件的概率	10
1.2.1	内容提要	10
1.2.2	例题分析	13
1.2.3	习题	19
1.3	条件概率	20
1.3.1	内容提要	20
1.3.2	例题分析	22
1.3.3	习题	32
1.4	事件的独立性	35
1.4.1	内容提要	35
1.4.2	例题分析	36
1.4.3	习题	43
1.5	习题解答	46
第 2 章	随机变量及其分布	67
2.1	离散型随机变量的概率分布	67
2.1.1	内容提要	67
2.1.2	例题分析	69
2.1.3	习题	85
2.2	随机变量的分布函数	89

目录

2.2.1	内容提要	89
2.2.2	例题分析	91
2.2.3	习题	94
2.3	连续型随机变量的概率分布	95
2.3.1	内容提要	95
2.3.2	例题分析	99
2.3.3	习题	119
2.4	函数的分布	123
2.4.1	内容提要	123
2.4.2	例题分析	124
2.4.3	习题	139
2.5	习题解答	141
第3章	二维随机变量	197
3.1	二维随机变量的分布	197
3.1.1	内容提要	197
3.1.2	例题分析	202
3.1.3	习题	232
3.2	二维随机变量函数的分布	236
3.2.1	内容提要	236
3.2.2	例题分析	238
3.2.3	习题	255
3.3	习题解答	258
第4章	随机变量的数字特征	298
4.1	数学期望与方差	298
4.1.1	内容提要	298
4.1.2	例题分析	302
4.1.3	习题	320

4.2	二维随机变量的协方差和相关系数	324
4.2.1	内容提要	324
4.2.2	例题分析	328
4.2.3	习题	348
4.3	习题解答	350
第5章	极限定理	381
5.1	大数定律	381
5.1.1	内容提要	381
5.1.2	例题分析	382
5.1.3	习题	386
5.2	中心极限定理	386
5.2.1	内容提要	386
5.2.2	例题分析	388
5.2.3	习题	395
5.3	习题解答	397
第6章	样本及抽样分布	407
6.1	随机样本	407
6.1.1	内容提要	407
6.1.2	例题分析	409
6.1.3	习题	412
6.2	抽样分布	413
6.2.1	内容提要	413
6.2.2	例题分析	417
6.2.3	习题	424
6.3	习题解答	425
第7章	参数估计	435
7.1	参数的点估计	435

目录

7.1.1	内容提要	435
7.1.2	例题分析	437
7.1.3	习题	450
7.2	参数的区间估计	452
7.2.1	内容提要	452
7.2.2	例题分析	457
7.2.3	习题	461
7.3	习题解答	463
第8章	假设检验	480
8.1	正态总体参数的假设检验	480
8.1.1	内容提要	480
8.1.2	例题分析	483
8.1.3	习题	489
8.2	两正态总体参数的假设检验	492
8.2.1	内容提要	492
8.2.2	例题分析	495
8.2.3	习题	498
8.3	(0-1)分布参数 p 的假设检验	499
8.3.1	内容提要	499
8.3.2	例题分析	499
8.3.3	习题	504
8.4	两类错误大小分析	504
8.4.1	内容提要	504
8.4.2	例题分析	505
8.4.3	习题	507
8.5	χ^2 检验法(总体分布函数的假设检验)	508
8.5.1	内容提要	508

目录

8.5.2 例题分析.....	509
8.6 习题解答	513
总练习题.....	527
练习题.....	527
习题解答.....	532

第 1 章 随机事件及其概率

1.1 随机事件和样本空间

1.1.1 内容提要

1 随机现象

世界上有各种各样的现象. 在一定条件下, 可能发生, 也可能不发生的现象叫随机现象. 它具有两个特点:

(1) 在一次观察中, 现象可能发生, 也可能不发生, 即结果呈现不确定性;

(2) 在大量重复观察中, 其结果具有统计规律性.

概率论就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

2 随机试验

观察随机现象的, 具有以下几个特点的试验叫随机试验.

(1) 试验具有明确的目的;

(2) 在相同条件下可以重复进行;

(3) 试验的结果不止一个, 所有结果事先都能明确指出来;

(4) 每次试验之前, 不能确定会出现哪个结果.

随机试验通常用字母 E 表示.

3 随机事件

在随机试验 E 中, 所有可能出现(或称发生)的结果都叫随机事件. 随机事件用大写字母 A, B, C 等表示.

随机事件有以下几类:

(1) 基本事件: 最简单的不能再分的事件叫基本事件. 一般

第 1 章 随机事件及其概率

用 e_i 或 ω_i 表示;

(2) 复合事件: 由至少两个基本事件构成的事件叫复合事件. 复合事件是若干个基本事件的集合事件;

(3) 必然事件: 在随机试验 E 中, 必然出现的事件叫必然事件;

(4) 不可能事件: 在随机试验 E 中, 不可能出现的事件叫不可能事件;

后两个事件是确定性的事件, 并不是随机事件. 为了研究问题的方便, 把它们归入随机事件, 作为随机事件的两个特殊情况.

4 样本空间

(1) 样本点: 在 E 中, 基本事件叫样本点;

(2) 样本空间: 在 E 中, 全体样本点的集合叫样本空间, 记作 Ω .

样本空间有 3 种类型:

(1) 有限集合: 样本空间中的样本点的个数是有限的;

(2) 无限可列集合: 样本空间中样本点的个数是无限的, 但可以一一列出来;

(3) 无限不可列集合: 样本空间中样本点的个数是无限的, 又不能列出来.

5 事件之间的关系(见图 1.1)

(1) 包含关系: 设有事件 A, B , 若由 B 发生必然导致 A 发生, 则称 A 包含 B , 或说 B 包含于 A , 记为 $A \supset B$. 任何事件都包含于 Ω .

(2) 相等关系: 若 $A \supset B$, 同时 $B \supset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

(3) 事件的并(和): 设有事件 A, B, C , 若 A, B 中至少一个发生时, C 就发生, 则称 C 是 A 与 B 的并(和), 记为 $C = A \cup B$.

1.1 随机事件和样本空间

n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的并(和)记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$. 无穷可列个事件的并记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

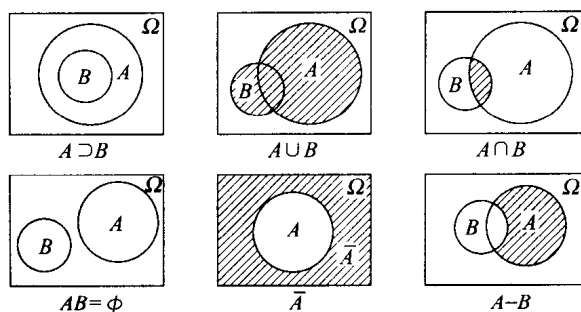


图 1.1

(4) 事件的交(积): 若 A, B 同时发生时, C 才发生, 则称 C 为 A, B 的交(积), 记为 $C = A \cap B = AB$.

n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的交(积)记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 无穷可列个事件的交记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 互不相容(互斥)事件: 若 A, B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称 A, B 为互不相容事件, 又称互斥事件. 任何两个不同的基本事件为互斥事件.

(6) 对立事件: 若 $AB = \emptyset$, 且 $A \cup B = \Omega$, 则称 A, B 互为对立事件, 记为 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$. \bar{A} 是 A 的对立事件. \bar{A} 可读作“ A 非”或“非 A ”.

(7) 事件的差: $A - B = A - AB = A\bar{B}$.

6 事件的运算

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

(2) 结合律: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

第 1 章 随机事件及其概率

$$ABC = (AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC,$

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4) 德摩根律(又叫对偶律):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

对 n 个事件有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

分别读作“并的非等于非的交”及“交的非等于非的并”。

1.1.2 例题分析

例 1.1 对下面的 3 个随机试验,确定它们的样本空间:

(1) E_1 : 掷一个均匀的骰子,观察朝上一面出现的点数;

(2) E_2 : 某人射击一个目标,若击中目标,射击就停止,记录射击的次数;

(3) E_3 : 任取一支灯管,连续使用,直到损坏为止,记录它的寿命.

解 确定随机试验的样本空间是概率论的基本问题,也是重要问题.做法是:先分析基本事件,如果可以列出就把它列出来,它的全体就是样本空间.

(1) E_1 中,因为骰子是六面体,基本事件共有 6 个: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 所以样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 这是有限型样本空间.

(2) E_2 中,因为射击是一次一次地进行的,若击中目标,不再进行下次射击,若未击中目标,射击就要进行下去,因此它的基本事件为 1, 2, 3, \dots , 所以样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$. 这是无限可列型样本空间.

(3) E_3 中,寿命是用时间表示的,时间是连续的,是不可列的.因此它的样本空间表示为: $\Omega = \{t | t \geq 0\}$, 这是无限不可列型

1.1 随机事件和样本空间

样本空间.

例 1.2 在例 1.1 的 E_1 中.

(1) 设事件 A 表示“出现奇数点”,事件 B 表示“点数小于 5”,事件 C 表示“大于 3 的偶数点”,试用集合表示下列事件: $A \cup B$, $A \cup B \cup \bar{C}$, AB , $A - B$, ABC ;

(2) 对 A, B 验证德摩根律.

解 本题采用列举法解之. 例 1.1 中已写出: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 由题意知: $A = \{1, 3, 5\}$, $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{5, 6\}$, $C = \{4, 6\}$, $\bar{C} = \{1, 2, 3, 5\}$.

$$(1) A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$A \cup B \cup \bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$AB = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3\};$$

$$A - B = A\bar{B} = \{1, 3, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\};$$

$$ABC = \{1, 3\} \cap \{4, 6\} = \emptyset.$$

(2) 由(1)知 $\overline{A \cup B} = \{6\}$, 又 $\bar{A}\bar{B} = \{2, 4, 6\} \cap \{5, 6\} = \{6\}$, 所以很明显看出 $\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$;

又由(1)知 $\overline{AB} = \{2, 4, 5, 6\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \{2, 4, 6\} \cup \{5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$, 很明显看出 $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

例 1.3 考察居民对 3 种报纸 A, B, C 的订购情况. 设事件 A, B, C 分别表示订购报纸 A, B, C , 试表示下列事件: (1) 只订购 A ; (2) 只订购 A 及 B ; (3) 只订购 A 或 B ; (4) 只订购一种报纸; (5) 正好订 2 种报纸; (6) 至少订 1 种报纸; (7) 不订任何报纸.

解 首先要正确理解各个事件的含意, 在这个基础上, 不难写出各个事件: (1) $A\bar{B}\bar{C}$; (2) $AB\bar{C}$; (3) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C}$; (4) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$; (5) $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$; (6) $A \cup B \cup C$; (7) $\overline{A \cup B \cup C}$.

例 1.4 设 A, B, C 表示 3 个非空随机事件, 试将下列事件用 A, B, C 的运算关系表示出来.