教案·学案一体化

全品图书 CHAMPION

教与学整体设计

JIAO YU XUE ZHENGTI SHEJI

第三版

教师用书

北京全品教育研究所 组编

高中数学

第二册（上）

高二上学期用

教案学案一体化

教与学 整体设计

JIAO YU XUE ZHENG TI SHE JI

教师用书

高中数学

第二册(上)

主　编：陆斌

·第三次修订版·

宁夏人民教育出版社
學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

教与学整体设计．高中数学．第二册．上/张国声主编．
—银川：宁夏人民教育出版社，2002．8

ISBN 7－80596－545－5

Ⅰ．教…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047704 号

高中数学(第二册　上)

责任编辑	马　璟
封面设计	赵卫庆　吴　涛
版式设计	王立科
责任校对	谢文华
责任印制	来学军
出版发行	宁夏人民教育出版社　学苑出版社
地　　址	银川市解放西街 47 号
网　　址	www.nx－cb.com
电子信箱	nrs@public.yc.nx.cn
经　　销	新华书店
印　　刷	三河鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司
开　　本	850×1168　大 1/16
印　　张	11.375
字　　数	327 千字
版　　次	2004 年 5 月第 3 版
印　　次	2004 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	10 001—20 000 册
书　　号	ISBN 7－80596－545－5/G·515
定　　价	14.00 元

编委会名单

走进课堂　师生互动　增强实效
——代前言

《教与学整体设计》系列丛书是一套影响较大的教辅用书，该书通过教与学整体设计，展示了课堂教学中师生互动模板，并提供了同步教辅中少有的资料和精到的习题，赢得了广大读者的喜爱。《中国教育报》曾以专题报道的形式，介绍该套丛书，称该套丛书"发现一种提高课堂教学效率的有效载体"。2004 年秋季，在我国基础教育新课程理念指导下，作了一次较大规模的修订，它将以全新的面貌，迎接新课程理念的挑战。其指导思想表现在以下几个方面：

一、课程与教学的有机整合

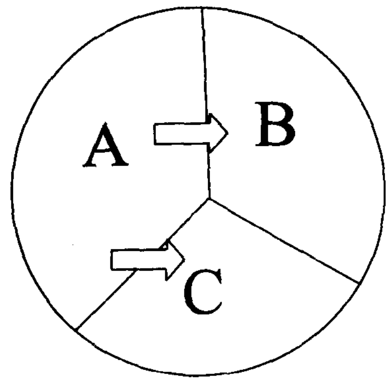
教育学上关于课程与教学的关系有个不断争论、不断发展的过程。多年来的争论是：是教学论包括课程论（以夸美纽斯的"大教学论"为代表），还是教学论从属于课程论（以西方教育发达国家的"大课程观"为代表）？

1985 年中共中央发布了《关于教育体制改革的决定》，课程问题受到越来越多的重视。近年来我国学者进一步认识到，课程是教育的目的和培养目标的基本体现，教学则是以课程为依据而展开的。从当代发展情况看，原来占主导地位的大教学观已经衰落，而"课程包含教学"的大课程观正被广泛认同。这次基础教育课程改革体现的就是大课程观的理念。

《教与学整体设计》系列丛书设计的是"运作的课程"，即课堂上实际实施的课程，也可称作"体验课程"，《教与学整体设计》系列丛书设计的教学内容不再只是特定知识的载体，而是教师和学生共同探求新知的过程，教师和学生是课程的有机构成部分并作为相互作用的主体。教师即课程，教师不是孤立于课程之外，而是课程的有机构成部分、课程的创造者、课程的主体；学生同样是课程的创造者和主体。《丛书》强调师生互动，并创制了有效的互动教学平台。教学与课程相互转化，相互促进，彼此有机地融为一体。课程也由此变成一种动态的、生长性的"生态系统"和完整文化。

二、对课堂教学的有效控制

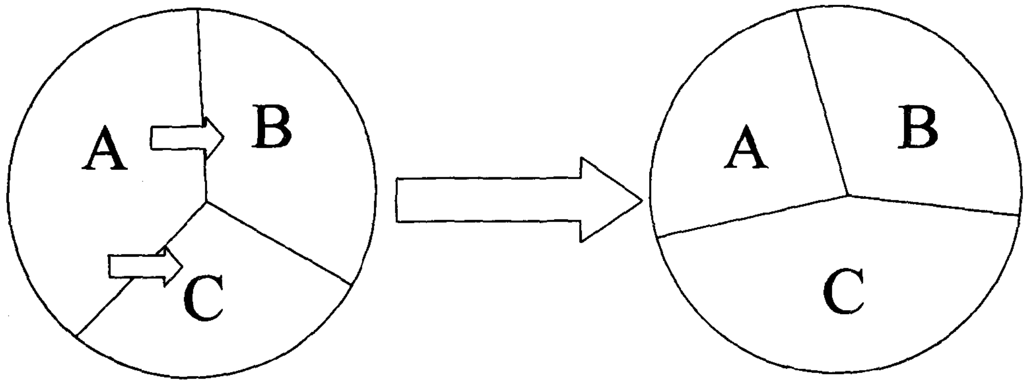
在课堂中，课程的接受知识大体包括三个方面（如下图）：A 型，教科书及教学参考书提供的知识；B 型，教师个人的知识；C 型，师生互动产生的新知识。按新课程理念的要求，教科书提供的知识要最大限度引发向教师个人知识及师生互动产生新知识的变化。从而使课程授受知识的 A 型、B 型 C 型三者的比例发生了变化。其中决定因素是教师的控制方式。



（A：教科书提供的知识；B：教师个人的知识；C：师生互动产生的新知识）

《教与学整体设计》系列丛书，将为教师设计采取"非结构""开放式"的控制方式，

特别注重学生的创新品质的培养，因而，A 的比例相对较少，B + C 比较大。这样一种“控制方式”是对传统“权力型社会控制方式”的挑战，是生成式、可持续发展的。（如下图所示）



三、个性化教学的平台

世界上没有两片相同的树叶，也没有两个完全相同的学生。传统“一元化的教育”，用相同的课程和教材来教学生，用统一的标准化的试题来考核评价学生，漠视学生个性和发展潜能。

学校应为学生的个性发展从课程设置方面提供帮助。在教学方面要强调每个学生都有独特的心理结构，都有自己的智力强项，都有自己学习网络。《教与学整体设计》系列丛书就为教师根据不同的学生的智力特点设计了有效的课时教学方案，最大限度地提高课堂教学的效率，从而实现课堂教学方式的最优化。

同时，今年的《教与学整体设计》丛书在形式上大胆创新，分《教与学整体设计》（教师用书）、《教与学整体设计》（学生用书）、《教与学整体设计》（学生练考卷）三部分。

教师用书修订本着“创新一点，实用一点”两点总原则，增加新教材教师培训的内容。该内容包括充实了相关的教学论文、教研信息、材料，每一单元后增加教学反馈、评估的内容，即为教师提供在本单元、本章节教学中教学目标如何达成，如何制作量表、如何检测学生学习能力达成的情况，以及如何指导学生撰写小论文等栏目。教师用书修订过程中还补充了新题型、新情景、新材料，修正原书中存在的问题，并把教材最新补充部分得到充分体现。

从而更加注重优化教学过程，凸现高中新课程的思想和理念。

学生用书是在《教师用书》修订完后，分离出来的。学生用书同步于教师用书，同时又能独立成书，保持了学生用书的完整性。同时，学生用书保留了原丛书的核心内容，例如师生互动栏目，在教师用书中，以教师为中心展开。在学生用书中则以学生听课笔记的形式展开，强调学生“学”的过程，可把相关材料转化为提问、填空，或其他相关情景。其余栏目则是同步替下，如课时作业、单元资料。其中背景资料部分，教师用书更加充实，学生用书则更加精简。

《综合测试卷》包括单元卷、月考卷（阶段性测试卷）、期中期末卷。总量控制在 20 套以下。经过作者精心创作，充分体现试卷的科学性、实用性、新颖性、原创性等几大要素。

该套丛书由江苏省启东中学一线资深教师开发研制，有很强的前瞻性、实用性和针对性。同时，由于时间及作者本身认识和教学实践水平所限，本丛书定有不足和疏漏之处，恳请广大读者提出批评和修改意见。

编　者

2004.6

目 录

第六章　不等式

一、本章教学内容

本章教材是在初中介绍了不等式的概念，学习了一元一次不等式，一元一次不等式组的解法，高一学习了一元二次不等式，简单的分式不等式和含绝对值不等式的解法的基础上，研究不等式的性质，不等式的证明和一些不等式的解法.

不等式与数、式、方程、函数、三角等内容有密切的联系. 讨论方程或方程组的解的情况，研究函数的定义域、值域、单调性、最大值、最小值，讨论线性规划问题等，都要经常用到不等式的知识. 不等式在解决各类实际问题时也有广泛的应用. 可见，不等式在中学数学里占有重要地位，是进一步学习数学的基础知识.

本章教材内容分为五部分。第一部分讲不等式的性质. 首先通过数轴表示数，给出了比较实数大小的方法，在这基础上，给出了不等式的性质，一共讲了五个定理和三个推论，并给出了证明. 不等式的其他性质，都可由它们推导出来. 第二部分讲算术平均数与几何平均数. 教科书首先证明了一个重要的不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，通过这一公式，得出了两个正数的算术平均数与几何平均数的定理，最后，通过几个例题，说明此定理在解决数学问题和实际问题中的应用. 第三部分讲不等式的证明. 通过七个例题，分别介绍了证明不等式的三种基本方法——比较法、综合法和分析法. 第四部分举例介绍不等式的解法. 通过例题，复习、总结了一元二次不等式、一元二次不等式组、含绝对值不等式、简单高次不等式和分式不等式的解法. 第五部分讲含绝对值不等式. 在这一部分里，介绍了含绝对值不等式的一个定理及其证明，并给出它的两个推论，在例题中，介绍了它们的应用.

二、本章教学目标

1　理解不等式的性质及其证明.

2　掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用.

3　掌握用分析法、综合法、比较法证明简单的不等式.

4　掌握某些简单不等式的解法.

5　理解不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

6　通过不等式的一些应用，使学生进一步理解在现实世界中的量之间，不等是普遍的、绝对的，相等则是局部的、相对的，从而对学生进行辩证唯物主义教育.

7　重视知识的内在联系，形成科学的学习方法，注重培养学生的思维能力、运算能力和分析问题解决问题的能力.

8　密切联系生活和生产实际，实现理论与实践的高度统一，重视培养学生运用数学的意识.

三、本章教学重点

不等式的证明和不等式的解法.

四、本章教学难点

不等式的证明.

五、本章教学建议

1　要注意运用对比的方法，反复比较相近的概念、性质和公式，帮助学生对不等式性质、不等式证法和解法的理解和记忆.

2　在解决不等式证明和不等式解决问题时，还要注意从已有的知识出发，加强新旧知识的内在联系，讲清思路，注意推理的层次，启发学生探索解题的途径，培养学生的观察、分析、归纳、推理及论证能力，全面提高学生的数学能力和数学素质.

六、本章课时分配

内　　容	课　　时
6.1 不等式的性质	2
6.2 算术平均数与几何平均数	3
6.3 不等式的证明	6
6.4 不等式的解法举例	2
6.5 含有绝对值的不等式	1
第六章复习与验收	2

6.1 不等式的性质(第一课时)

一、教学内容分析

1 本小节内容包括比较实数大小的方法,不等式的性质、推论及其证明.

2 在讲对于任意两个实数 a,b,都有

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$,

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$,

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

时,应指出上面等价符号的左式反映的是实数的运算性质,右式反映的则是实数的大小顺序,合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系.它是不等式这一章内容的理论基础,是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.因此,在教学时必须高度重视.

比较两个实数 a 与 b 的大小,归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号,至于差的值究竟是多少,在这里无关紧要),而这又必然归结到实数运算的符号法则.因此,实数运算的符号法则是学习不等式的基础,可以根据实际情况作简要的复习.

3 本节的例1和例2是比较两个代数式的大小.教学时应指出,比较两个代数式的大小,实际上是比较它们的值的大小,而这又归结为判断它们的差的符号。在讲这两个例题时,一定要说明代数式字母的取值范围,取值范围是实数集的可以省略不写,但最好强调一下,提醒学生不要忘记字母的取值范围.例3~例5进一步阐述比较两个代数式的大小方法.

4 关于 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 的含义.

$a>b$ 或 $a<b$,表示严格的不等式.

$a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$,表示非严格的不等式.

不等式 $a\geqslant b$ 读作"a 大于或者等于 b",其含义是指"或者 $a>b$,或者 $a=b$",等价于"a 不小于 b 即若 $a>b$ 或 $a=b$ 中,有一个正确,则 $a\geqslant b$ 正确.

不等式 $a\leqslant b$ 读作"a 小于或者等于 b",其含义是指"或者 $a<b$,或者 $a=b$",等价于"a 不大于 b 即若 $a<b$ 或 $a=b$ 中,有一个正确,则 $a\leqslant b$ 正确.

二、教学目标概览

1 了解比较两个实数(代数式)大小的方法.理解比较两个实数(代数式)大小的数学思维过程.

2 培养学生对数学知识的理解能力、应用能力及论证能力.

三、聚焦重点难点

重点是实数的基本性质.

难点是实数的基本性质的应用.

四、教与学师生互动

创设情境:

1 实数与数轴上的点是一一对应的.

2 两个实数的大小在数轴上得到直观的体现.(画图示意)

3 由图可知,若 $a>b$,则 $a-b$ 是正数;逆命题也成立.

双向沟通:

1. 实数的运算性质与大小顺序之间的关系.

(1)组织、引导学生推出实数的运算性质与大小顺序之间的关系:

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;

$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;

$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

(2)小结:上述关系是比较两个实数大小的依据.即要比较两个实数大小,只要考察它们的差就可以了.

2. 例题分析

【例1】 比较$(a+3)(a-5)$与$(a+2)(a-4)$的大小.

【分析】 作差比较.

解:$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)=-7<0$,

$\therefore (a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

【例2】 已知 $x\neq0$,比较$(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

【分析】 作差比较.

解:$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1=x^2$.

由 $x\neq0$,得 $x^2>0$,从而$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

【思考】 当去掉条件 $x\neq0$ 时,则大小关系如何?

【例3】 设 $a>0,b>0,n\in\mathbf{N}_+$,且 $n\neq1$,比较 a^n+b^n 与 $a^{n-1}b+ab^{n-1}$的大小.

【分析】 作差比较.

解:$a^n+b^n-(a^{n-1}b+ab^{n-1})=a^{n-1}(a-b)+b^{n-1}(b-a)=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$,

当 $a>b>0$ 时,$a^{n-1}>b^{n-1}$,$a-b>0$,则$(a-b)(a^{n-1}$

$-b^{n-1})>0$, $\therefore a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}$;

当 $0<a<b$ 时, $a^{n-1}<b^{n-1}$, $a-b<0$, 则 $(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})>0$, $\therefore a^n+b^n>a^{n-1}b+ab^{n-1}$.

当 $a=b$ 时, $(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})=0$　$\therefore a^n+b^n=a^{n-1}b+ab^{n-1}$

【总结】 比较两个实数(代数式)大小的思维过程是:作差→变形→判断符号→结论.

【例4】 已知 a,b,m,n 都是正实数,且 $m+n=1$,比较 $\sqrt{ma+nb}$ 与 $m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$ 的大小.

【分析】 当直接作差比较有困难时,可考虑比较它们的平方的大小.

解: $\because m+n=1$ 且 $(\sqrt{ma+nb})^2-(m\sqrt{a}+n\sqrt{b})^2=ma+nb-(m^2a+n^2b+2mn\sqrt{ab})$

$=ma(1-m)+nb(1-n)-2mn\sqrt{ab}=mn(a-2\sqrt{ab}+b)=mn(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$,

$\therefore \sqrt{ma+nb}\geqslant m\sqrt{a}+n\sqrt{b}$.

【例5】 已知 $a>1$, $m>n>0$, 试比较 $a^m+\frac{1}{a^m}$ 与 $a^n+\frac{1}{a^n}$ 的大小.

【分析】 作差比较.

解: $(a^m+\frac{1}{a^m})-(a^n+\frac{1}{a^n})=(a^m-a^n)+(\frac{1}{a^m}-\frac{1}{a^n})$

$=(a^m-a^n)+\frac{a^n-a^m}{a^{m+n}}$

$=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}$, $\because a>1$, $m>n>0$, $\therefore a^m>a^n$, $a^{m+n}>1$, 故 $(a^m+\frac{1}{a^m})-(a^n+\frac{1}{a^n})>0$,

$\therefore a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$.

【例6】 当 $0<a<b<1$ 时,下列不等式中正确的是　(D)

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　　B. $(1+a)^a>(1+b)^b$

C. $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　D. $(1-a)^a>(1-b)^b$

(1995年上海高考题·理)

【分析】 赋值法.

取 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, 代入验证,选D.

3. 课堂练习

(1)比较 $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小.

$(x+5)(x+7)<(x+6)^2$

(2)如果 $x>0$,比较 $(\sqrt{x}-1)^2$ 与 $(\sqrt{x}+1)^2$ 的大小.

$(\sqrt{x}-1)^2<(\sqrt{x}+1)^2$

(3)已知 $a\neq 0$,比较 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小.

$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

巩固反思:

1. 本节学习的数学知识:________.

2. 本节学习的数学方法:________.

作业解惑:

1. 比较 $(2a+1)(a-3)$ 与 $(a-6)(2a+7)+45$ 的大小.

解: $(2a+1)(a-3)<(a-6)(2a+7)+45$

2. 比较 $(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$ 与 $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$ 的大小.

解: $(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)>\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$

3. 设 $x\geqslant 1$,比较 x^3 与 x^2-x+1 的大小.

解: $x^3\geqslant x^2-x+1$

4. 将例5中条件 $a>1$ 改为 $a>0$,且 $a\neq 1$,解例5.

解: $a^m+\frac{1}{a^m}>a^n+\frac{1}{a^n}$

5. 已知 $x>y>0$,试比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{y}{x}$ 的大小.

解: $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}>\frac{y}{x}$

五、课堂跟踪反馈

1. $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$ 的大小关系是 $(x+5)(x+7)<(x+6)^2$.

2. 若 $a\neq 2$ 或 $b\neq -1$,则 $M=a^2+b^2-4a+2b$ 的值与 -5 的大小关系是　(A)

A. $M>-5$　　B. $M<-5$

C. $M=-5$　　D. 不能确定

3. 若 $f(x)=3x^2-x+1$, $g(x)=2x^2+x-1$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是　(A)

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值变化而变化

六、教学设计说明

(1 本课堂教学设计方案遵循充分尊重学生、相信学生、依靠学生的"主体"教学思想,使学生成为数学学习的主人,而教师则成为学生学习数学的组织者、引导者和合作者。运用助思、助学、助练的启发讨论式教学方法,启动师生交流的"闸门",使教学相长的教学过程真正成为师生间的双向活动.要求教师在备课时,除备常规内容外还要突出地精备学生,要备学生的认知规律、心理活动,要备学生在"触新"时,可能回忆、再现哪些"旧知"?可能萌生哪些"猜想"?在理解、掌握"新知"时可能出现哪些正确的、不正确的;不完全、不严密的思维……设法在"前、后、左、右"给予帮助,这也正是教师"主导"作用的重要所在.

2　概念课的教学是学生发展性目标培养的最有利的场所，教师应抓住机会通过数学学习活动，要使学生对数学与现实世界的联系、数学的探索过程、数学的文化价值以及数学知识的特征有所认识；使学生在兴趣与动机、自信与意志、态度与习惯等方面有所发展；使学生在定量思维、空间观念、合情推理和演绎等方面有所发展；使学生在提出问题、分析问题、解决问题以及交流的反思方面获得发展.

3　本节应着力研究学生的认知规律，教学活动围绕学生展开，教学活动应该是从学生的生活经验和已有的知识背景出发，向他们提供充分的从事数学实践活动和交流的机会，使他们在自主探索的过程中真正理解和掌握基本的数学知识、思想和方法，同时获得广泛的数学活动经验.

4　对于较难的例题与习题处理可根据学生实际酌情使用.

6.1　不等式的性质(第二课时)

一、教学内容分析

1　定理1(反对称性)和定理2(传递性)，学生是容易理解的. 但对它们进行证明，却是比较困难的. 一是学生可能认为没有必要进行证明，二是学生可能不知道如何证明. 为了引起重视，养成学生用逻辑推理进行数学证明的习惯，教学时可以向学生提出如下问题："如果 $a>b$，$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$谁大?"针对学生回答中可能出现的错误，来说明证明的必要性. 然后，可以让学生回顾一下实数的运算性质与大小顺序之间的关系，以及实数运算的符号法则，最后再引导学生进行证明. 这里要使学生明确证明的依据是实数大小的比较与实数运算的符号法则，要引导学生说清每一步推理的理由和关键性步骤.

2　定理3及其推论，学生也是容易理解的. 在这里应该着重向学生指出：

(1)定理3是不等式移项法则的基础；

(2)定理3的推论是同向不等式相加法则的依据. 它是连续两次运用定理3，然后由定理2证出的. 但两个同向不等式的两边分别相减时，就不能作出一般的结论，这点可以举出反例向学生说明；

(3)定理3可以推广到任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向；

此外，定理3的逆命题也正确.

3　定理4有两种不同的结果，学生不易理解，使用时容易出错. 讲解时，可先用具体数，让学生分析比较，得出结论后，再给予一般的证明，对于定理4还必须注意：

(1)其证明过程中的关键步骤是根据"同号相乘得正，异号相乘得负"来完成的；

(2)要强调 c 的符号，因为符号不同，结论也不同；

(3)其中 a,b 可以是实数，也可以是式子，不要在强调 c 的符号时，又使学生误解，从而限制 a,b，缩小了定理的应用范围.

4　定理4的推论1，说明将两边都是正数的两个同向不等式的两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 教学时要强调指出：

(1)它是连续两次运用定理4先后得出 $ac>bc$，$bc>bd$，再用定理2证出的；

(2)所有的字母都表示正数，如果仅有 $a>b$，$c>d$(而不是 $a>b>0$，$c>d>0$)，就推不出 $ac>bd$ 的结论. 同时还要强调，由两个异向不等式，例如 $a>b>0$，$0<c<d$，也推不出 $ac>bd$ 的结论. 这两点可以举出反例向学生说明.

5　定理4的推论2，教科书中没有给出严格的证明，是把它作为推论1的特殊情形给出的. 应注意 n 为大于1的正整数这一条件. 例如，当 $a>b>0$，$n=-1$ 时，$a^{-1}>b^{-1}$不成立.

6　定理5的证明用的是反证法. 因为$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$的反面有两种情形，即$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$和$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就"归谬"了事，而必须进行"穷举"，把这两种情形都否定才能得出$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$正确的结论. 把定理4的推论2和定理5结合起来，还很容易把这一性质推广到正有理指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，s 为正有理数，那么 $a^s>b^s$.

7　本节中的例3和例4是用不等式的性质及其推论来证明的。这可以使学生初步接触不等式的证明，为以后学习不等式的证明打下基础.

讲解这两个例题后，应向学生指出：学完不等式的性质后，就可以利用它们来证明不等式.

8　在不等式性质的教学中，还要注意将不等式的性质与等式的性质进行类比，特别要指出它们之间的区别，这样可避免解题中的一些错误.

不等式性质与等式性质的不同点主要发生在与数相乘(除)时，不等式两边所乘(除)的数的符号不同，结论

是不同的. 应让学生理解这些变化.

二、教学目标概览

1 了解比较两个实数(代数式)大小的方法. 理解比较两个实数(代数式)大小的数学思维过程.

2 理解不等式的性质及推论,掌握不等式的性质和推论的证明方法. 会应用不等式的性质证明简单的不等式.

3 培养学生对数学知识的理解能力、应用能力及论证能力.

三、聚焦重点难点

重点是不等式的性质和推论.

难点是不等式性质的证明.

四、教与学师生互动

复习回顾:

1 实数的基本性质.

2 两个实数(代数式)的大小比较方法.

双向沟通:

1. 不等式的性质

定理1 如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$.

定理2 如果 $a>b$,且 $b>c$,那么 $a>c$.

定理3 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

推论 如果 $a>b$,且 $c>d$,那么 $a+c>b+d$.

定理4 如果 $a>b$,且 $c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b$,且 $c<0$,那么 $ac<bc$.

推论1 如果 $a>b>0$,且 $c>d>0$,那么 $ac>bd$.

推论2 如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}_+$,且 $n>1$).

定理5 如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}_+$,且 $n>1$).

【说明】 以上定理证明一部分可让学生完成,教师帮助学生理清证明思路,在理解基础上记忆这些性质.

2. 例题分析

【例1】 判断下列各命题的真假,说明理由:

(1)如果 $a>b$,那么 $a-c>b-c$;

(2)如果 $a>b$,那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;

(3)如果 $ac<bc$,那么 $a<b$;

(4)如果 $ac^2>bc^2$,那么 $a>b$.

【分析】 判断一个命题的真假的方法是:如果判定命题为真,则必须给出它的证明;如果判定命题为假,只要举出一个反例即可.

解:根据不等式的性质可判定如下:真命题是(1)、(4). 假命题是(2)、(3).

【注意】 本题可让学生完成,教师点拨、点评.

【例2】 回答下列问题:

(1)如果 $a>b,c<d$,能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小?举例说明;

(2)如果 $a>b,c>d$,能否断定 $a-2c$ 与 $b-2d$ 谁大谁小?举例说明.

【分析】 判断一个命题的真假的方法是:如果判定是真命题,则必须给出它的证明;如果判定是假命题,只要举出一个反例即可.

解:(1)不能断定;(2)不能断定. 举例略.

【注意】 本例举例要举出3个例子,使得两代数式的值能体现出大于、小于、相等三种情况.

本题可让学生完成,教师点拨、点评.

【例3】 已知 $a>b,c<d$,求证 $a-c>b-d$.

证明:法一由 $a>b$ 知 $a-b>0$,由 $c<d$ 知 $d-c>0$. $\because (a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$,$\therefore a-c>b-d$.

法二由 $c<d$ 得 $-c>-d$,又 $a>b$,则由定理3的推论可得 $a-c>b-d$.

【例4】 已知 $a>b>0,c<0$,求证 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

证明:$\because a>b>0$,两边同乘以正数 $\frac{1}{ab}$,得 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$,即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 又 $c<0$,$\therefore \frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

【例5】 设 $f(x)=ax^2+c$,且 $-3\leqslant f(1)\leqslant 1$,$-2\leqslant f(2)\leqslant 3$,求 $f(3)$ 的最大值与最小值.

解:$\because f(x)=ax^2+c$,$\therefore \begin{cases}a+c=f(1)\\4a+c=f(2)\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1)\\c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)\end{cases}$ $\therefore f(3)=9a+c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

$\because -2\leqslant f(2)\leqslant 3$,$\therefore -\frac{16}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant 8$. ①

又 $\because -3\leqslant f(1)\leqslant 1$,$\therefore -\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant 5$. ②

①+②,得 $-\frac{16}{3}-\frac{5}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 8+5$,即 $-7\leqslant f(3)\leqslant 13$. $\therefore f(3)$ 的最大值是13,最小值是 -7.

【例6】 "$a+b>2c$"的一个充分条件是 (C)

A. $a>c$ 或 $b>c$ B. $a>c$ 且 $b<c$

C. $a>c$ 且 $b>c$ D. $a>c$ 或 $b<c$

(1993年上海高考题)

【分析】 利用不等式性质判断.

由不等式的基本性质知,$a>c$ 且 $b>c\Rightarrow a+b>2c$,故选C.

3. 课堂练习

(1)回答下列问题:

①如果 $a>b,c>d$,是否可以推出 $ac>bd$?举例说明;

提示:不能推出,举例略.

②如果 $a>b,c<d$,且 $c\neq0,d\neq0$,是否可以推出 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$?举例说明.

提示:不能推出,举例略.

(2)求证:

①如果 $a>b,c>d$,那么 $a-d>b-c$;

证:略

②如果 $a>b,ab>0$,那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

证:略

③如果 $a>b>0,c<d<0$,那么 $ac<bd$;

证:略

④如果 $a>b$,那么 $c-2a<c-2b$.

证:略

巩固反思:

1. 本节学习的数学知识:____________.
2. 本节学习的数学方法:____________.

作业解惑:

1. 用“>”、“<”号填空:

(1)如果 $a>b$,那么 $-a$ __<__ $-b$;

(2)如果 $a<b<0$,那么 $\frac{1}{a}$ __>__ $\frac{1}{b}$;

(3)如果 $a>b>c>0$,那么 $\frac{c}{a}$ __<__ $\frac{c}{b}$;

(4)如果 $0<a<b<1,n\in\mathbf{N}^*$,那么 $\frac{1}{a^n}$ __>__ $\frac{1}{b^n}$ __>__ 1.

2. 求证:

(1)如果 $a>b,e>f,c>0$,那么 $f-ac<e-bc$;

证明(略).

(2)如果 $a>b>0$,那么 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$;

证明(略).

(3)如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

证明(略).

3. 如果 $30<x<42,16<y<24$,求 $x+y,x-2y$ 及 $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

解:由 $30<x<42,16<y<24$,可得

$-48<-2y<-32$,

$\frac{1}{24}<\frac{1}{y}<\frac{1}{16}$.

$\therefore 30+16<x+y<42+24$,

即 $46<x+y<66$;

$30-48<x-2y<42-32$,

即 $-18<x-2y<10$;

$\frac{30}{24}<\frac{x}{y}<\frac{42}{16}$,

即 $\frac{5}{4}<\frac{x}{y}<\frac{21}{8}$.

五、课堂跟踪反馈

1. $a,b\in\mathbf{R}$,下列命题正确的是 (C)

A. 若 $a>b$,则 $a^2>b^2$

B. 若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

C. 若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$

D. 若 $a\neq|b|$,则 $a^2\neq b^2$

2. 若 $a>b$,则下列不等式中恒成立的是 (C)

A. $\frac{a}{b}>1$ B. $\lg a>\lg b$

C. $2^a>2^b$ D. $a^2>b^2$

3. $a>c$ 是 $a^3>c^3$ 的 (C)

A. 必要条件 B. 充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

六、教学设计说明

1 本课堂教学设计方案遵循充分尊重学生、相信学生、依靠学生的“主体”教学思想,使学生成为数学学习的主人,而教师则成为学生学习数学的组织者、引导者和合作者。

2 本节也是一堂概念课,同时也是巩固旧知识、学习新知识的新授课。不等式性质的推导的思想方法的形成对今后不等式性质的应用和不等式证明起到关键作用,也是学生发展性目标培养的最有利的场所。教师应抓住机会,为学生数学学习活动提供丰富素材,目的要使学生对数学与现实世界的联系、数学的探索过程、数学的文化价值以及数学知识的特征有所认识;使学生在兴趣与动机、自信与意志、态度与习惯等方面有所发展;使学生在定量思维、合情推理和演绎等方面有所发展;使学生在提出问题、分析问题、解决问题以及交流的反思方面获得发展。

3 对于较难的例题与习题处理可根据学生实际酌情使用.

6.2 算术平均数与几何平均数(第一课时)

一、教学内容分析

1 本小节内容包括两个正数的算术平均数与几何平均数的定理及其证明，此定理在解决数学问题和实际问题中的应用.

2 在公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 以及算术平均数与几何平均数的定理的教学中，要让学生注意以下两点：

(1)$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$成立的条件是不同的：前者只要求 a,b 都是实数，而后者要求 a,b 都是正数. 例如$(-1)^2+(-4)^2\geqslant 2\times(-1)\times(-4)$成立，而$\frac{(-1)+(-4)}{2}\geqslant\sqrt{(-1)\times(-4)}$不成立.

(2)这两个公式都是带有等号的不等式，因此对其中的"当且仅当……时取'='号"这句话的含义要搞清楚. 教学时，要提醒学生从以下两个方面来理解这句话的含义：

当 $a=b$ 时取等号，其含义就是

$a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$;

仅当 $a=b$ 时取等号，其含义就是

$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$.

综合起来，其含义就是：$a=b$ 是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{a+b}$的充要条件.

3 此定理可以进一步引申出定理"n 个(n 是大于 1 的整数)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数".

"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$"的几何意义是"半径不小于半弦"(见教科书中的几何意义及其说明).

4 当用公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$证明不等式时，应该使学生认识到，它们本身也是根据不等式的意义、性质用比较法(将在下一小节学习)证出的. 因此，凡是用它们可以获证的不等式，一般也可以直接根据不等式的意义、性质或用比较法证明.

二、教学目标概览

1 理解两个实数的平方和不小于它们之积的 2 倍的重要不等式的证明及其几何解释.

2 理解两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理的证明及其几何解释.

3 培养学生对数学知识的理解能力、应用能力及论证能力.

三、聚焦重点难点

重点是算术平均数与几何平均数定理.

难点是算术平均数与几何平均数定理的应用.

四、教与学师生互动

复习回顾：

1 比较两个实数大小的基本方法.

2 不等式有关性质.

双向沟通：

1. 提出问题

某大商场，在国庆节期间举行商品大酬宾销售活动，准备分两次降价，但有三种实施方案：

A. 第一次 8 折销售，第二次再 7 折销售；

B. 第一次 7 折销售，第二次再 8 折销售；

C. 第一次与第二次都是$\frac{7+8}{2}$折销售.

试问哪一种实施方案最受顾客欢迎？

2. 组织讨论

(1)设物价为 M 元，三种实施方案的销售物价分别是：A __________；B __________；C __________.

结论：__________.

点评总结：$\left(\frac{0.7+0.8}{2}\right)^2\geqslant 0.7\times 0.8$

(2)一般地，有不等式$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，$a,b\in\mathbf{R}$. 即 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

3. 重要不等式

如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号). 几何解释：如图 6-1，用面积说明.

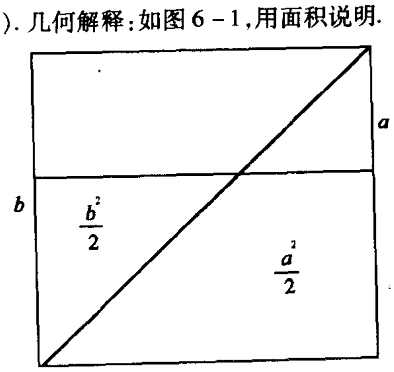


图 6-1

教师用书

严格不等式与非严格不等式概念.

4. **定理** 如果 a,b 是正数,那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号).

几何解释:如图 6-2. $\frac{a+b}{2}$ 为圆的半径, $\sqrt{ab}=CD$,易知 $CD\leqslant\frac{1}{2}AB$.

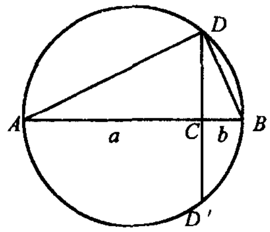


图 6-2

5. **算术平均数与几何平均数**

6. **例题分析**

【例1】 已知 x,y 都是正数,求证:

(1)如果积 xy 是定值 P,那么当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$;

(2)如果和 $x+y$ 是定值 S,那么当 $x=y$ 时,积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

证明:因为 x,y 都是正数,所以 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

(1)积 xy 为定值 P 时,有 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P}$, $\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{P}$. 上式当 $x=y$ 时取"="号,因此,当 $x=y$ 时,和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2)和 $x+y$ 为定值 S 时,有 $\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2}$, $\therefore xy\leqslant\frac{S^2}{4}$. 上式当 $x=y$ 时取"="号,因此,当 $x=y$ 时,积 xy 有最大值 $\frac{S^2}{4}$.

【例2】 已知 a,b,c,d 都是正数,求证 $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.

证明:由 a,b,c,d 都是正数,得 $\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{abcd}>0$, $\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{abcd}>0$.

$\therefore\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd$,即 $(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd$.

【例3】 设 a,b,c 都是正数,求证 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geqslant\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$.

证明: $\because a>0,b>0$, $\therefore (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$,即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$,

同理, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{4}{b+c}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geqslant\frac{4}{c+a}$,把以上三个同向不等式相加,得

$2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{4}{a+b}$, $\therefore\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geqslant\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$.

【例4】 设 a,b,c 都是正数,求证 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

证明: $\because a>0,b>0$, $\therefore\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$,同理,得 $\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$,

$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$,三式相加得 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\geqslant 2a+2b+2c$,

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

【例5】 已知函数 $f(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$. 若 x_1,x_2 是正实数,判断 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 的大小,并加以证明. (1994 年全国高考题)

证明: $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)=\frac{1}{2}\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}$,

$\because\sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时取"="号).

$\therefore$ 当 $a>1$ 时, $\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\leqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,即 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时取"="号).

当 $0<a<1$ 时, $\log_a\sqrt{x_1\cdot x_2}\geqslant\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,即 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$(当且仅当 $x_1=x_2$ 时取"="号).

7. **课堂练习**

(1)已知 a,b,c 都是正数,求证: $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$.

证明(略)

(2)已知 x,y 都是正数,求证:

① $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$;

证明(略)

② $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geqslant 8x^3y^3$.

证明(略)

巩固反思：

1. 本节学习的数学知识：______________.
2. 本节学习的数学方法：______________.

作业解惑：

1. 求证：$\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

证明：$\because\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leqslant\frac{a^2+(a^2+b^2)+b^2}{4}$

$=\frac{a^2+b^2}{2}$,

$\therefore\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

（用比较法也可）

2. 已知 a,b 都是正数，且 $a\neq b$，求证：

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}.$$

证明：$\because a\neq b,a>0,b>0$,

$\therefore a+b>2\sqrt{ab}$,

$\therefore\frac{2ab}{a+b}<\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$.

3. 已知 a,b 都是正数，求证

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证明：当 $a>0,b>0$ 时，显然有

$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

现证 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.

$\because\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{ab}}$,

$\therefore\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{ab}}}$,

即 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$.

由第1题的结果，可知

$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

$\therefore\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

当且仅当 $a=b$ 时，上式中的等号成立.

五、课堂跟踪反馈

1. 若 $0<a<b$，且 $a+b=1$，则下列四个数中最大的是　　　（ B ）

A. $\frac{1}{2}$　　　B. a^2+b^2

C. $2ab$　　　D. a

2. a,b 是正数，则 $\frac{a+b}{2},\sqrt{ab},\frac{2ab}{a+b}$ 三个数的大小顺序是　　　（ C ）

A. $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$

B. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{2ab}{a+b}$

C. $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$

3. 若 $x>0,y>0$，且 $x+y\leqslant4$，则下列不等式中恒成立的是　　　（ B ）

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant2$　　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant1$

六、教学设计说明

本堂教学设计方案继续遵循“主体”教学思想的原则，但根据本节教学内容，应着力研究学生的认知规律，教学活动围绕学生展开，教学活动应该是从学生的生活经验和已有的知识背景出发，向他们提供充分的从事数学实践活动和交流的机会，使他们在自主探索的过程中真正理解和掌握基本的数学知识、思想和方法，同时获得广泛的数学活动经验。努力要使学生成为数学学习的主人，而教师则成为学生学习数学的组织者、引导者和合作者，是平等中的首席。

利用正数的算术平均数与几何平均数之间的关系，我们可以求某些非二次函数的最大值、最小值. 例如教科书第3页上的引例，题中的函数 $x+\frac{1600}{x}$ 不是二次函数，要求它在定义域 $(0,+\infty)$ 内的最小值，仅用学生过去学过的二次函数的知识是无法解决的，现在从 x 与 $\frac{1600}{x}$ 的积为常数（即它们的几何平均数为常数）这一点出发，问题就很容易解决了.