中学数学

CHUDENGJIHEJIETIYINDAO

初等几何解题引导

湖北人民出版社

初等几何解题引导

江　志　龚延华　毛　奇　编
邓萃林　等审

湖北人民出版社

初等几何解题引导

江　志　龚延华　毛　奇编

邓萃林　等审

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　12.125印张　278,000字

1982年4月第1版　1982年4月第1次印刷

印数：1—12,500

统一书号：7106·1618　定价：0.98元

出 版 说 明

为了满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学参考的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学会组织编写了这套《中学数学》：《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《解析几何解题引导》、《三角解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》（Ⅰ、Ⅱ）.

今后，我们将组织力量继续编写适合中学生课外学习和中学教师教学参考的读物．希望这套书和广大读者见面以后，能听到各方面的热情批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善.

一九八二年三月

目　录

第一章　中学平面几何概述

什么叫平面几何学？平面上适合某种条件的点的集合，叫平面图形；研究平面图形的形状、大小和相互间的位置关系的数学分科，叫平面几何学.

§1. 相交线与平行线

一、直　线

直线是原始概念，不定义，可作如下描述：直线是客观世界中很直很直的线的抽象，无粗细，可向两边无限延伸.

直线的基本性质：两点确定一条直线.

定义 1　在直线上某一点一旁的部分叫做射线，这一点叫射线的端点.

定义 2　直线上任意两点间的部分叫做线段，这两点叫线段的端点.

线段的基本性质：在所有连结两点的线中，线段最短. 这线段的长叫这两点间的距离.

二、两直线的位置关系

(1) 有两公共点——重合；

(2) 有一公共点——相交；

(3) 没有公共点——平行.

三、角

1. 定义 从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角. 或者说，把一条射线 OA，绕着它的端点 O，从原来的位置 OA 旋转到另一个位置 OB，这时 OA 和 OB 就生成了一个角. OA 叫始边，OB 叫终边，O 叫顶点，旋转方向是逆时针方向生成正角，顺时针方向生成负角. 记为 $\angle AOB$.

OA 沿逆时针方向转一圈回到原来的位置，生成的角叫做周角.

2. 角的度量

1）角度制：以周角的$\frac{1}{360}$为一度；

2）弧度制：以所对弧长等于半径的圆心角为 1 弧度；

3）互换公式：π 弧度 $=180°$；

4）弧长、半径、圆心角三者之间的关系：$l=\alpha R$.

3. 几类角 平角 $=180°$；直角 $=90°$；$0°<$锐角$<90°$；$90°<$钝角$<180°$.

4. 余角和补角 两角和等于 $90°$，那么这两个角叫做互余；两角和等于 $180°$，那么这两个角叫做互补.

5. 角平分线 由顶点出发，将角分成二等分的射线叫角平分线. 它是到角两边等距离的点的集合.

6. 定理 对顶角相等.

四、两直线垂直

1. 定义 若二直线相交成直角，则称二直线互相垂直. 其中一条是另一条的垂线. 交点叫垂足.

2. 垂线的基本性质 过一点可以作一条且只可以作一条

直线与已知直线垂直.

3. 点到直线的距离 从直线外一点到这条直线上各点所连的线段中，和这条直线垂直的线段最短. 称它的长度为这点到这直线的距离. 也叫这点到这直线的垂线的长.

4. 斜线长与射影 从直线外一点向直线引垂线与斜线，斜线与直线的交点叫斜足，这点到斜足的距离叫斜线的长，垂足与斜足间的线段叫斜线在直线上的射影.

5. 斜线长定理 从直线外一点向直线引垂线与斜线，射影长的相应的斜线也长，射影相等的相应的斜线长也相等，射影短的相应的斜线也短；反过来也一样.

6. 垂直平分线 过线段的中点且与线段垂直的直线叫线段的垂直平分线. 它是到线段两端等距离的点的集合.

五、平行线

1. 定义 在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线.

2. 基本性质 过直线外一点可以作一条且只可以作一条直线与已知直线平行.

3. 判定方法

1）两直线被第三直线所截，若同位角相等，或内错角相等，或同旁内角互补，则二直线平行；

2）两直线同平行于第三直线，则此二直线平行；

3）两直线同垂直于第三直线，则此二直线平行；

4）一直线上的任意两点到另一直线的距离相等，则此二直线平行.

4. 平行线的性质

1）两直线平行，则同位角相等，内错角相等，同旁内角互补；

2）两直线平行，则平行于其中一条的直线必平行于另一条；

3）两直线平行，则垂直于其中一条的直线必垂直于另一条；

4）两直线平行，则夹在其间的平行线段相等.

习 题 一

1．一边公用，另一边互为延长线的两个角叫邻补角．试证：互为邻补角的两条角平分线互相垂直.

2．试证：一个角的平分线的反向延长线是这个角的对顶角的平分线.

3．在$\angle AEC$(小于平角)的两边上任取二点A、C，过A、C在角内部引两条平行的射线AB、CD；那么

$$\angle BAE+\angle AEC+\angle ECD=360°.$$

4．求证：两条平行线被第三条直线所截，一对同位角的平分线互相平行.

§2. 三 角 形

一、定 义

1．**折线** 由不在同一条直线上的几条线段顺次首尾相接组成的线叫做折线.

2．**多边形** 如果一条折线的两个端点重合，构成封闭折线，称为多边形.

3．**凸多边形** 把多边形的每一条边向两方延长，如果多边形的其他各边都在延长所得直线的同旁，则称它为凸多边形．否则叫非凸多边形．本书我们只研究凸多边形，并且省略“凸”

字.

4. 三角形 只有三条边的多边形叫做三边形，也称三角形. 若边数为四，五，……，n，……则分别称为四边形。五边形，……，n 边形，…….

二、分 类

1. 按角分 钝角三角形，直角三角形，锐角三角形.

2. 按边分 等边三角形，二等边三角形，不等边三角形.

三、三角形的主要线段和特殊点

1. 五 线 高线、中线、角平分线、边的中垂线、中位线.

2. 五 心

1）垂心——三条高线的交点；

2）重心——三条中线的交点；

3）内心——三条内角平分线的交点，即内切圆心；

4）外心——三条边的中垂线的交点，即外接圆心；

5）旁心——一内角的平分线与其余两内角的外角平分线的交点，即旁切圆的圆心.

3. 有关性质

1）三角形的中位线定理及其逆定理：三角形两边中点连线平行于第三边且等于第三边的一半；反过来，过三角形一边的中点且平行于另一边的直线必过第三边的中点.

2）三角形的重心定理：三角形三条中线交于一点，这点与三角形对应顶点间的部分是中线长的 2/3.

3）三角形内角平分线定理其逆定理：三角形内角平分线分对边成两部分的比，等于夹这个角两边的比；反过来也成立.

4）三角形外角平分线定理及其逆定理：三角形外角平分线，如果和对边的延长线相交，外分对边成两条线段，这两条线段和夹相应内角的两边成比例；反过来也成立．

四、关于边角的性质

1．关于边的性质

在三角形中，

1）两边之和大于第三边；2）两边之差小于第三边．

2．关于角的性质

1）三角形三内角和等于 180°．

推论 多边形的各内角和等于 $(n-2)\cdot 180^\circ$．

2）三角形的每一个外角等于和它不相邻的两内角的和．

推论 三角形的每一个外角大于和它不相邻的任一内角．

3．关于边角的性质

1）在一个三角形中，如果两条边不等，则大边对大角；反过来，大角对大边．

2）在两个三角形中，有两对对应边相等，夹角不等，则大角对大边；反过来，大边对大角．

五、全等三角形

1．**定义** 两个三角形能完全重合，称为全等三角形．

2．**判定定理** 两个三角形具备下面五条之一的就全等：

1）三边对应相等；

2）两边夹一角对应相等；

3）两角夹一边对应相等；

4）两角和一边对应相等；

5）两边及大边所对的角对应相等．

3. **性质定理** 全等三角形的对应元素（边或角、线段）相等.

六、直角三角形

1. **直角三角形全等的判定定理** 除直角外，有一直角边对应相等，另外有任一对应边（或角）相等就可判定二直角三角形全等.

2. **直角三角形的性质**

1）直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；一个三角形一边上的中线等于这边的一半，则这三角形为直角三角形.

2）直角三角形中，锐角等于 30° 的对边等于斜边的一半；在直角三角形中，一直角边是斜边的一半，则这直角边所对的锐角为 30°.

3）勾股定理及其逆定理——在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的平方的和；如果三角形一条边的平方等于其他两条边的平方的和，那末这条边所对的角是直角.

4）直角三角形中的射影定理：

a）直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项；

b）直角边是这直角边在斜边上的射影与斜边的比例中项.

5）勾股定理的推广（余弦定理）：在任何三角形中，一边的平方等于另两边的平方的和减去另两边与它们夹角的余弦的积的 2 倍.

七、等腰三角形和等边三角形

(1) 等腰三角形两底角相等；一个三角形有两内角相等，则此三角形是等腰三角形.

(2) 等腰三角形五线合一(底边上的高、中线、中垂线、顶角平分线、对称轴).

(3) 等边三角形三个内角相等且为 60°；三个角均为 60° 的三角形是等边三角形.

八、轴对称图形

1. **定义** 把一个图形沿着某一条直线折过来,如果它能够和另一个图形重合，那么这两个图形叫做关于这条直线成轴对称，这条直线叫做对称轴.

如果一个图形是由关于某一条直线成轴对称的两部分组成的，这个图形就叫做轴对称图形.

2. 几个轴对称图形的例子

1) 等腰三角形关于顶角平分线成轴对称；

2) 线段关于它的中垂线成轴对称；

3) 角关于它的平分线成轴对称.

3. **轴对称点性质** 如果两点关于一条直线成轴对称,这条直线就是这两点联结线段的中垂线. 据此可找对称点.

习　题　二

1. 在$\triangle ABC$中，设边 BC 的中点为 D，设边 AB 三等分的点为 E、F，如果 AD 与 CE 的交点为 G，则 AG 与 GD 的比将等于多少?

2. 已知 D 是$\triangle ABC$ 内的任意一点，求证：

$$AD+BD+CD<AB+BC+CA.$$

3. 求证：三角形的三条中线的和小于周长.

4. 设 A、B 两点在直线 l 的同侧，试在 l 上求一点 C，使 $AC+CB$ 最短，并证明.

5. 两个三角形如果有两边对应相等，以及其中一边的对角也对应相等，这两个三角形一定全等吗？如果全等，请证明；如果不一定全等，请举一反例．

6. 试证：正三角形的外心与内心是同一点；反之，如果三角形的外心也是它的内心，则此三角形是正三角形．

7. 设在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线与边BC的交点为D，从D向边AB、AC所引垂线的垂足分别是E、F；求证：$AD\perp EF$．

8. 在$\triangle ABC$中，$\angle B<\angle C$，BE、CF分别是$\angle B$、$\angle C$的平分线；求证：$BE>CF$．

§3. 四　边　形

一、种属关系

$$\text{凸四边形}\begin{cases}\text{平行四边形}\left.\begin{cases}\text{菱形}\\\text{矩形}\end{cases}\right\}\text{正方形}\\\text{梯形}\begin{cases}\text{等腰梯形}\\\text{直形梯形}\end{cases}\end{cases}$$

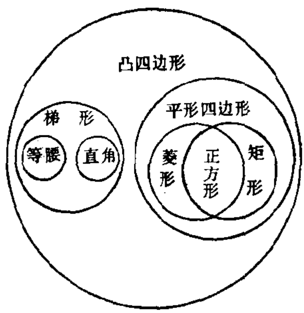

图 1. 1

定义 1　两组对边分别平行的四边形叫平行四边形；

有一组邻边相等的平行四边形叫菱形；

有一个角是直角的平行四边形叫矩形；

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫正方形；正方形既是有一个角是直角的菱形，又是有一组邻边相等的矩形．

定义 2 一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫梯形；

两腰相等的梯形叫等腰梯形；

有一腰垂直于底的梯形叫直角梯形.

二、平行四边形

1. 性质 1）对边相等；2）对角相等；3）邻角互补；4）对角线互相平分；5）关于对角线的交点成中心对称.

2. 判定 1）两组对边分别平行；2）两组对边分别相等；3）一组对边平行且相等；4）两组对角分别相等；5）对角线互相平分.

三、中心对称图形

1. 定义 把一个图形绕着某一定点旋转180°，如果它能和另一个图形重合，那么这两个图形叫做关于这定点成中心对称. 这定点叫对称中心.

如果一个图形绕着某一点旋转180°后，能和原来的图形本身重合，这个图形就叫做中心对称图形.

2. 中心对称图形的两个例子

1）平行四边形关于对角线的交点成中心对称；

2）线段关于它的中点中心对称.

3. 中心对称点的性质 如果两点关于一点成中心对称，那么这点就是这两点联结线段的中点，据此可找某点的中心对称点.

四、特殊的平行四边形

1. 菱形 1）性质：四边相等；对角线互相垂直平分且平

分内角；两对角线所在直线都是它的对称轴.

2）判定：邻边相等的平行四边形；对角线互相垂直的平行四边形；一对角线平分顶角的平行四边形；四边相等的四边形.

2．矩形 1）性质：四个角均为直角；对角线平分且相等；有二对称轴，就是过每组对边中点的直线.

2）判定：有一角为直角的平行四边形；对角线相等的平行四边形；三个角是直角的四边形.

3．正方形 1）性质：具有平行四边形、菱形、矩形的一切性质，有四条对称轴，即两对角线所在直线和两条过对边中点的直线.

2）判定：邻边相等、一角为直角的平行四边形；邻边相等的矩形；有一角为直角的菱形.

五、两个定理

1．平行线等分线段定理 如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在任何一条与平行线相交的直线上截得的线段也相等.

2．对应边平行或垂直的角定理 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补(对应边平行且方向都相同或都相反的两角相等；如果方向一对相同而另一对的方向相反则互补)．如果一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补.

六、梯　形

(1) 梯形的中位线平行于底且等于两底和的一半.

(2) 等腰梯形在同一底上的两个角相等；反之，在同一底